Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Routenplanung

13. Vorlesung, Sommersemester 2021

Jonas Sauer | 31. Mai 2021

Elektromobilität

Elektrofahrzeuge (EVs):

- Transportmittel der Zukunft
- Emissionsfreie Mobilität

Aber:

- Akkukapazität eingeschränkt (und damit Reichweite)
- Lange Ladezeiten, wenig öffentliche Ladestationen
- „Reichweitenangst“

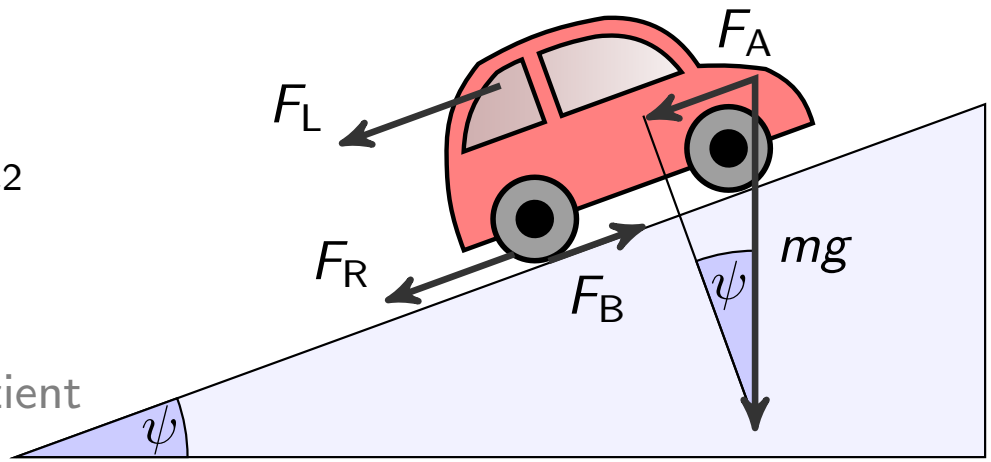
$\Rightarrow$ Berücksichtigung von Energieverbrauch bei der Routenplanung

Verbrauchsmodell

Wie kommen wir an Energieverbrauch?

Typisches (vereinfachtes) Modell

- Rollwiderstand: $F_R = \mu_R mg$
  μ_R: Rollwiderstandskoeffizient
  m: Fahrzeugmasse
  g: Erdbeschleunigung
- Luftwiderstand: $F_L = \frac{1}{2}\rho A C_W v^2$
  ρ: Luftdichte
  A: Stirnfläche
  C_W: Strömungswiderstandskoeffizient
  v: Geschwindigkeit
- Anstieg: $F_A = mg \sin \psi$
- Beschleunigung: $F_B = ma$
  a: Beschleunigung



Insgesamt benötigte Kraft: $F = F_R + F_L + F_A + F_B$

Verbrauchsmodell

Wie kommen wir an Energieverbrauch?

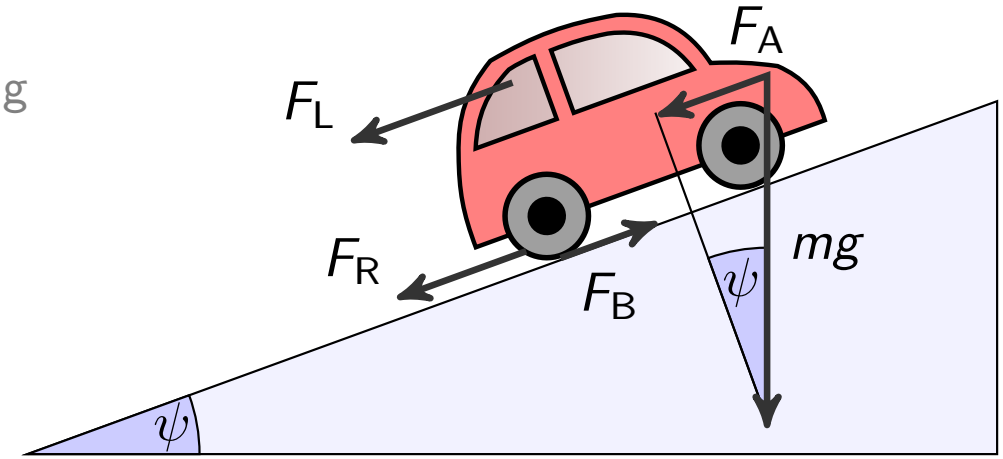
Typisches (vereinfachtes) Modell

Nötige Leistung: $P = \frac{F \cdot v}{\eta} + P_0$

v: Geschwindigkeit

η: Effizienzkoeffizient der Übersetzung

P_0: Leistung für Nebenverbraucher (Klimaanlage,...)



Energieverbrauch über einen bestimmten Zeitraum:
$E = \int_0^T P \, dt$

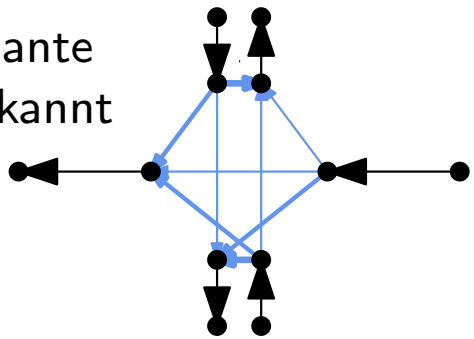
Beobachtung: Nur Beschleunigung, Geschwindigkeit und Steigung hängen vom Straßensegment ab

Alle anderen Parameter sind konstant oder vom Fahrzeugzustand abhängig (Masse, Nebenverbraucher)

Verbräuche auf Kanten

Wie bekommen wir Verbräuche auf den Kanten im Straßengraphen?

- Nur Beschleunigung, Geschwindigkeit und Steigung von Straßensegment abhängig
- Annahme:
  - Geschwindigkeit und Steigung ist konstant auf jeder Kante
  - Andere Parameter (Masse, Nebenverbraucher) sind bekannt
- Zwischenknoten, wenn sich Steigung oder Geschwindigkeitsbegrenzung ändern
- Zusätzliche Kanten für Brems-/Beschleunigungskosten



$\Rightarrow$ Verbrauch auf Segment vereinfacht (für realistische Steigung) als

$$\lambda_1 v^2 + \lambda_2 s + \lambda_3$$

v: Geschwindigkeit

s: Steigung

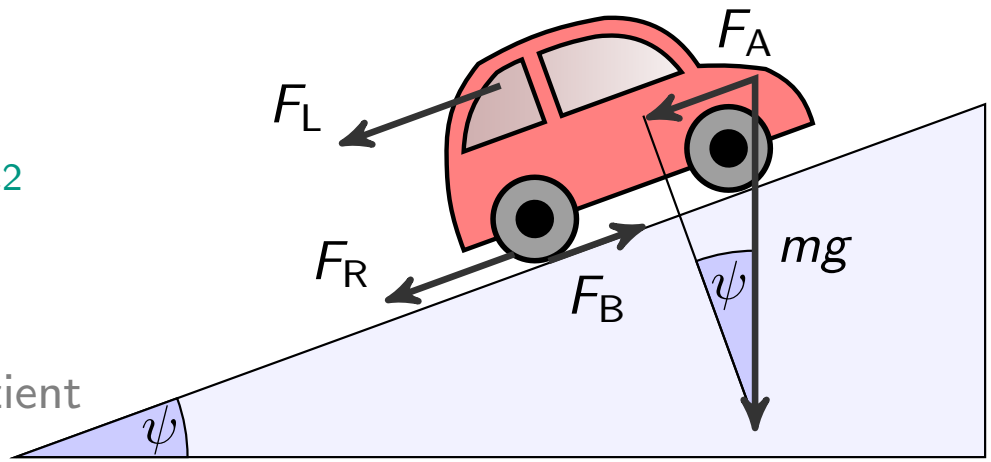
λ_1, λ_2, λ_3: (nichtnegative) Konstanten

Verbrauchsmodell

Wie kommen wir an Energieverbrauch?

Typisches (vereinfachtes) Modell

- Rollwiderstand: $F_R = \mu_R mg$
  μ_R: Rollwiderstandskoeffizient
  m: Fahrzeugmasse
  g: Erdbeschleunigung
- Luftwiderstand: $F_L = \frac{1}{2}\rho A C_W v^2$
  ρ: Luftdichte
  A: Stirnfläche
  C_W: Strömungswiderstandskoeffizient
  v: Geschwindigkeit
- Anstieg: $F_A = mg \sin\psi$
- Beschleunigung: $F_B = ma$
  a: Beschleunigung

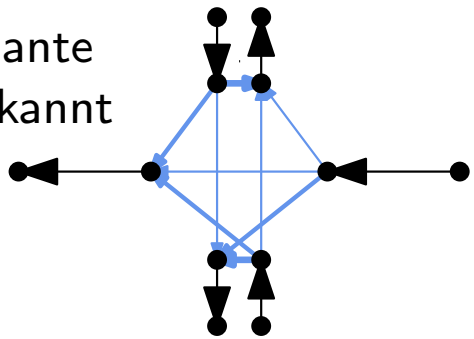


Insgesamt benötigte Kraft: $F = F_R + F_L + F_A + F_B$

Verbräuche auf Kanten

Wie bekommen wir Verbräuche auf den Kanten im Straßengraphen?

- Nur Beschleunigung, Geschwindigkeit und Steigung von Straßensegment abhängig
- Annahme:
  - Geschwindigkeit und Steigung ist konstant auf jeder Kante
  - Andere Parameter (Masse, Nebenverbraucher) sind bekannt
- Zwischenknoten, wenn sich Steigung oder Geschwindigkeitsbegrenzung ändern
- Zusätzliche Kanten für Brems-/Beschleunigungskosten



$\Rightarrow$ Verbrauch auf Segment vereinfacht (für realistische Steigung) als

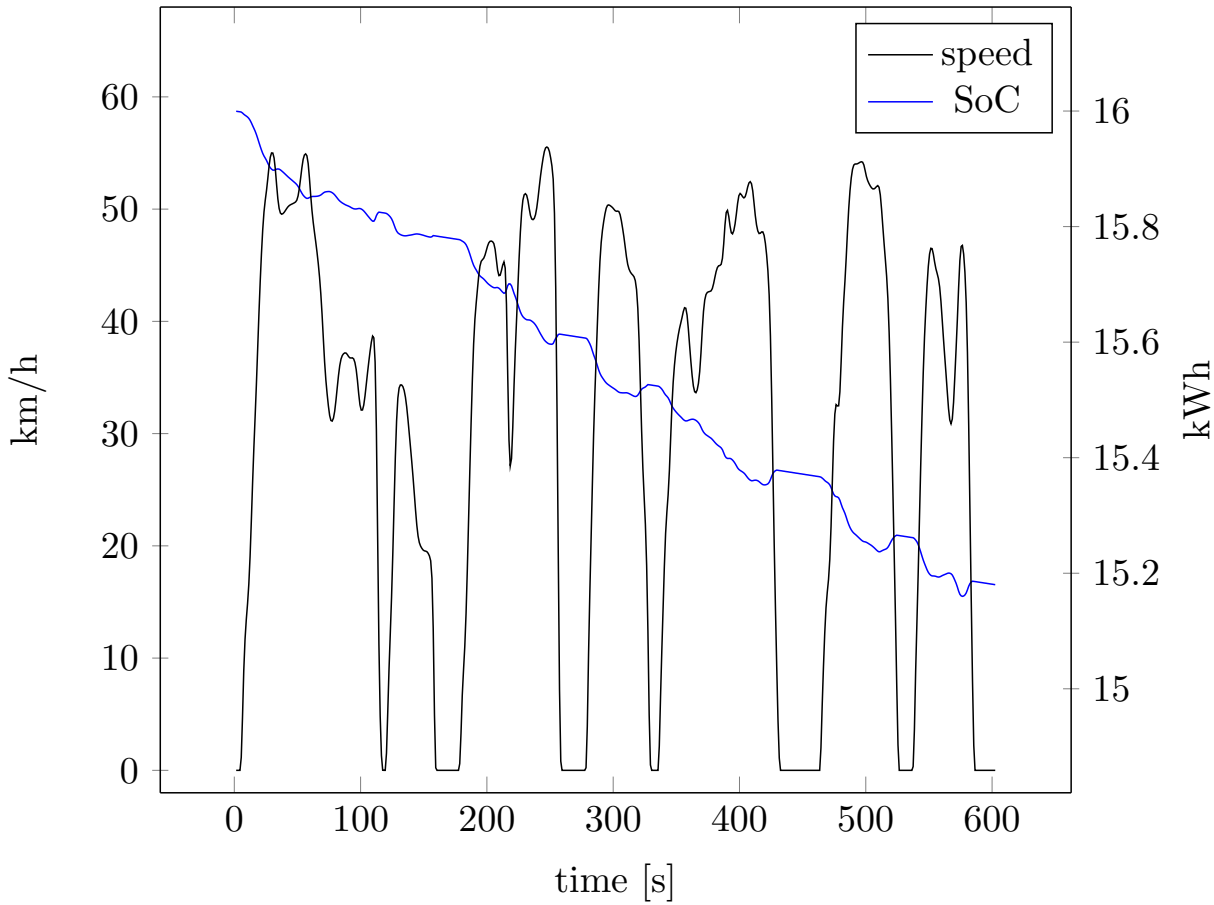
$$\lambda_1 v^2 + \lambda_2 s + \lambda_3$$

v: Geschwindigkeit

s: Steigung

λ_1, λ_2, λ_3: (nichtnegative) Konstanten

Alternative Datenquellen



Ermittle Kantengewichte mit Hilfe von Messungen aus Realwelt-Tests, Fahrzeugsimulation, ...

Rekuperation

Besonderheiten von Elektrofahrzeugen:

- Verbrauch kann auch negativ werden
  - F_A ist negativ beim Bergabfahren
  - F_B ist negativ beim Bremsen
- Elektromotor fungiert als Generator
- Rückgewinnung von Energie (Akku wird aufgeladen)

Aber: keine negativen Zyklen (physikalische Gesetze)

Energieverbrauch als Metrik

Besonderheiten:

- Rekuperation
  - Rückgewinnung von Energie möglich (bergab fahren, bremsen)
  - Negative Kantengewichte

  Aber: keine negativen Zyklen (physikalische Gesetze)

- Akkukapazität (Battery Constraints)
  - Akku darf nicht leer laufen
    (Andernfalls Kante nicht benutzbar)
  - Akku kann nicht überschritten werden
    (Kanten können genutzt werden, aber Energie verfällt ggf.)
  - Muss für jeden Knoten eines Pfades gelten

$\Rightarrow$ Ladestand (state of charge, SoC) während Query berücksichtigen

Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

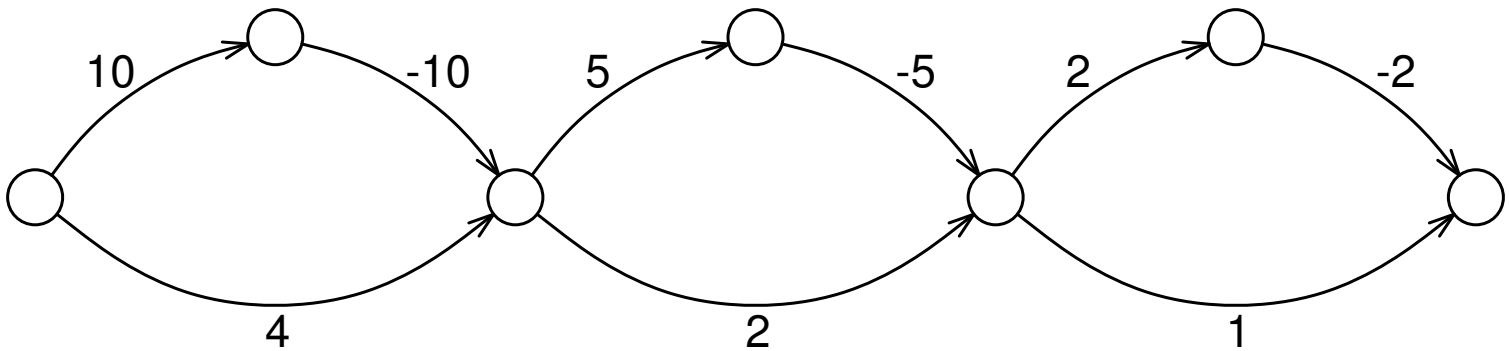
- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

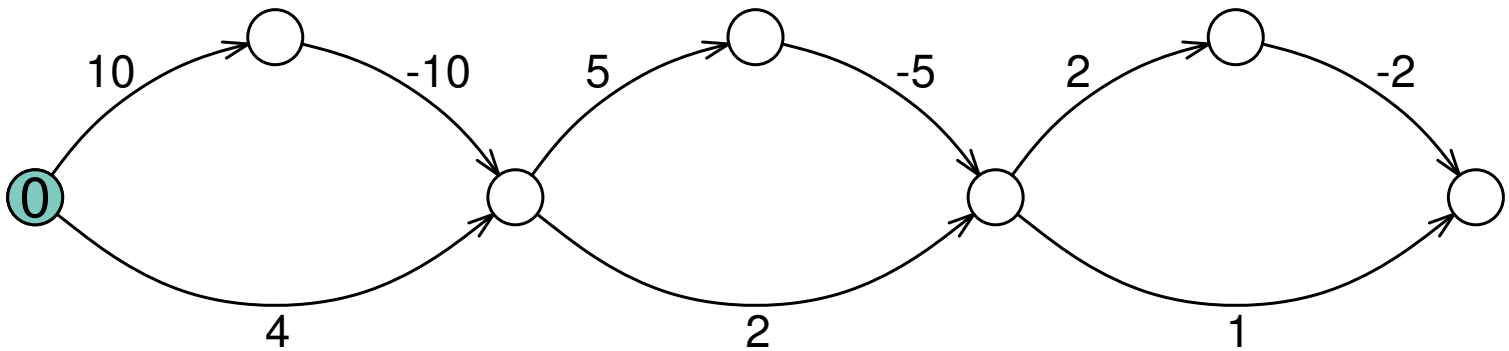


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

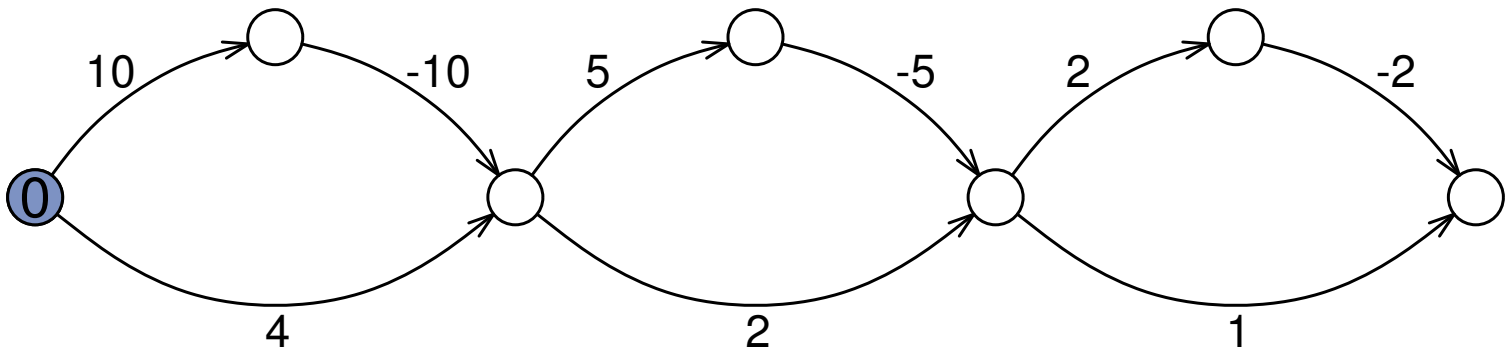


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

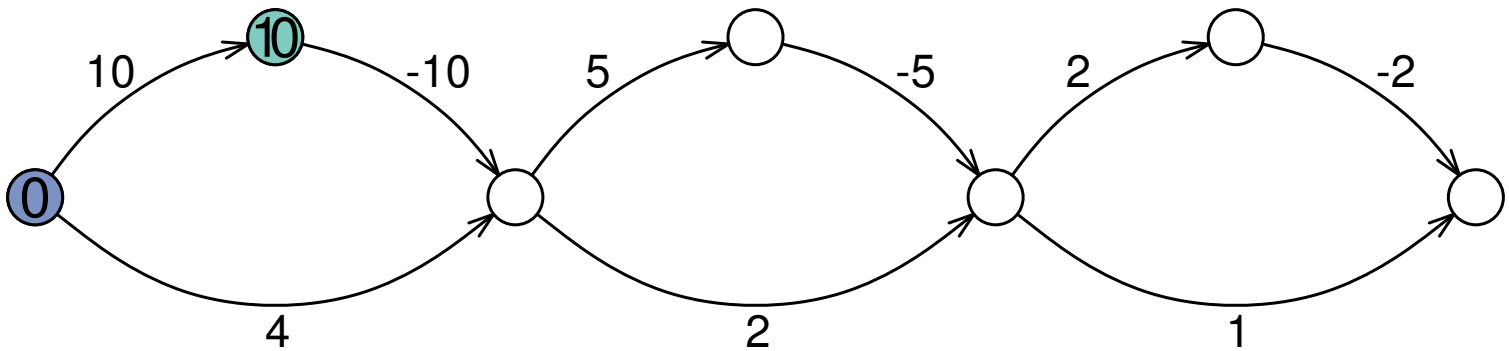


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

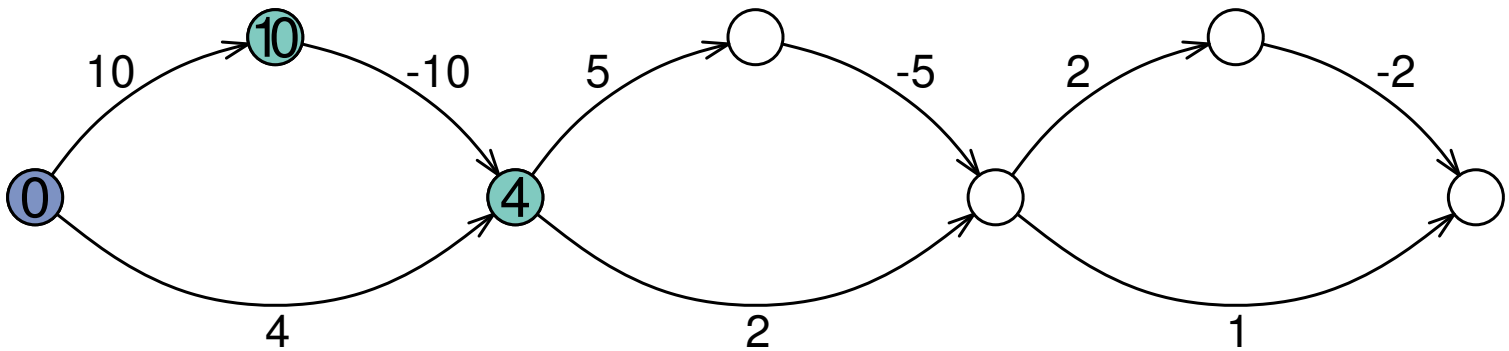


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

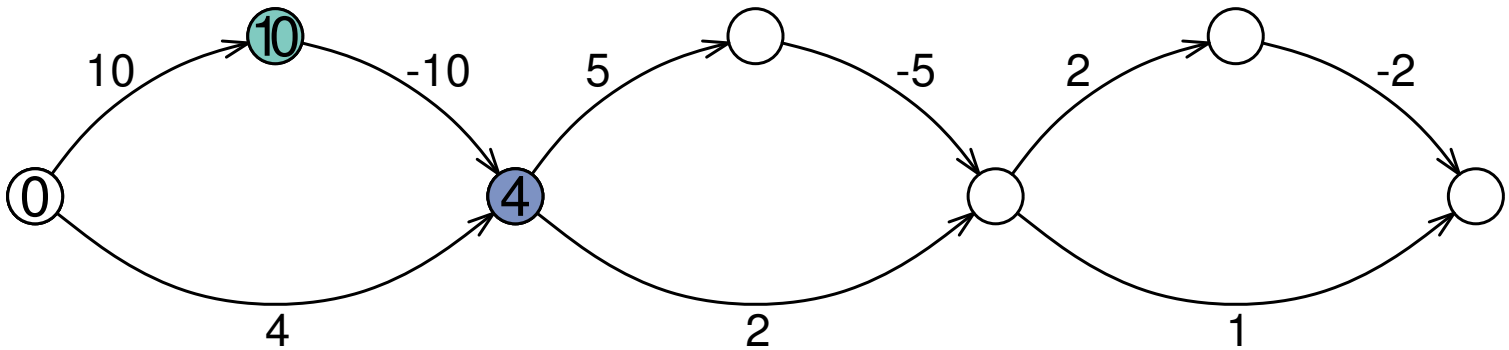


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

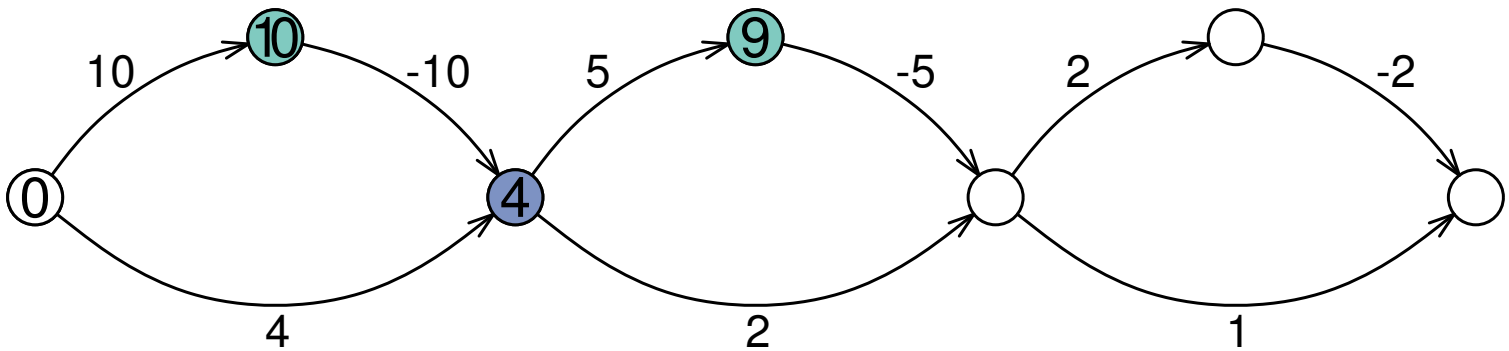


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

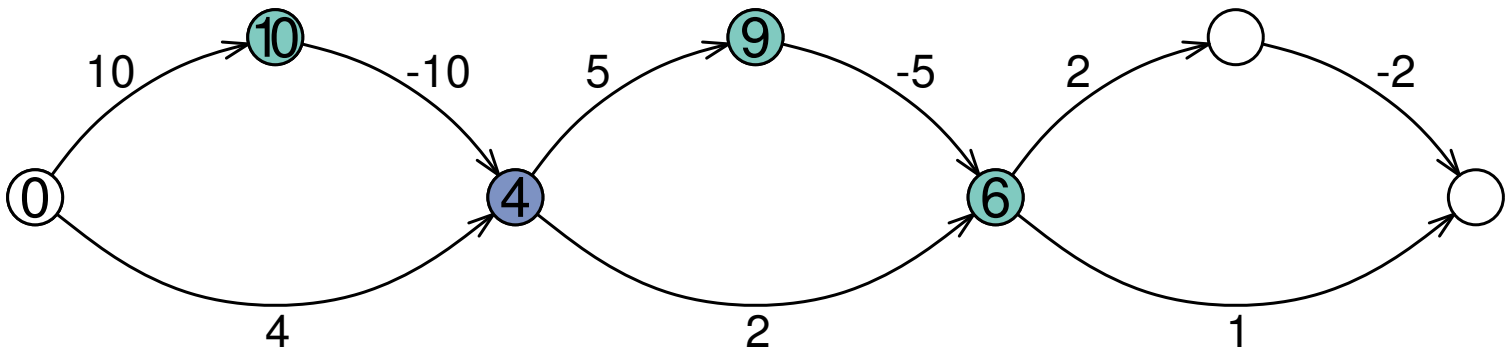


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

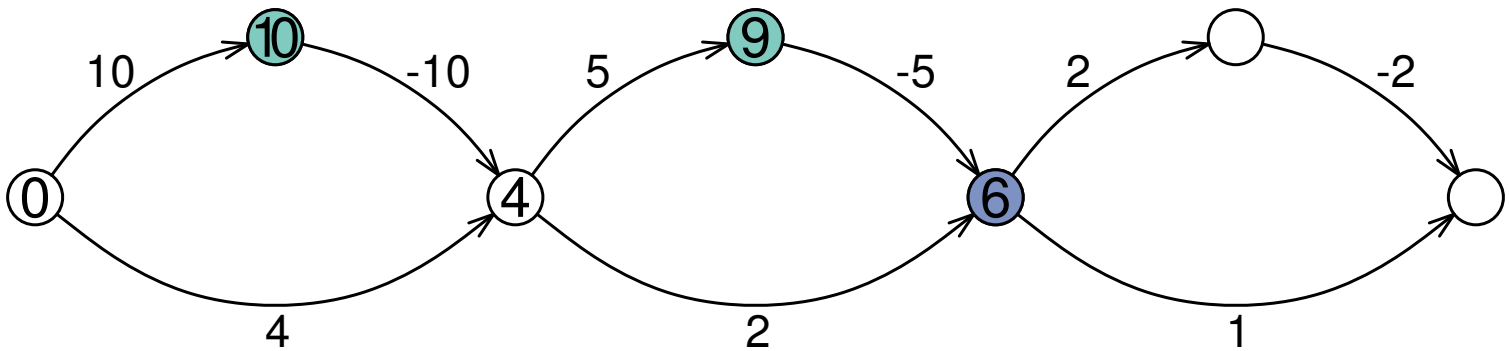


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

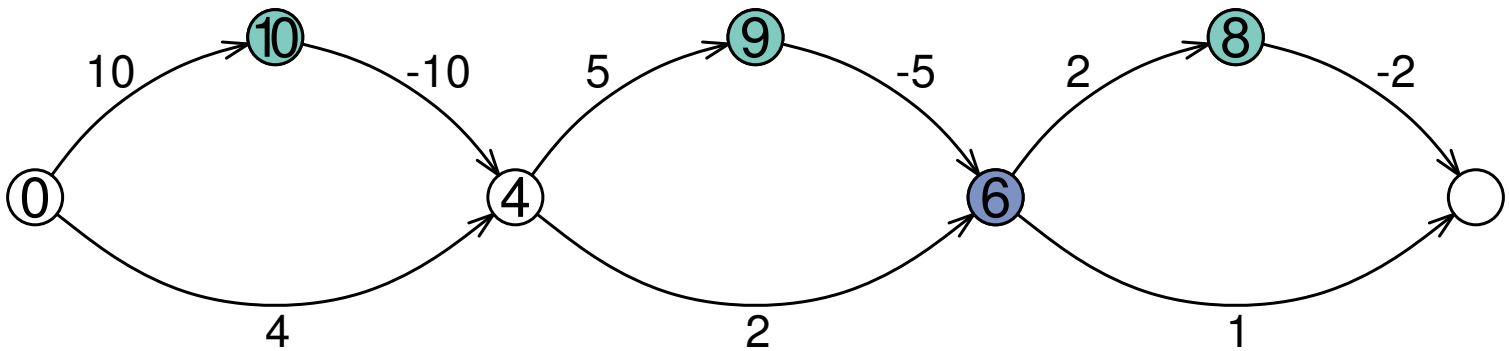


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

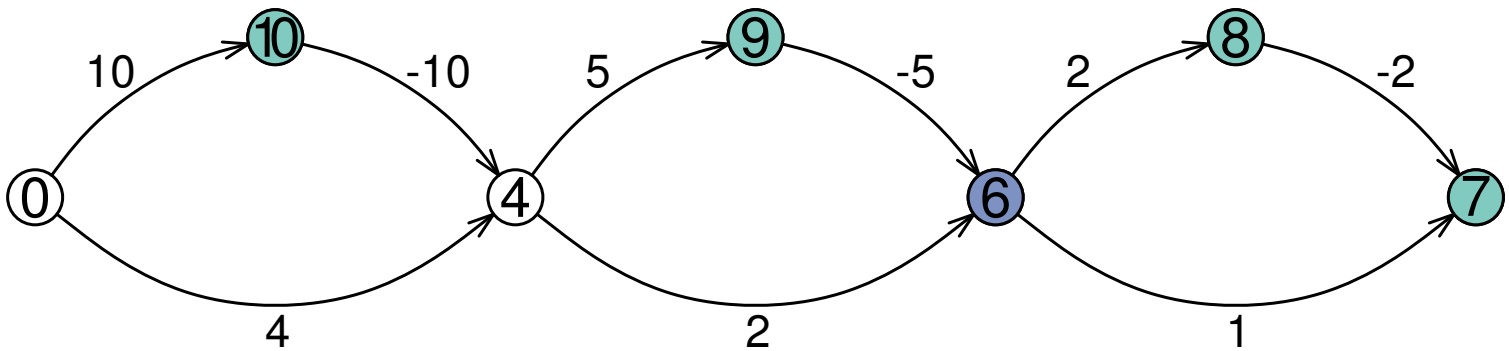


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

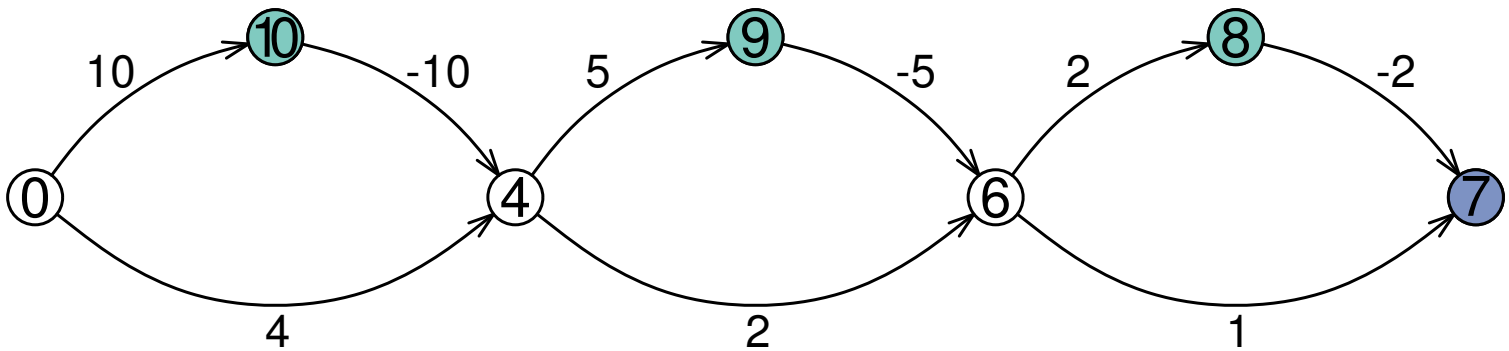


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

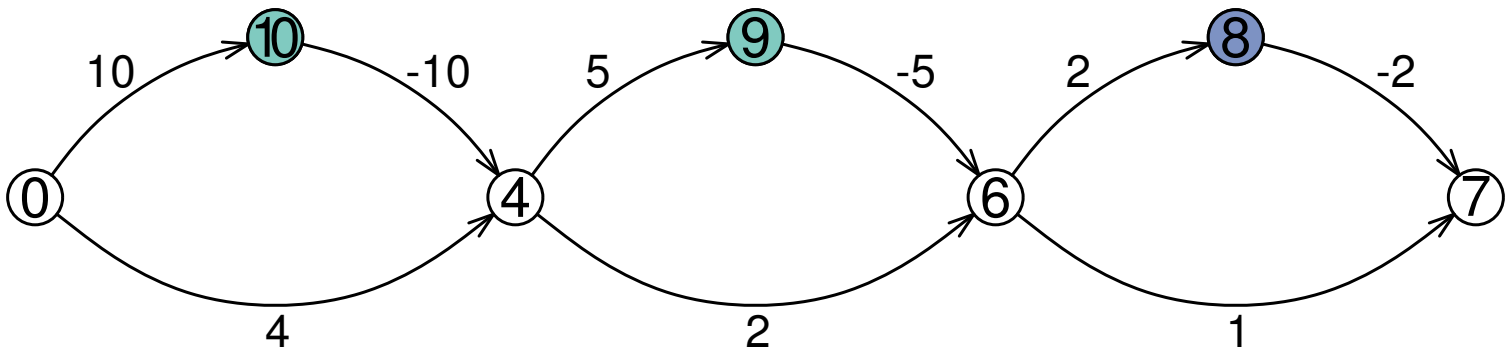


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

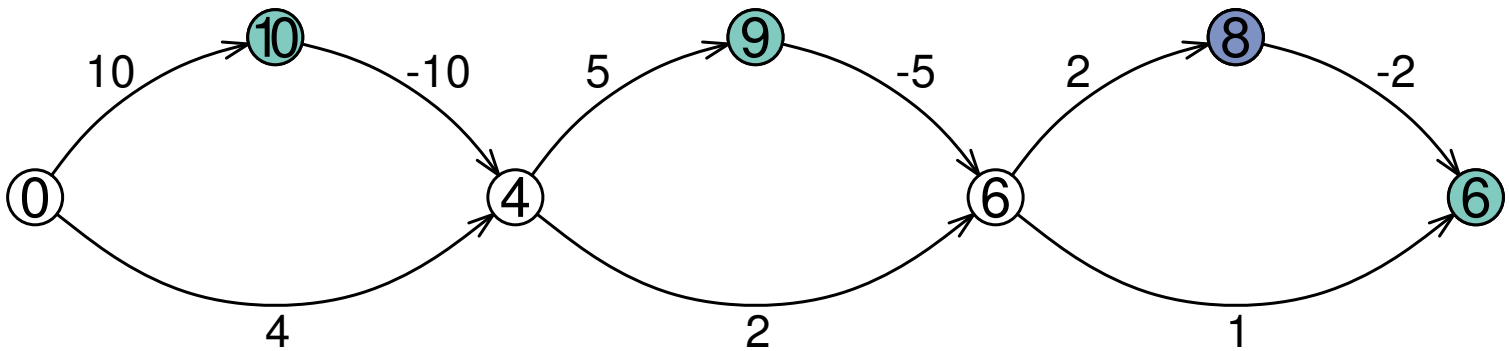


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

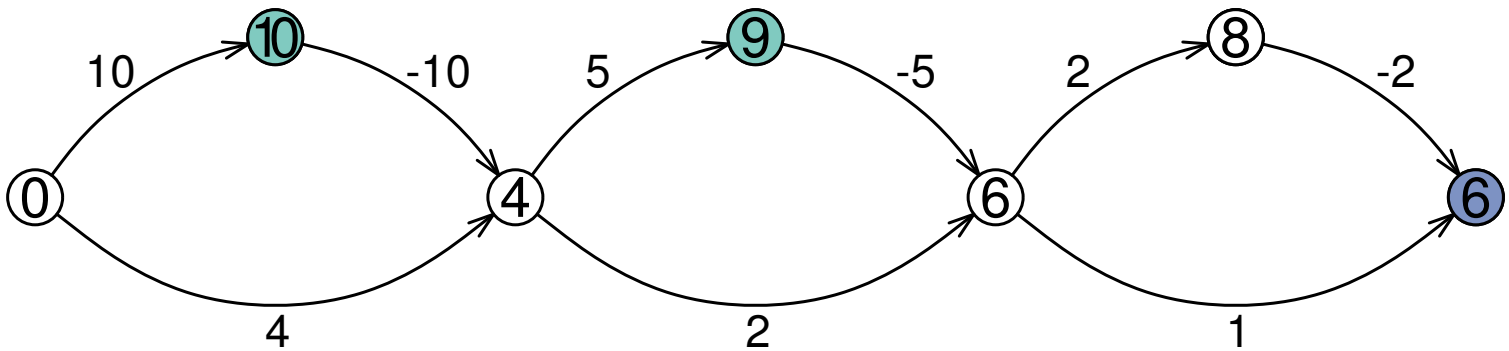


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

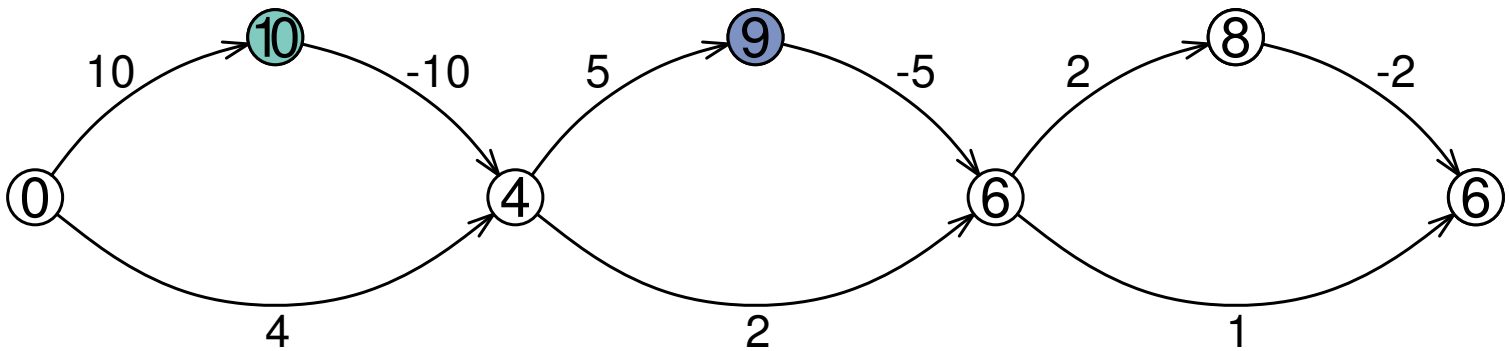


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

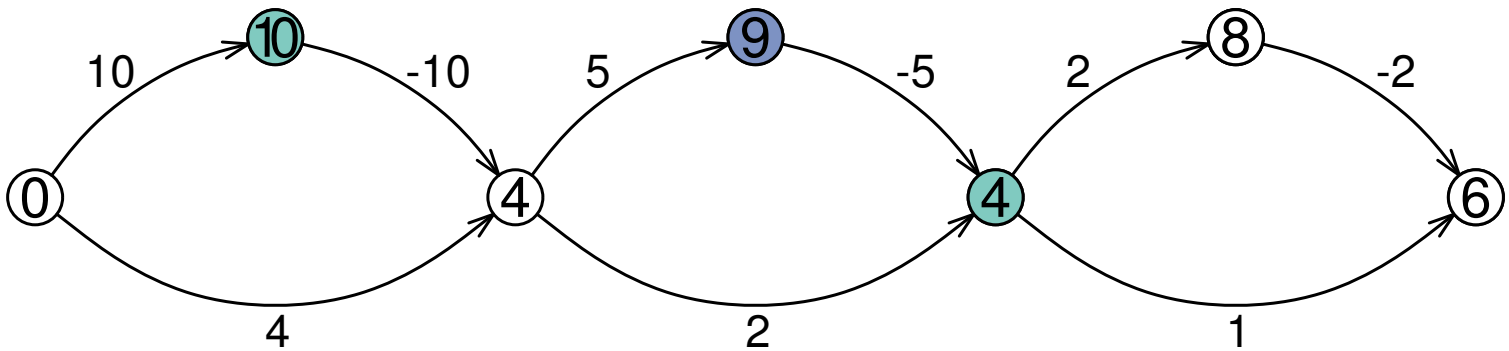


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

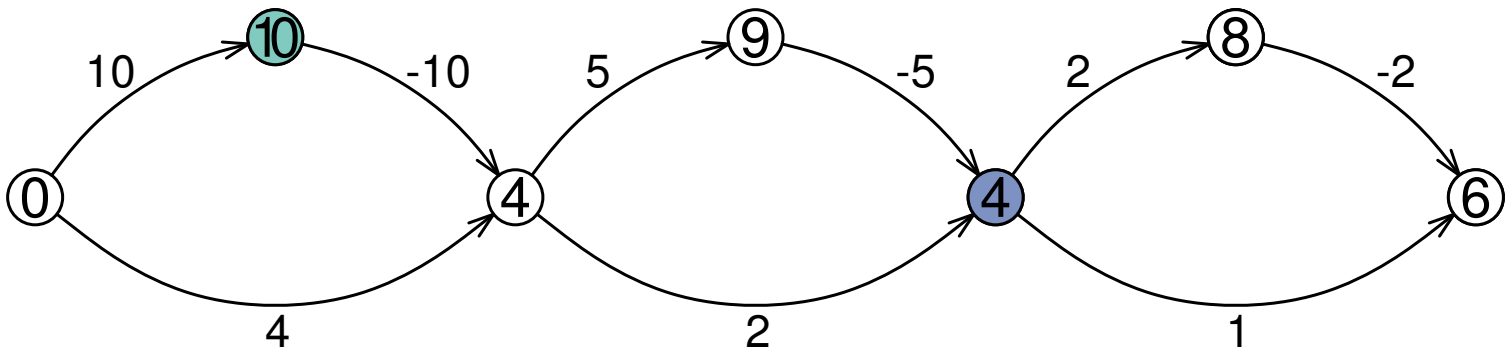


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

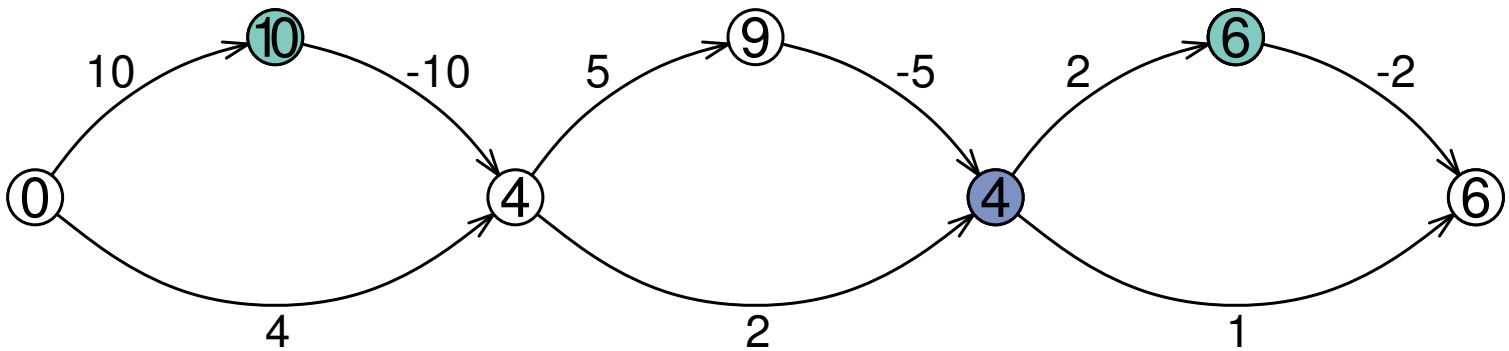


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

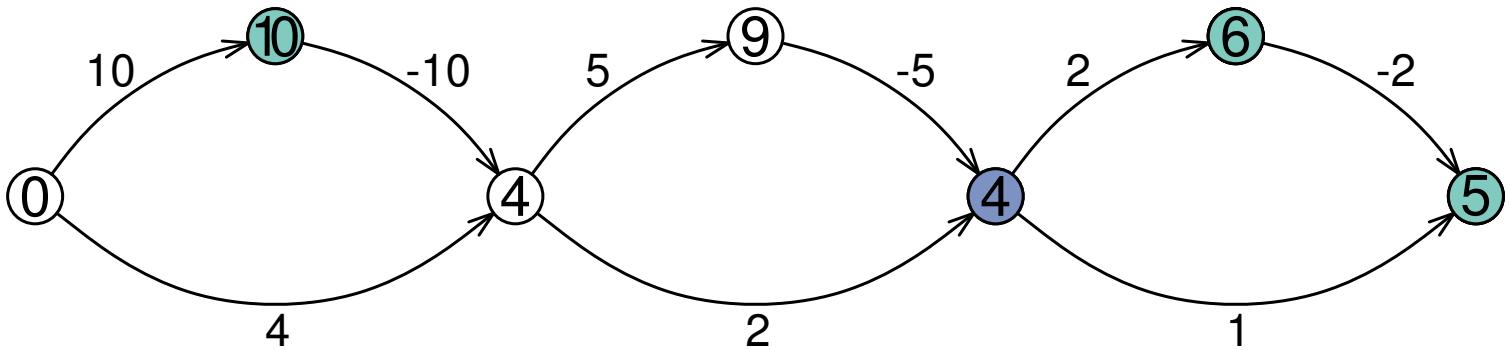


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

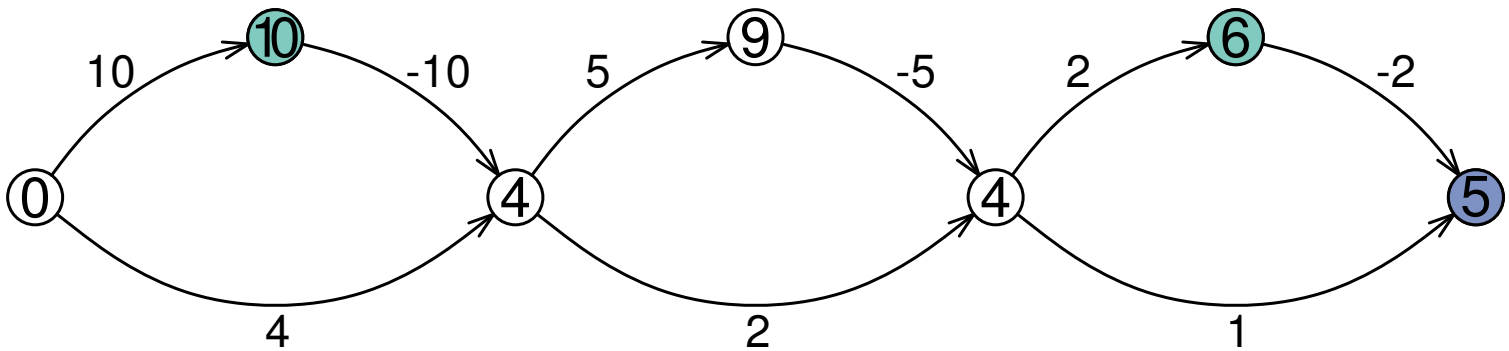


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

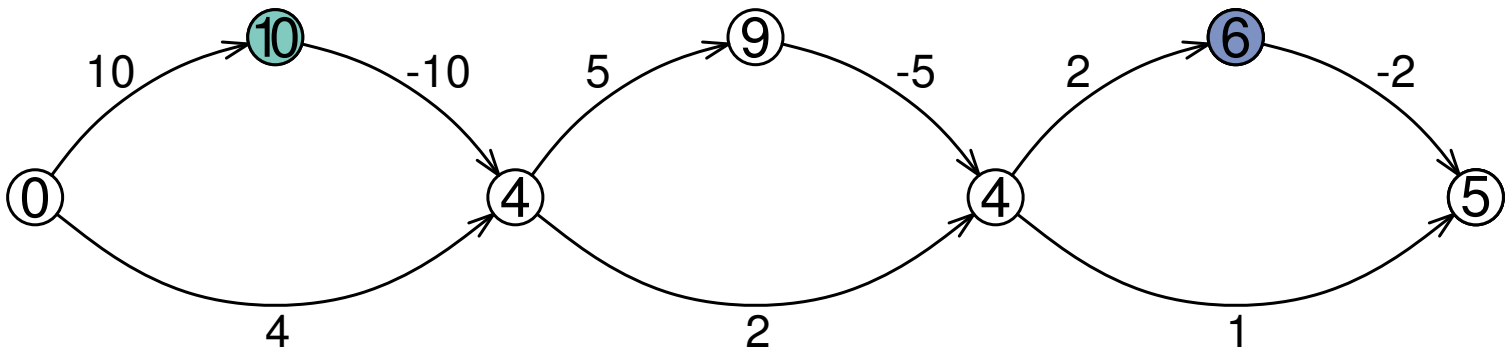


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

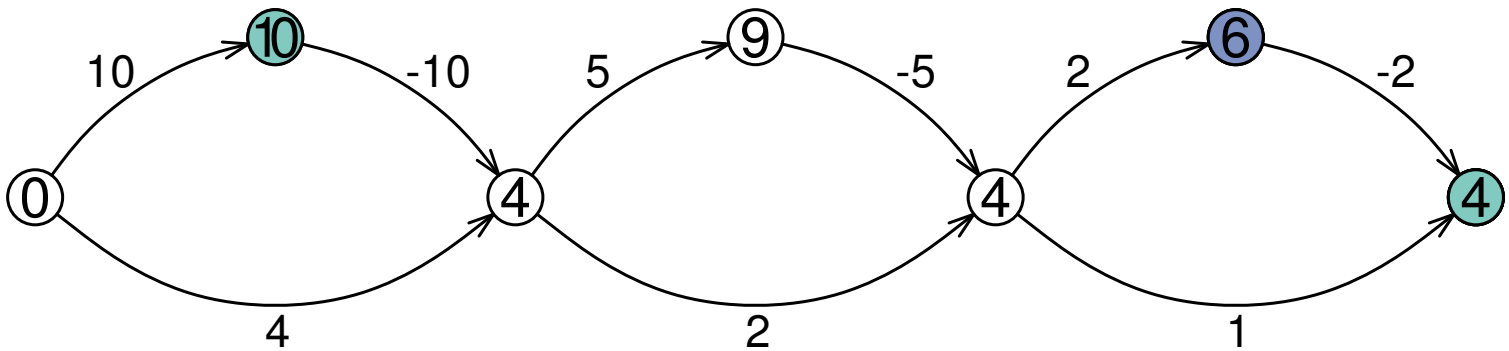


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

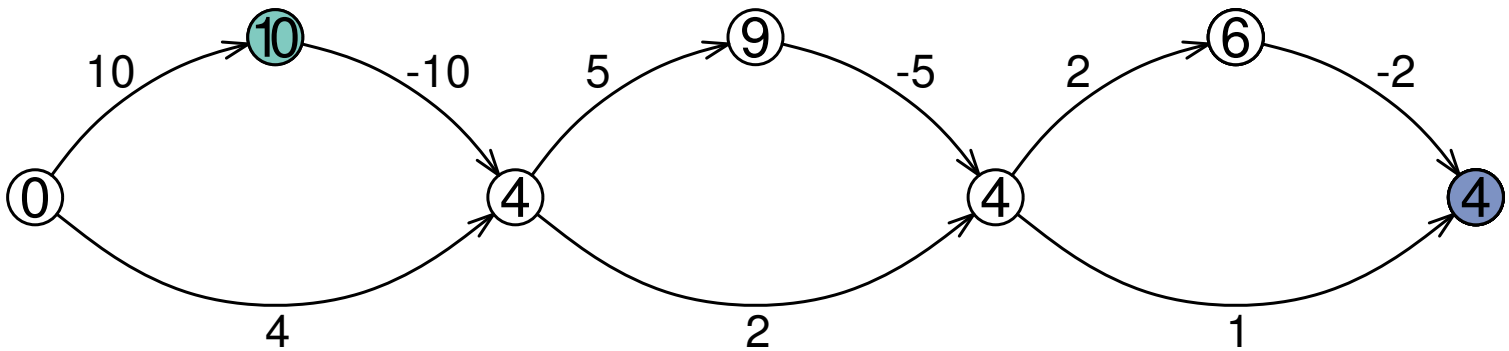


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

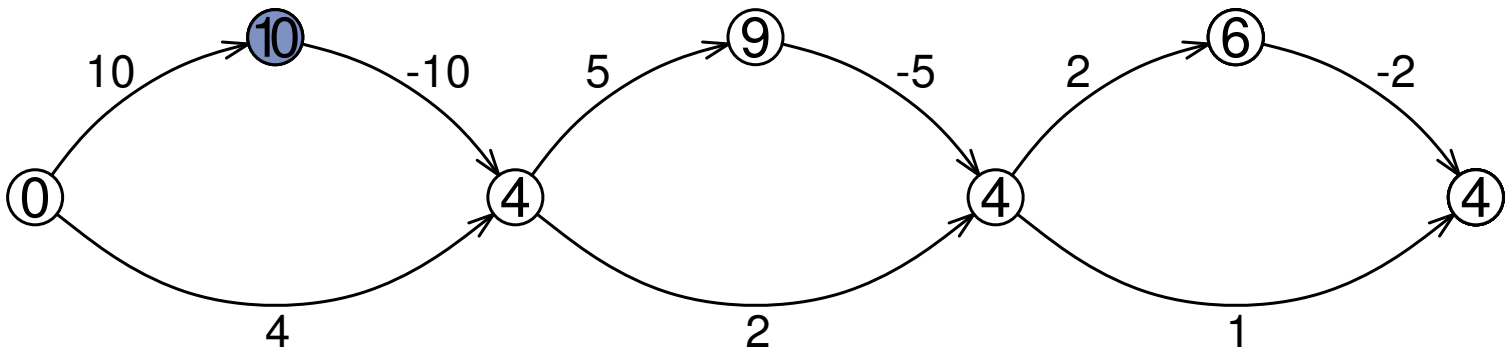


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

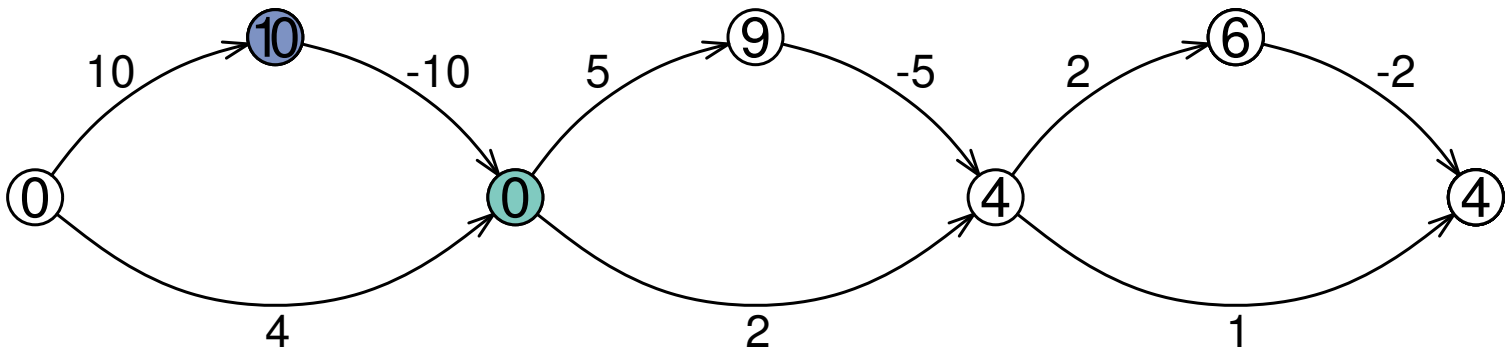


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

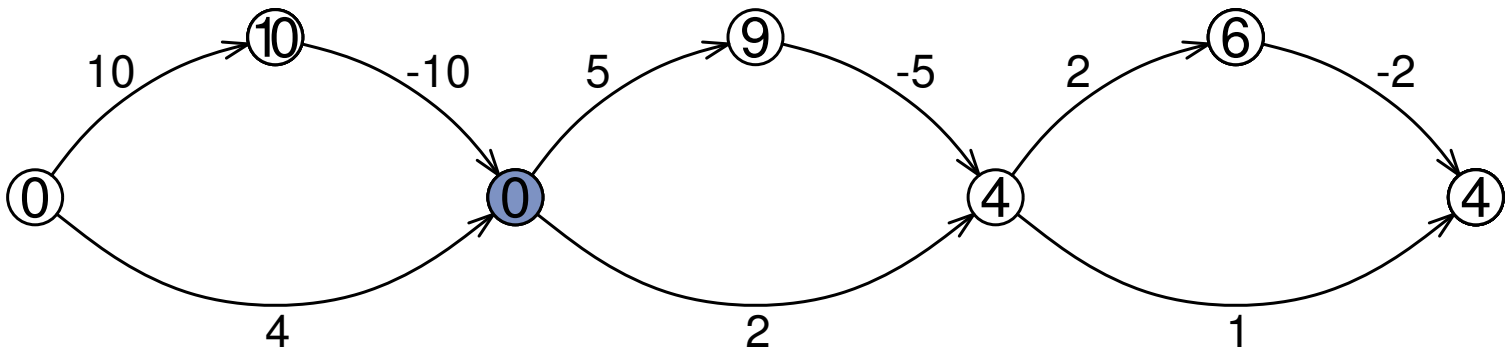


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

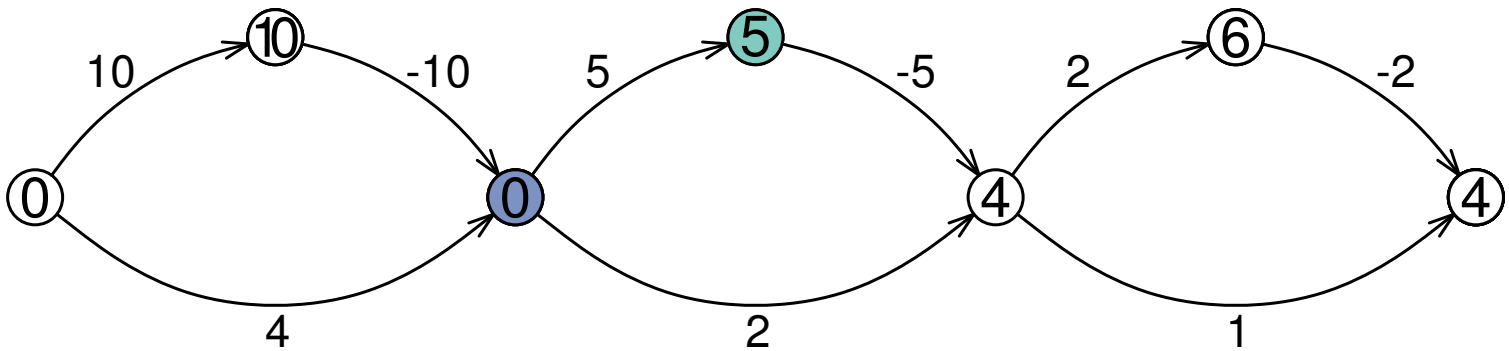


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

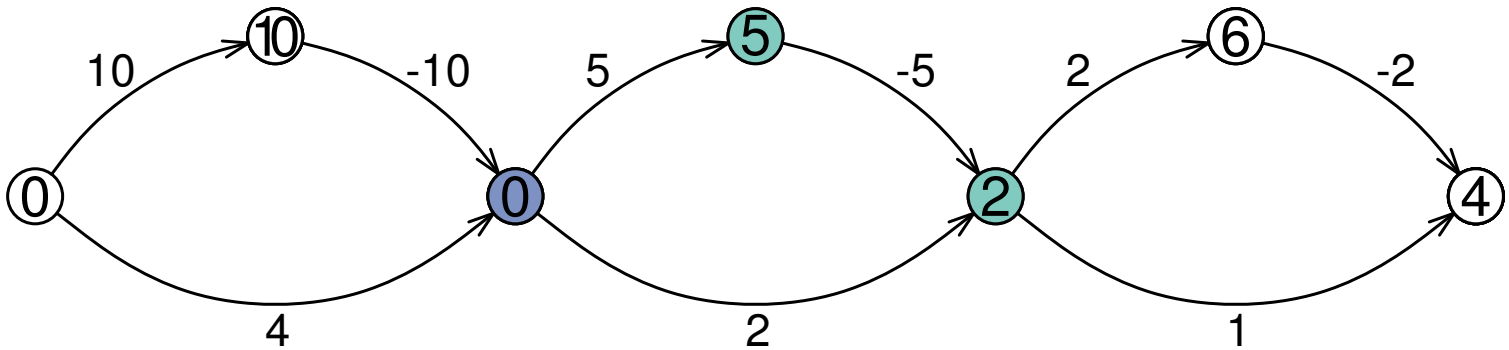


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

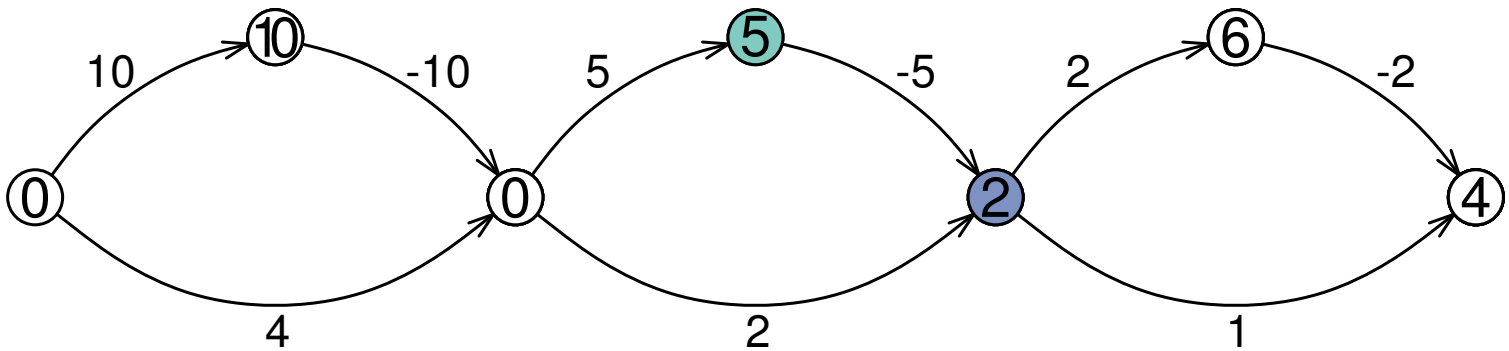


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

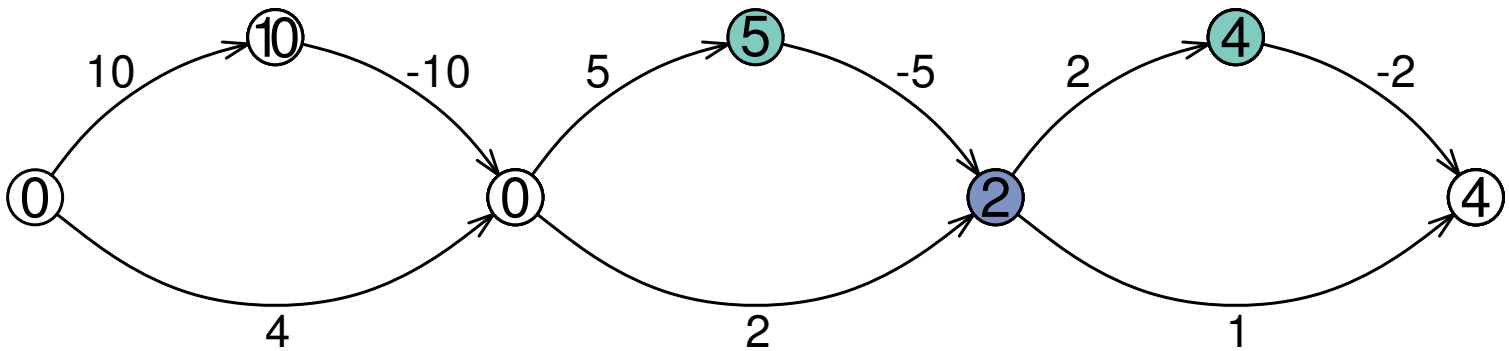


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

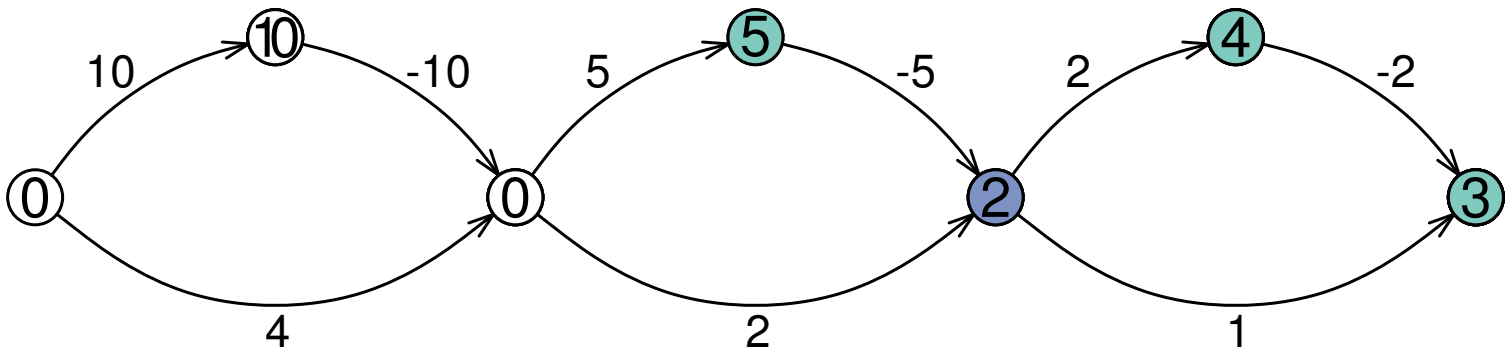


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

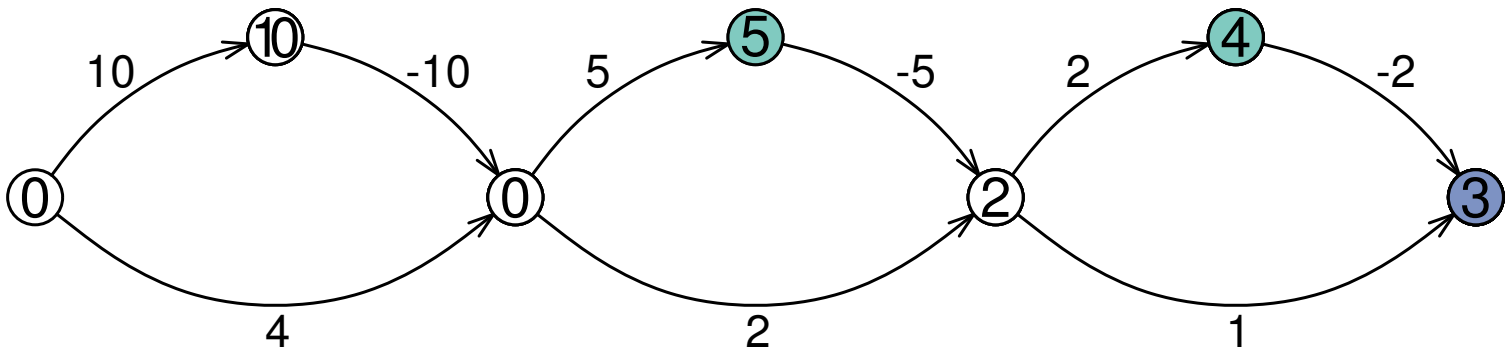


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

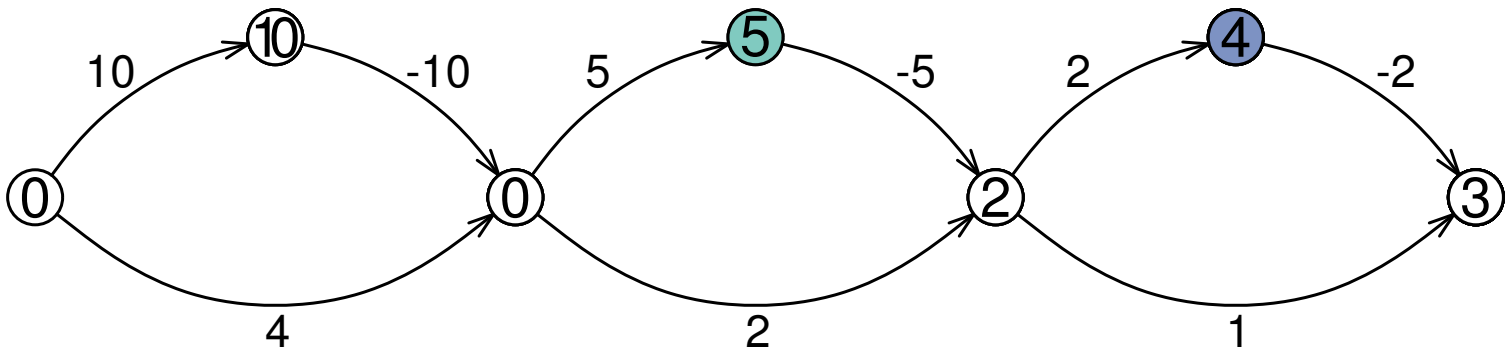


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

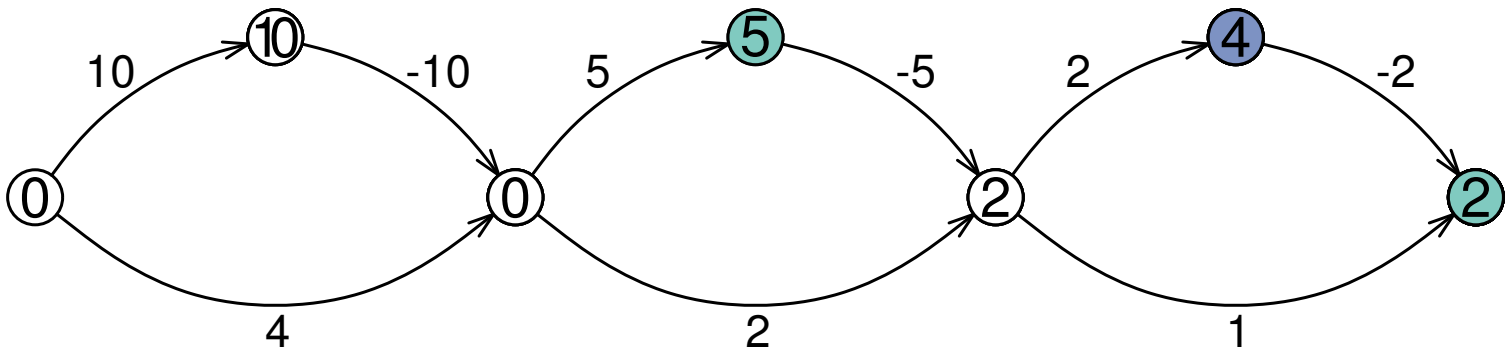


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

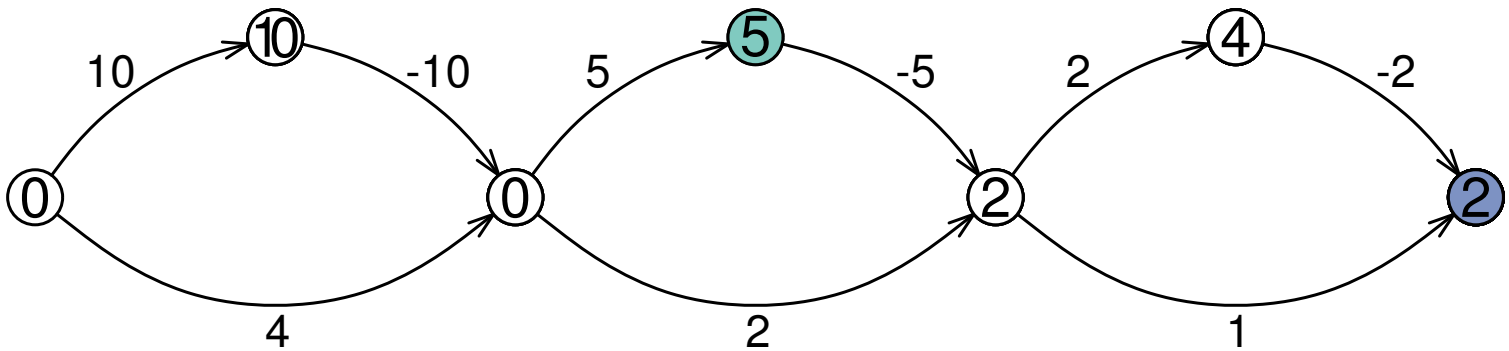


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

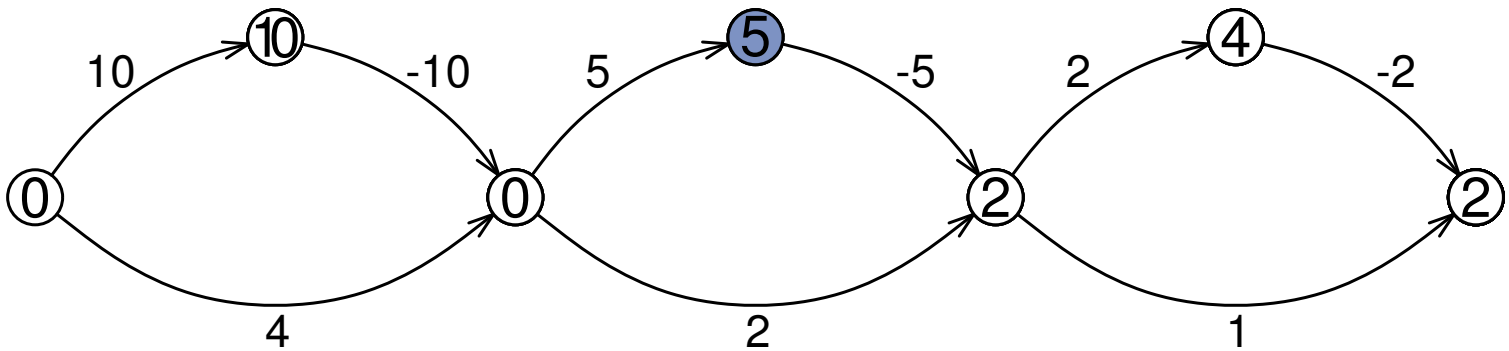


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

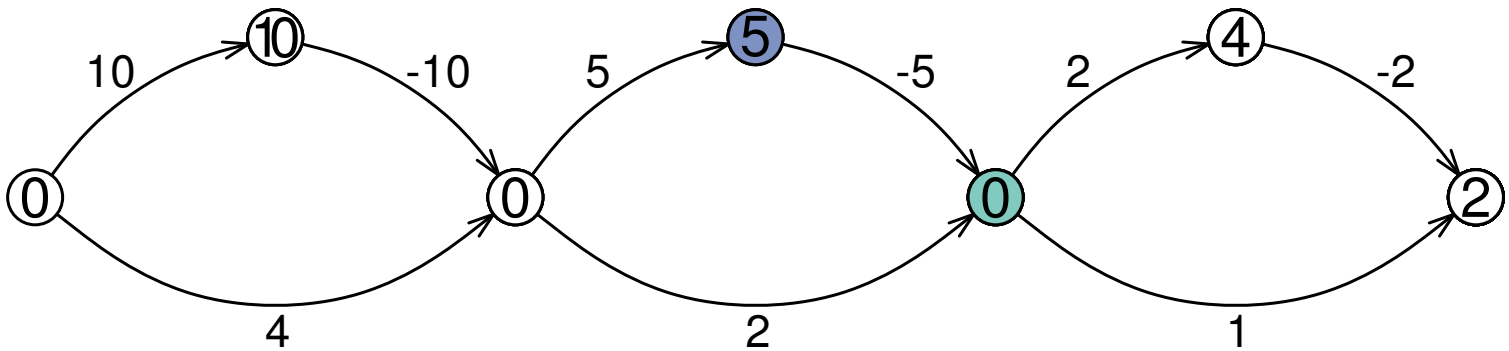


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

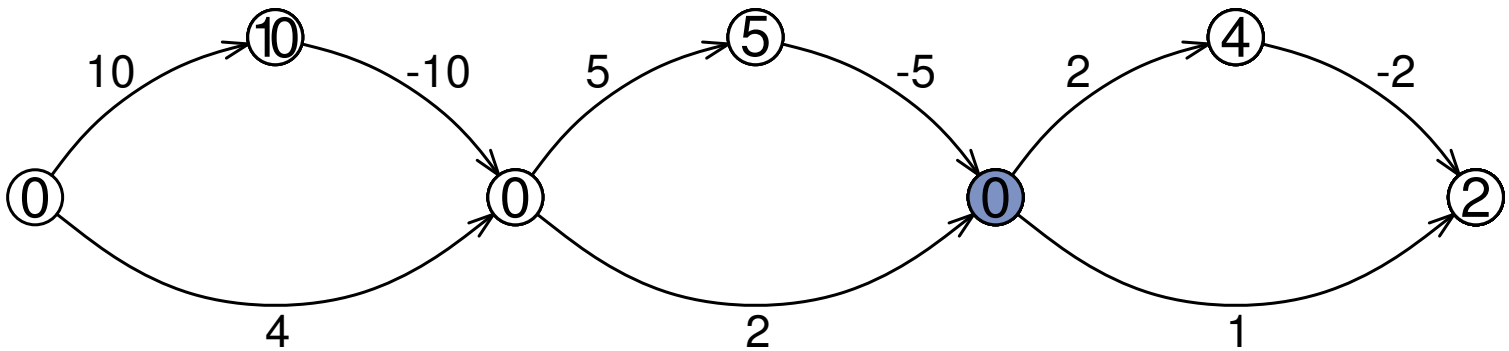


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

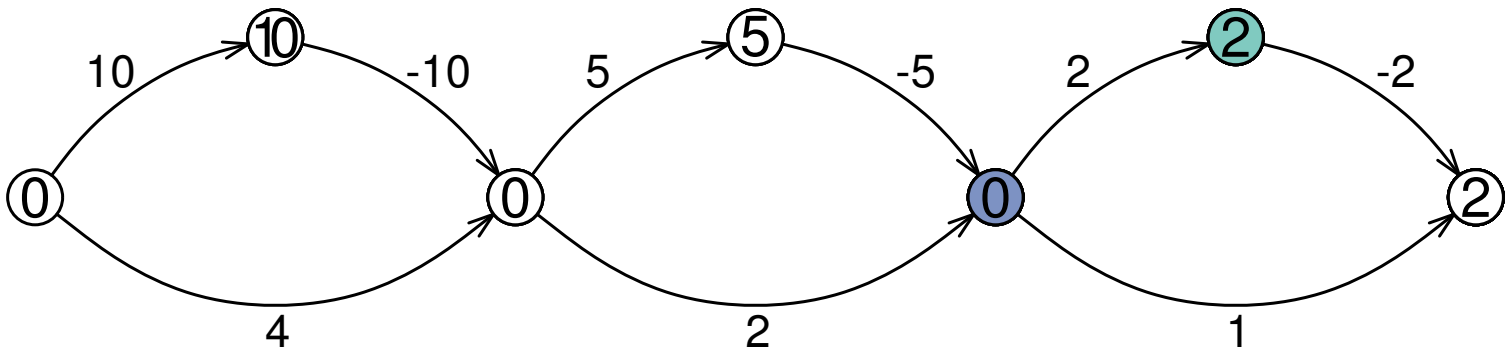


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

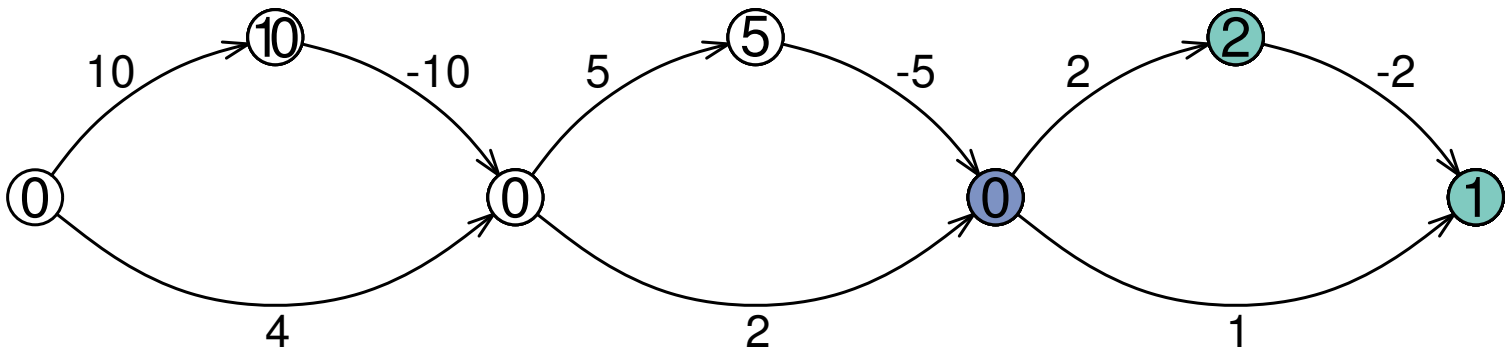


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

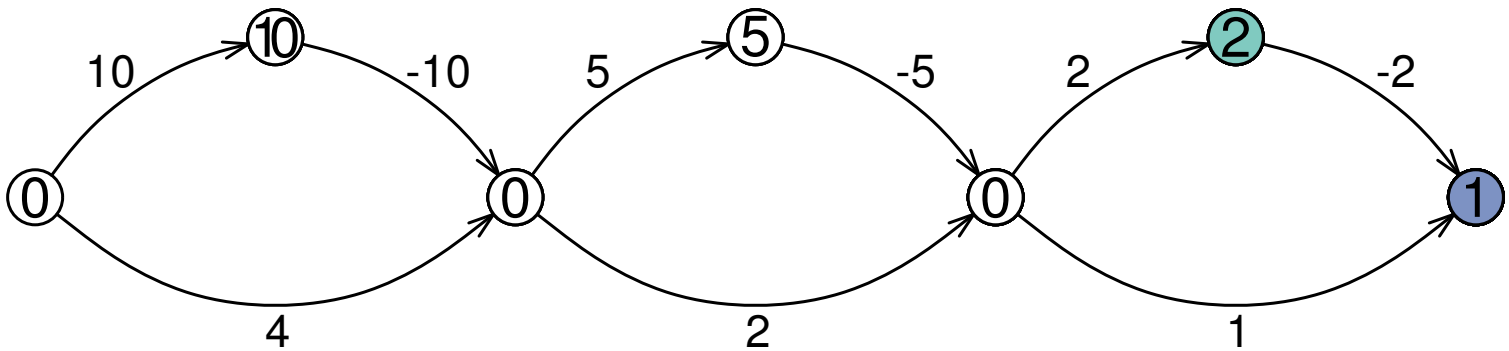


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

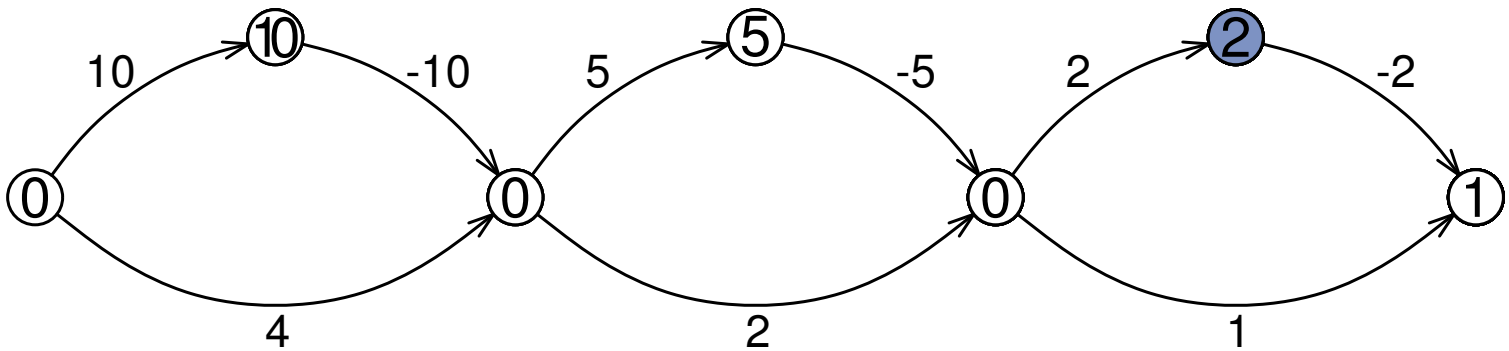


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

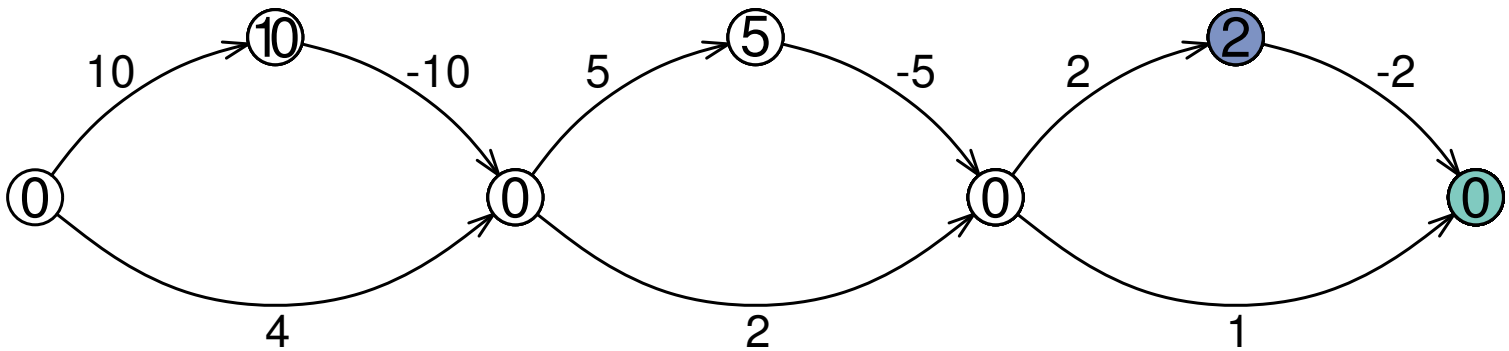


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

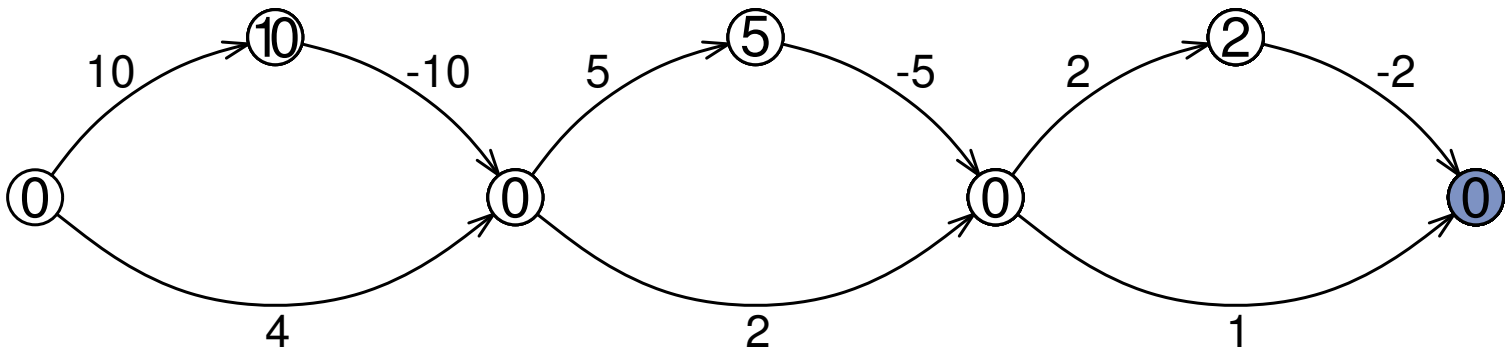


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

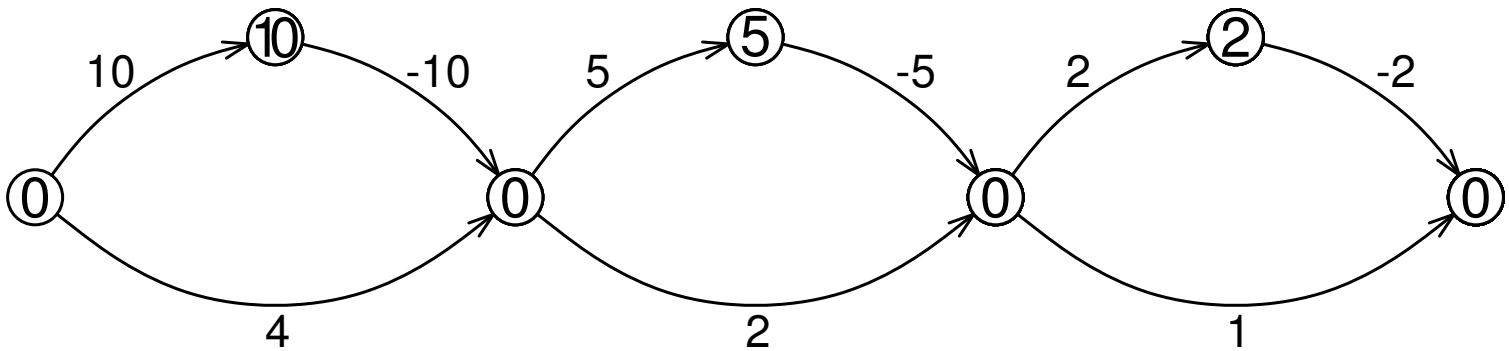


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

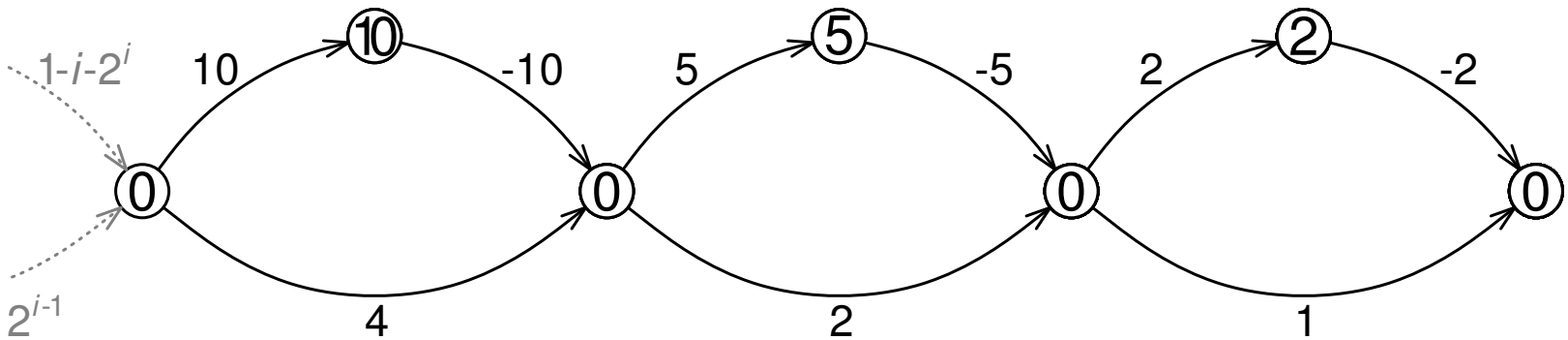


Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr



Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

Bellman-Ford:

- Funktioniert auch mit negativen Kantengewichten

Energieoptimale Routen

Ziel: Gegeben Startknoten s und Zielknoten t,
berechne eine Route, die den Energieverbrauch minimiert

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr

Bellman-Ford:

- Funktioniert auch mit negativen Kantengewichten

Auf Realwelt-Instanzen (wenige Kanten mit neg. Gewicht) ist Dijkstras Algorithmus schneller

Energieoptimale Routen

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr
- Nicht mehr label-setting

$\Rightarrow$ Stoppkriterium nicht mehr korrekt

Frage: Stoppkriterium wiederherstellbar?

Energieoptimale Routen

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr
- Nicht mehr label-setting

$\Rightarrow$ Stoppkriterium nicht mehr korrekt

Frage: Stoppkriterium wiederherstellbar?

- Wenn t abgearbeitet wird, könnten sich noch Knoten in der Queue befinden, die Label $d[t]$ durch Anhängen eines negativen Subpfades verbessern
- Ziel: Berechne Schranke $P_{\text{min}} \leq 0$ für Länge dieses Subpfades
- Dann Abbruch, sobald $\text{minKey}(Q) + P_{\text{min}} \geq d[t]$

Berechnung von $P_{\min}$

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ (ohne negative Zyklen)
Gesucht: (Global) kürzester Pfad in G

1. Ansatz:

- Füge (virtuelle) Knoten s', t' zu G hinzu
- Mit Kanten (s', u), (u, t') für alle $u \in V$ (mit Energieverbrauch 0)
- Berechne kürzesten s'-t'-Weg (mit Label-Correcting Dijkstra)

Berechnung von P_{min}

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ (ohne negative Zyklen)
Gesucht: (Global) kürzester Pfad in G

2. Ansatz (simuliert 1. Ansatz, ist in der Praxis schneller):

- Initialisiere Distanzlabel $\underline{d}[v] = 0$ für alle $v \in V$
- Für jeden Knoten $v \in V$:
  - Starte (Label-Correcting) Suche von v
  - Distanzlabel $\underline{d}[\cdot]$ wird zwischen den Suchen *nicht* reinitialisiert
- Berechne währenddessen: $P_{\text{min}} := \min_{v \in V} \underline{d}[v]$

Berechnung von P_{min}

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ (ohne negative Zyklen)
Gesucht: (Global) kürzester Pfad in G

2. Ansatz (simuliert 1. Ansatz, ist in der Praxis schneller):

- Initialisiere Distanzlabel $\underline{d}[v] = 0$ für alle $v \in V$
- Für jeden Knoten $v \in V$:
  - Starte (Label-Correcting) Suche von v
  - Distanzlabel $\underline{d}[\cdot]$ wird zwischen den Suchen *nicht* reinitialisiert
- Berechne währenddessen: $P_{\text{min}} := \min_{v \in V} \underline{d}[v]$

Danach Stoppkriterium wieder anwendbar

Berechnung von $P_{\min}$

Gegeben: Graph $G = (V, E)$ (ohne negative Zyklen)
Gesucht: (Global) kürzester Pfad in G

2. Ansatz (simuliert 1. Ansatz, ist in der Praxis schneller):

- Initialisiere Distanzlabel $\underline{d}[v] = 0$ für alle $v \in V$
- Für jeden Knoten $v \in V$:
  - Starte (Label-Correcting) Suche von v
  - Distanzlabel $\underline{d}[\cdot]$ wird zwischen den Suchen *nicht* reinitialisiert
- Berechne währenddessen: $P_{\min} := \min_{v \in V} \underline{d}[v]$

Danach Stoppkriterium wieder anwendbar

Beobachtung: Nach Berechnung von $P_{\min}$ gilt: $\underline{d}[t] \leq \text{dist}(v, t), \ \forall v \in V$

$\Rightarrow$ Stoppkriterium lässt sich verbessern zu: $\text{minKey}(Q) + \underline{d}[t] \geq d[t]$

Energieoptimale Routen

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Stoppkriterium lässt sich wiederherstellen
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr
- Nicht mehr label-setting

Frage: Label-Setting-Eigenschaft wiederherstellbar?

Energieoptimale Routen

Dijkstras Algorithmus:

- Setzt nichtnegative Kantengewichte voraus
- Stoppkriterium lässt sich wiederherstellen
- Bleibt korrekt, aber keine polynomielle Laufzeitgarantie mehr
- Nicht mehr label-setting

Frage: Label-Setting-Eigenschaft wiederherstellbar?

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi\colon V \to \mathbb{R}$, sodass
$\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Knotenpotentiale

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi\colon V \to \mathbb{R}$, sodass
$\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Dann Dijkstras Algorihmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

1. Distanzbasiertes Potential:

- Setze $\pi(v) := -d(v^*, v)$, für beliebigen Knoten v^*
- Berechnung mittels (Label-Correcting) Query von v^*
- Zulässigkeit folgt aus Dreiecksungleichung

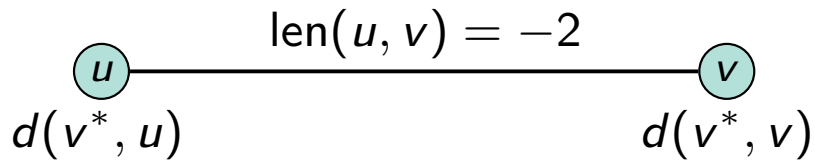
Knotenpotentiale

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi\colon V \to \mathbb{R}$, sodass
$\text{len}(u,v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u,v) \in E$

Dann Dijkstras Algorihmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

1. Distanzbasiertes Potential:

- Setze $\pi(v) := -d(v^*, v)$, für beliebigen Knoten v^*
- Berechnung mittels (Label-Correcting) Query von v^*
- Zulässigkeit folgt aus Dreiecksungleichung



$$\text{len}'(u,v) := -2 + d(v^*, u) - d(v^*, v)$$

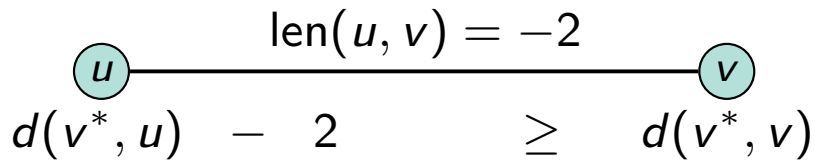
Knotenpotentiale

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi\colon V \to \mathbb{R}$, sodass
$\text{len}(u,v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u,v) \in E$

Dann Dijkstras Algorihmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

1. Distanzbasiertes Potential:

- Setze $\pi(v) := -d(v^*, v)$, für beliebigen Knoten v^*
- Berechnung mittels (Label-Correcting) Query von v^*
- Zulässigkeit folgt aus Dreiecksungleichung



$$\text{len}'(u,v) := -2 + d(v^*, u) - d(v^*, v)$$

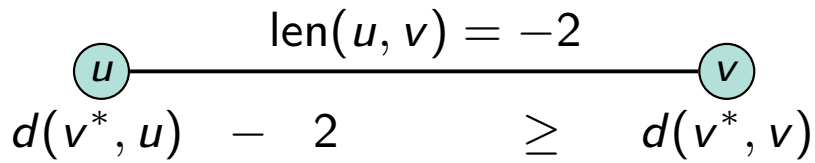
Knotenpotentiale

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi\colon V \to \mathbb{R}$, sodass
$\text{len}(u,v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u,v) \in E$

Dann Dijkstras Algorihmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

1. Distanzbasiertes Potential:

- Setze $\pi(v) := -d(v^*, v)$, für beliebigen Knoten v^*
- Berechnung mittels (Label-Correcting) Query von v^*
- Zulässigkeit folgt aus Dreiecksungleichung



$$\begin{aligned}\text{len}'(u,v) &:= -2 + d(v^*,u) - d(v^*,v) \\ &\geq -2 + d(v^*,v) + 2 - d(v^*,v)\end{aligned}$$

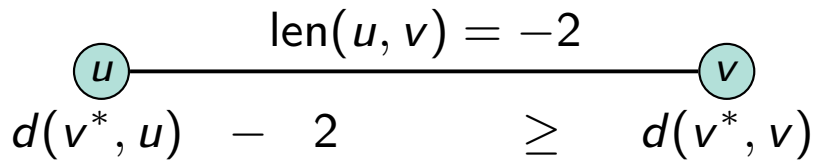
Knotenpotentiale

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi\colon V \to \mathbb{R}$, sodass
$\text{len}(u,v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u,v) \in E$

Dann Dijkstras Algorihmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

1. Distanzbasiertes Potential:

- Setze $\pi(v) := -d(v^*, v)$, für beliebigen Knoten v^*
- Berechnung mittels (Label-Correcting) Query von v^*
- Zulässigkeit folgt aus Dreiecksungleichung



$$\begin{aligned}\text{len}'(u,v) &:= -2 + d(v^*,u) - d(v^*,v) \\ &\geq \cancel{-2} + \cancel{d(v^*,v)} + \cancel{2} - \cancel{d(v^*,v)} = 0\end{aligned}$$

Knotenpotentiale

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi\colon V \to \mathbb{R}$, sodass
$\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Dann Dijkstras Algorihmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

2. P_{min}-basiertes Potential:

- Setze $\pi(v) = -\underline{d}[v]$ für alle v
- Berechnung wie vorher beschrieben
- Zulässigkeit folgt wieder aus Dreiecksungleichung:

$$\underline{d}[u] + \text{len}(u, v) \geq \underline{d}[v]$$

Knotenpotentiale

Idee: Finde zulässiges Potential $\pi\colon V \to \mathbb{R}$, sodass
$\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$ für jede Kante $(u, v) \in E$

Dann Dijkstras Algorihmus (mit Stoppkriterium) auf Graph mit reduzierten Gewichten anwendbar

3. Höheninduziertes Potential:

- Annahme: Höhenkoordinate $h(v)$ für jeden Knoten gegeben
- $\pi(v) := \alpha \cdot h(v)$ für alle v
- Wähle α so, dass $\alpha(h(u) - h(v)) \leq \text{len}(u, v)$ für alle $(u, v) \in E$
- Keine Garantie, dass das erfüllbar ist
  (klappt für realistische Kantengewichte)
- α kann mit Sweep über alle Kanten berechnet werden

Energieoptimale Routen

Bisher:

- Route minimiert den absoluten Energieverbrauch
- Route ist für konkreten Ladezustand an s ggf. nicht realisierbar

Jetzt:

- Berechne Route abhängig vom initialen Ladezustand (SoC)
- Maximiere resultierenden SoC an t
- Betrachte nur Pfade, die *zulässig* sind:
  - Energie ist ausreichend: SoC wird nie negativ
  - Akku wird nie überschritten: $\text{SoC} > M \quad \rightarrow \quad \text{SoC} = M$
    ($M :=$ Akku-Kapazität)

Battery Constraints

Akku hat begrenzte Kapazität

- Akku darf nicht leer laufen (andernfalls Kante nicht benutzbar)
- Kapazität kann nicht überschritten werden (Energie verfällt ggf.)
- Muss für jeden Knoten eines Pfades gelten

$\Rightarrow$ Ladestand (state of charge, SoC) in der Suche berücksichtigen

Fahrzeug hat aktuellen SoC b

$\Rightarrow$ Befahren von Kante e mit Gewicht $\text{len}(e)$ ergibt SoC $b - \text{len}(e)$

Ausnahmen:

- Falls $b - \text{len}(e)$ unterhalb Grenzwert $\Rightarrow$ Kante nicht befahrbar
- Falls $b - \text{len}(e)$ oberhalb Kapazität $\Rightarrow$ SoC ist 100%

Battery Constraints

Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls Akkustand $<$ Kantengewicht
- Akkustand kann das Maximum M nicht überschreiten

$\Rightarrow$ Explizites Überprüfen der Battery Constraints im Algorithmus

Battery Constraints

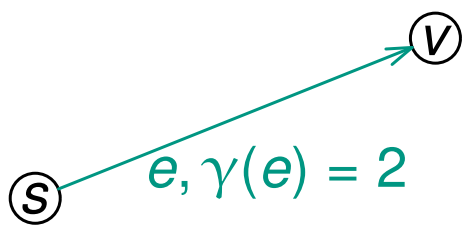
Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

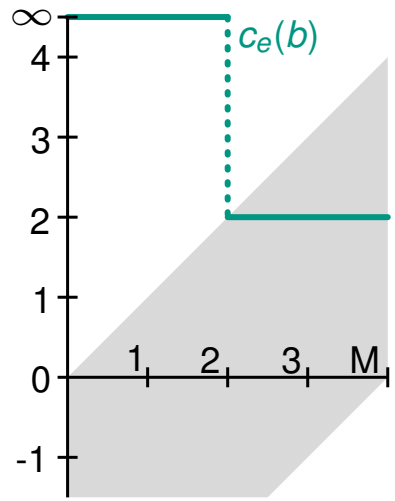
- Kante kann nicht benutzt werden, falls Akkustand $<$ Kantengewicht
- Akkustand kann das Maximum M nicht überschreiten

$\Rightarrow$ Explizites Überprüfen der Battery Constraints im Algorithmus

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als Verbrauchsfunktion
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab





Battery Constraints

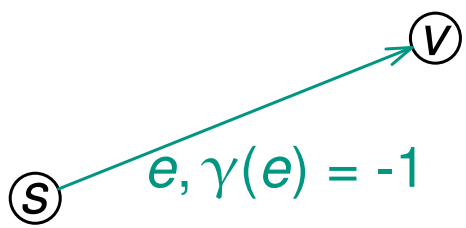
Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

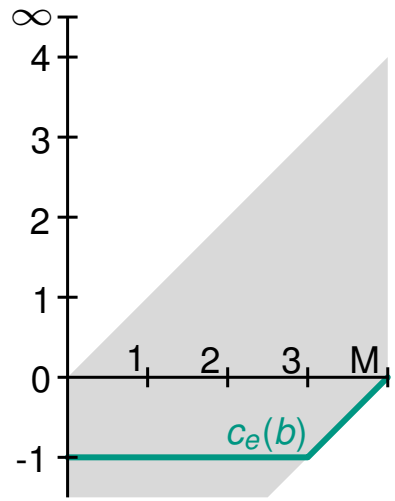
- Kante kann nicht benutzt werden, falls Akkustand $<$ Kantengewicht
- Akkustand kann das Maximum M nicht überschreiten

$\Rightarrow$ Explizites Überprüfen der Battery Constraints im Algorithmus

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als Verbrauchsfunktion
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab





Battery Constraints

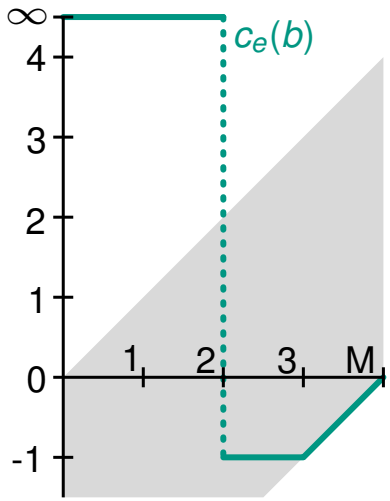
Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

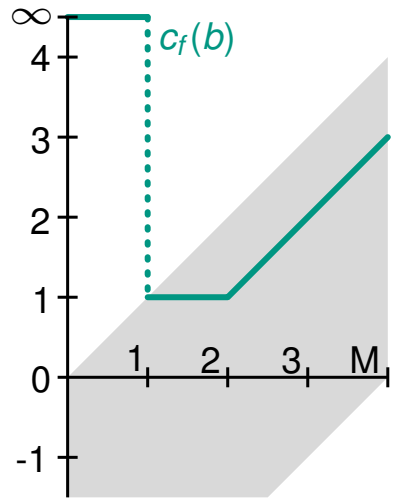
- Kante kann nicht benutzt werden, falls Akkustand $<$ Kantengewicht
- Akkustand kann das Maximum M nicht überschreiten

$\Rightarrow$ Explizites Überprüfen der Battery Constraints im Algorithmus

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als Verbrauchsfunktion
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab





Battery Constraints

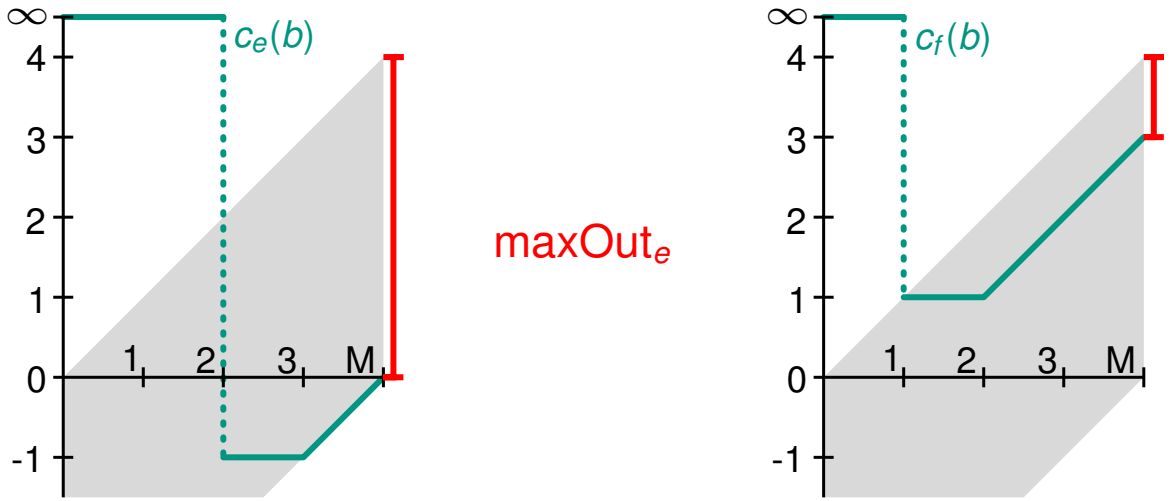
Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls Akkustand $<$ Kantengewicht
- Akkustand kann das Maximum M nicht überschreiten

$\Rightarrow$ Explizites Überprüfen der Battery Constraints im Algorithmus

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als Verbrauchsfunktion
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab



Battery Constraints

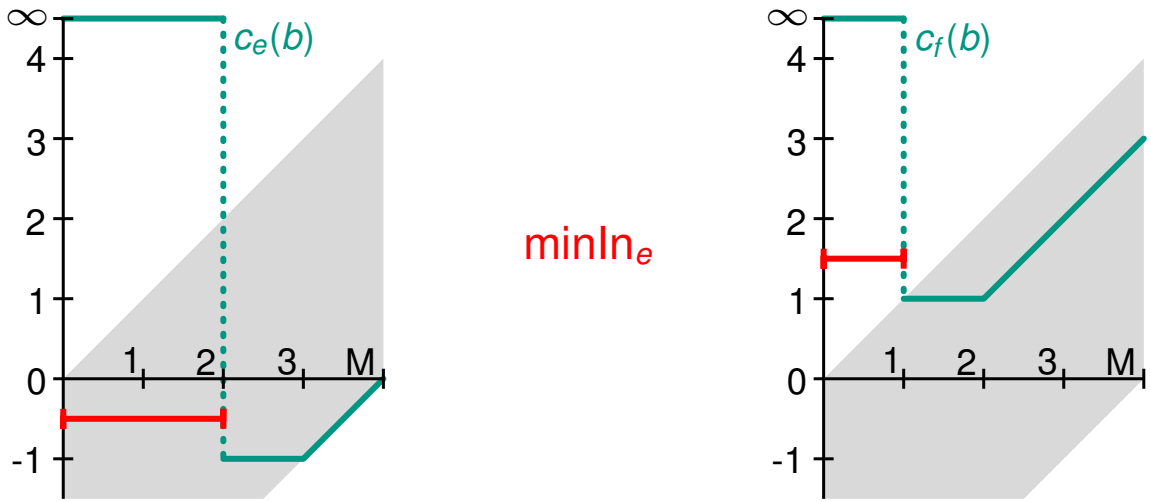
Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls Akkustand $<$ Kantengewicht
- Akkustand kann das Maximum M nicht überschreiten

$\Rightarrow$ Explizites Überprüfen der Battery Constraints im Algorithmus

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als Verbrauchsfunktion
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab



Battery Constraints

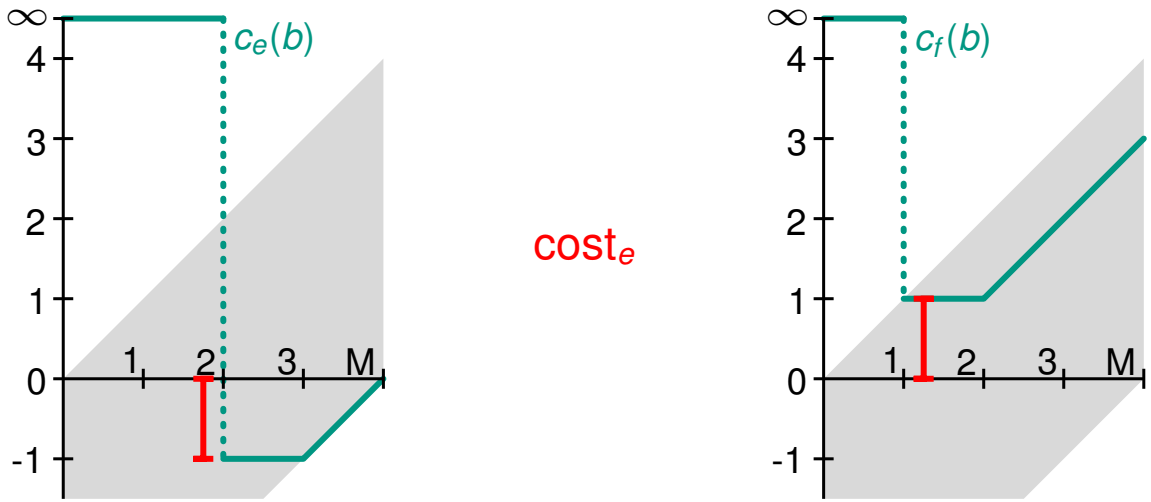
Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

- Kante kann nicht benutzt werden, falls Akkustand $<$ Kantengewicht
- Akkustand kann das Maximum M nicht überschreiten

$\Rightarrow$ Explizites Überprüfen der Battery Constraints im Algorithmus

Alternative 1:

- Modelliere Gewicht einer Kante als Verbrauchsfunktion
- Verbrauchsfunktion bildet SoC auf tatsächlichen Verbrauch ab



Battery Constraints

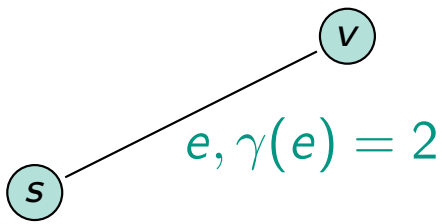
Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

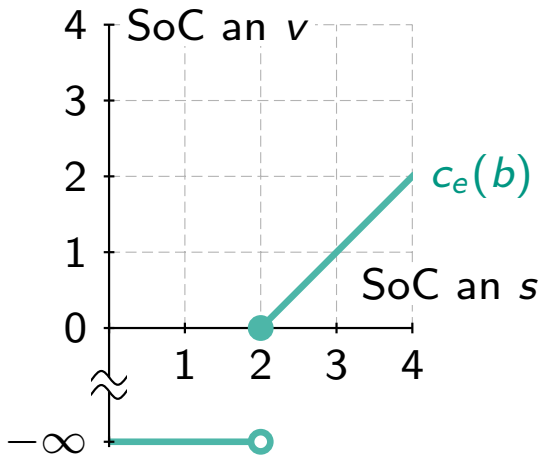
- Kante kann nicht benutzt werden, falls Akkustand $<$ Kantengewicht
- Akkustand kann das Maximum M nicht überschreiten

$\Rightarrow$ Explizites Überprüfen der Battery Constraints im Algorithmus

Alternative 2:

- Modelliere Gewicht einer Kante als SoC-Funktion
- SoC-Funktion bildet SoC vor der Kante auf SoC nach der Kante ab





Battery Constraints

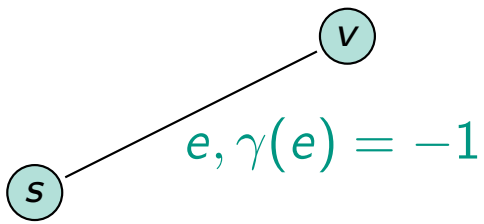
Konstanter Energieverbrauch pro Kante, aber:

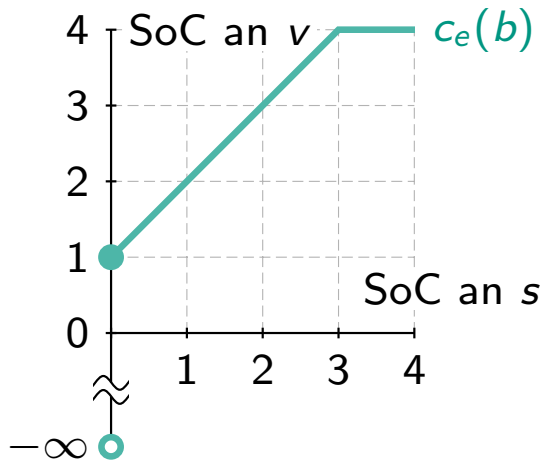
- Kante kann nicht benutzt werden, falls Akkustand $<$ Kantengewicht
- Akkustand kann das Maximum M nicht überschreiten

$\Rightarrow$ Explizites Überprüfen der Battery Constraints im Algorithmus

Alternative 2:

- Modelliere Gewicht einer Kante als SoC-Funktion
- SoC-Funktion bildet SoC vor der Kante auf SoC nach der Kante ab





Energieoptimale Routen

Anfragetypen:

SoC-Query: Gegeben Start s, Ziel t und initialen Ladezustand b_s, finde zulässigen s-t-Pfad mit maximalem SoC an t

Berechnung mit angepasstem Dijkstra

Energieoptimale Routen

Anfragetypen:

SoC-Query: Gegeben Start s, Ziel t und initialen Ladezustand b_s, finde zulässigen s-t-Pfad mit maximalem SoC an t

Berechnung mit angepasstem Dijkstra

Profilsuche: Gegeben Start s und Ziel t, finde zulässige s-t-Pfade mit maximalem SoC an t für *alle* $b_s \in [0, M]$

Berechnung mit Hilfe von:

- SoC-Funktionen
- Geeigneten Link/Merge-Operationen

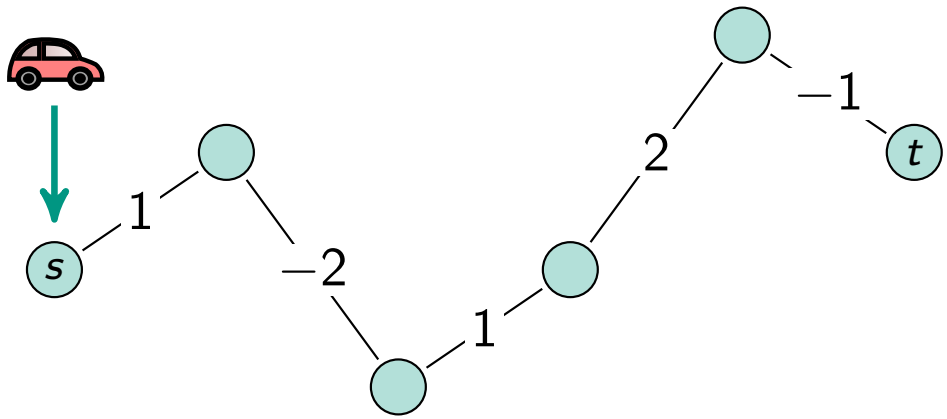
SoC-Profile

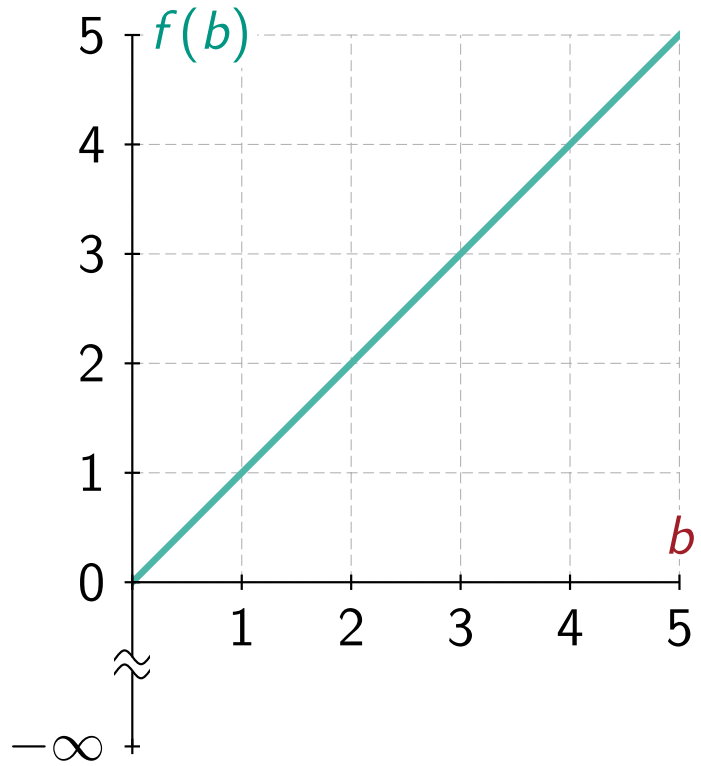
SoC-Profil

Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

Beispiel: $M = 5$



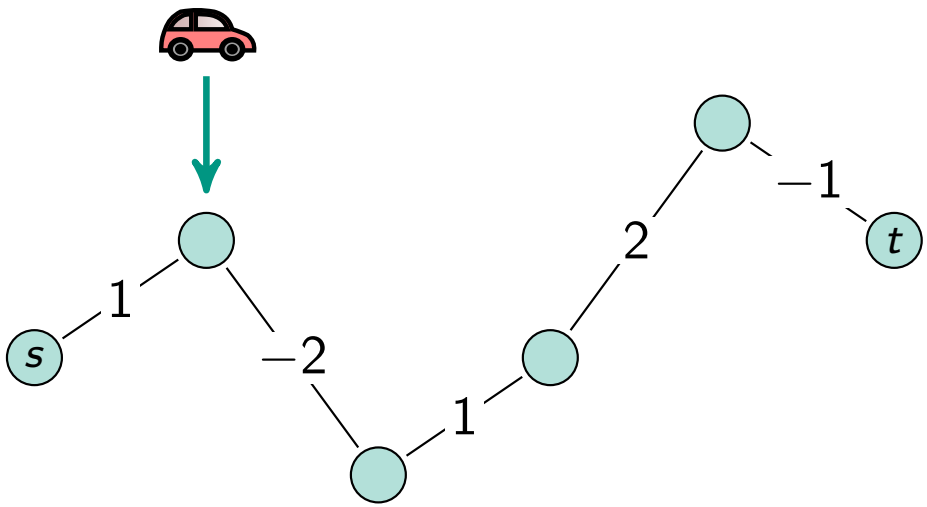


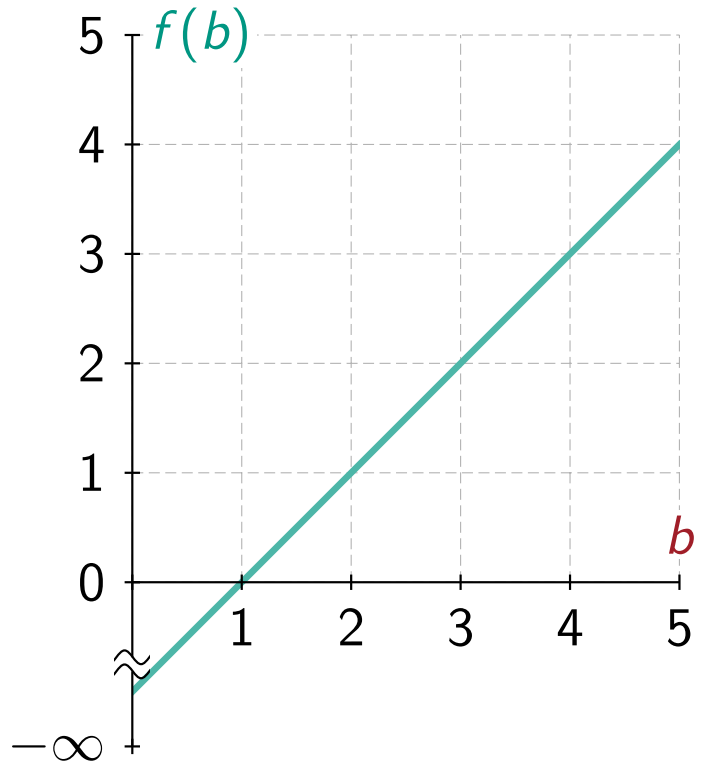
SoC-Profil

Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

Beispiel: $M = 5$



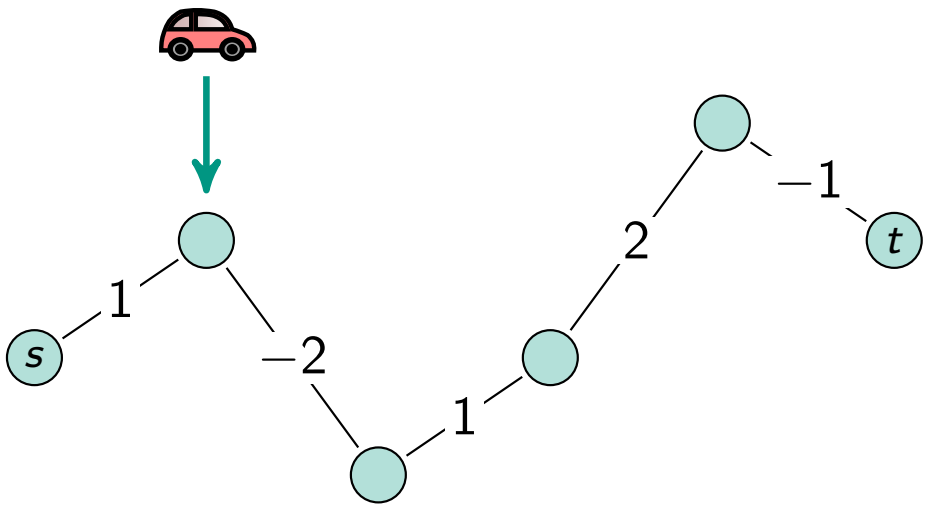


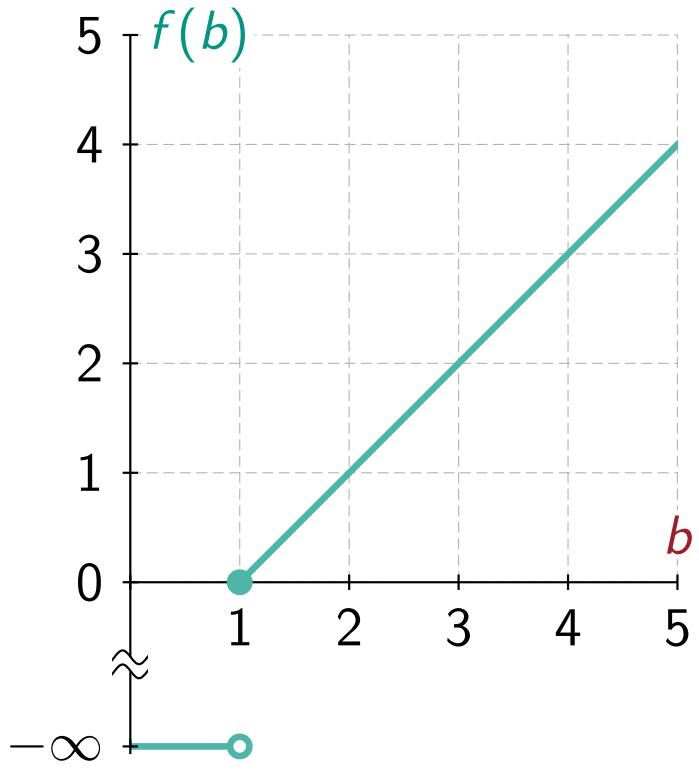
SoC-Profil

Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

Beispiel: $M = 5$



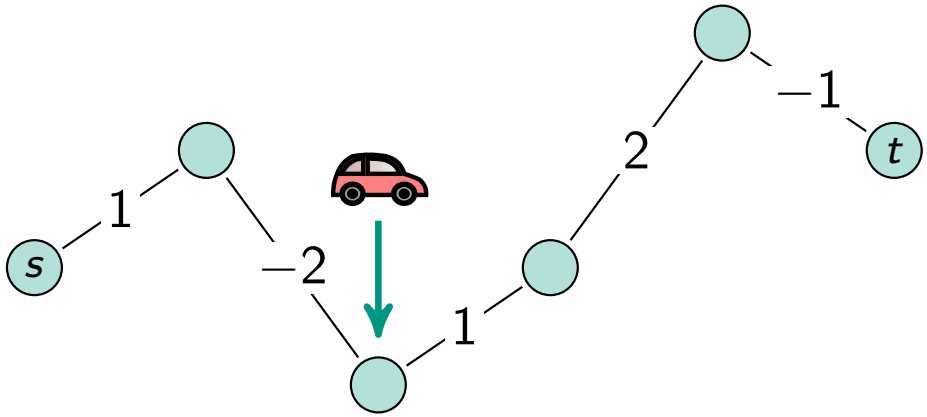


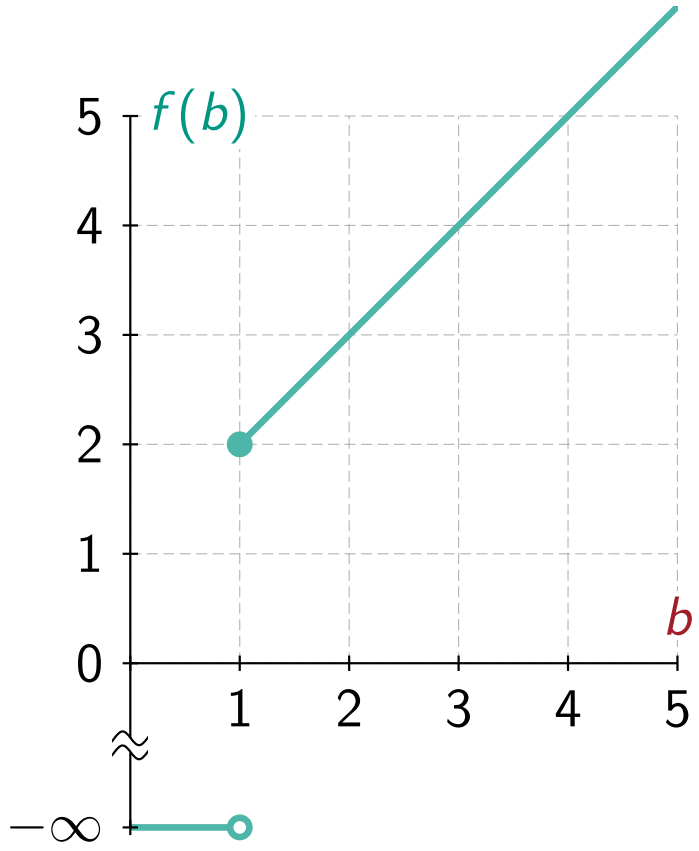
SoC-Profil

Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

Beispiel: $M = 5$



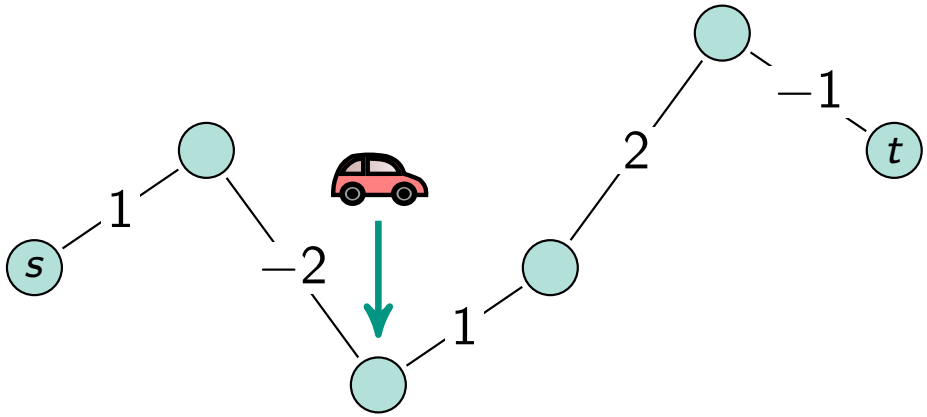


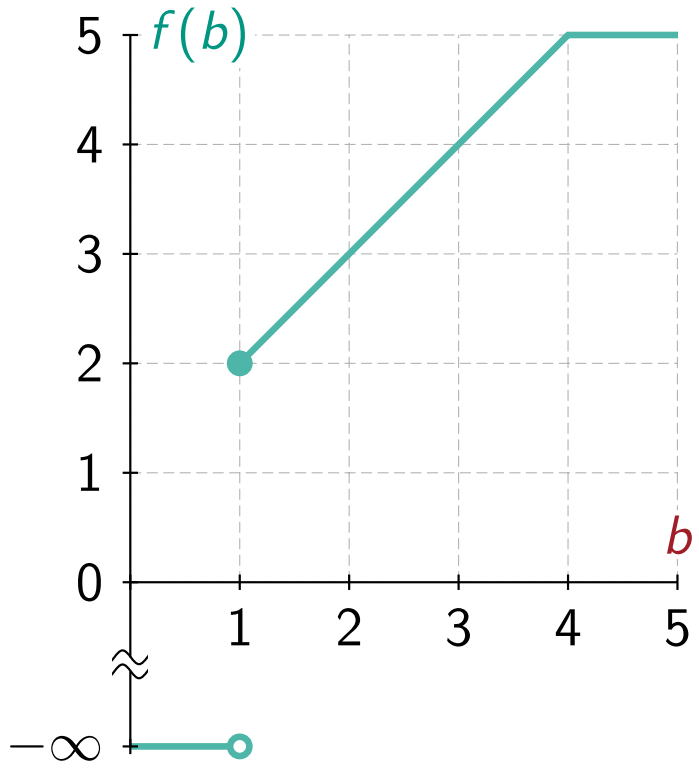
SoC-Profil

Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

Beispiel: $M = 5$



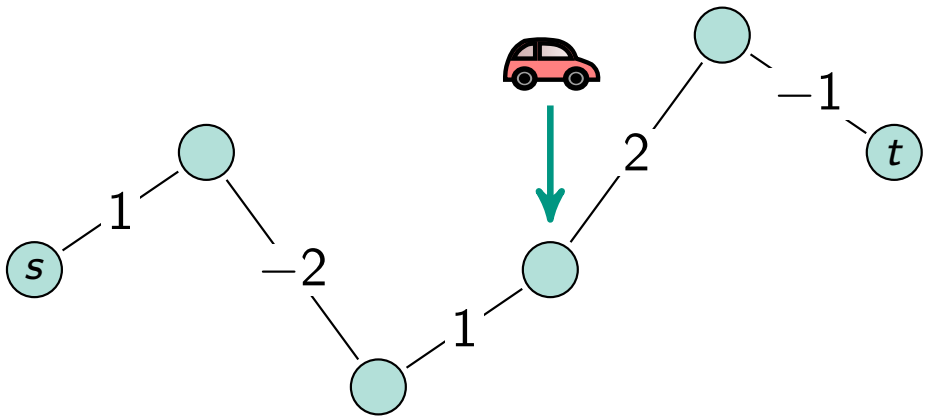


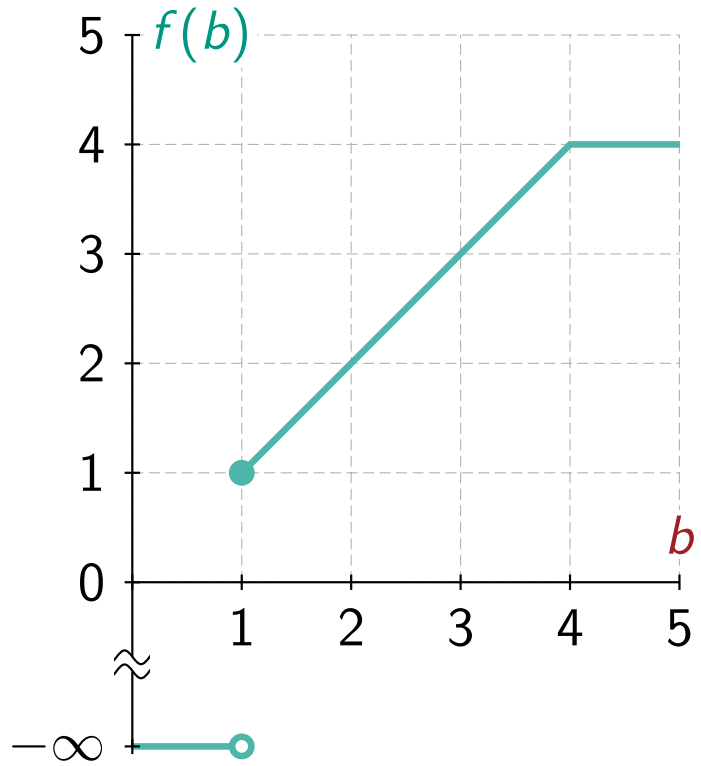
SoC-Profil

Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

Beispiel: $M = 5$



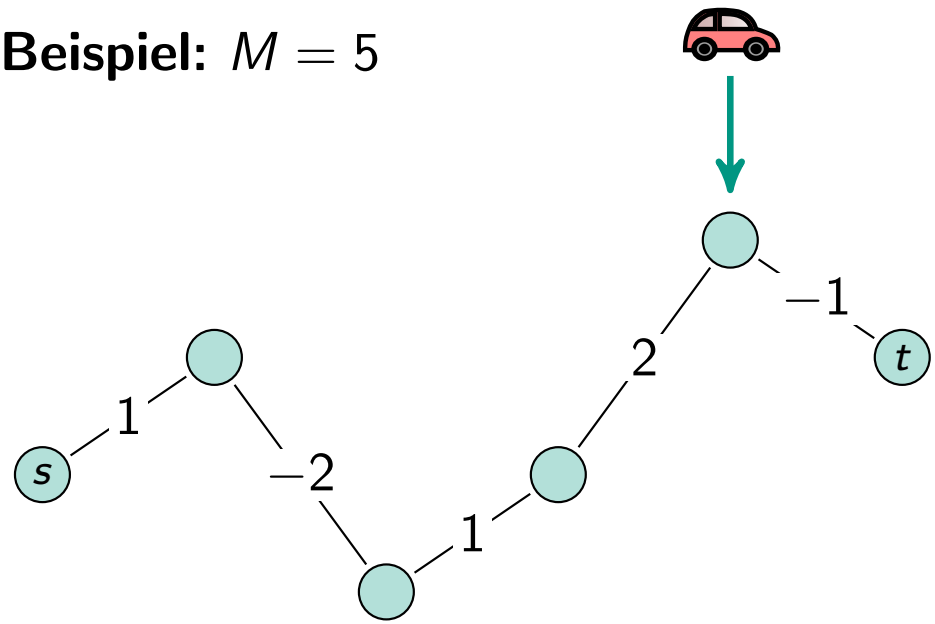


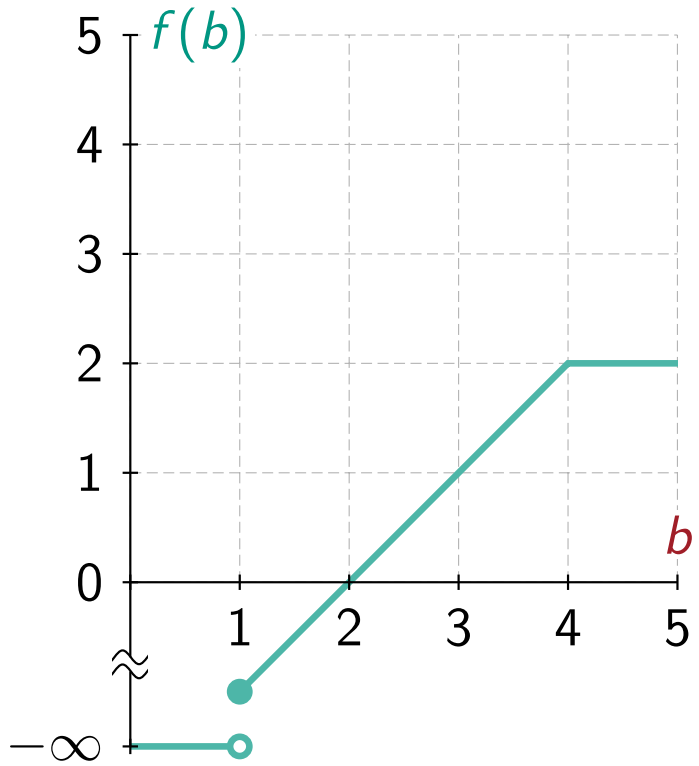
SoC-Profil

Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

Beispiel: $M = 5$



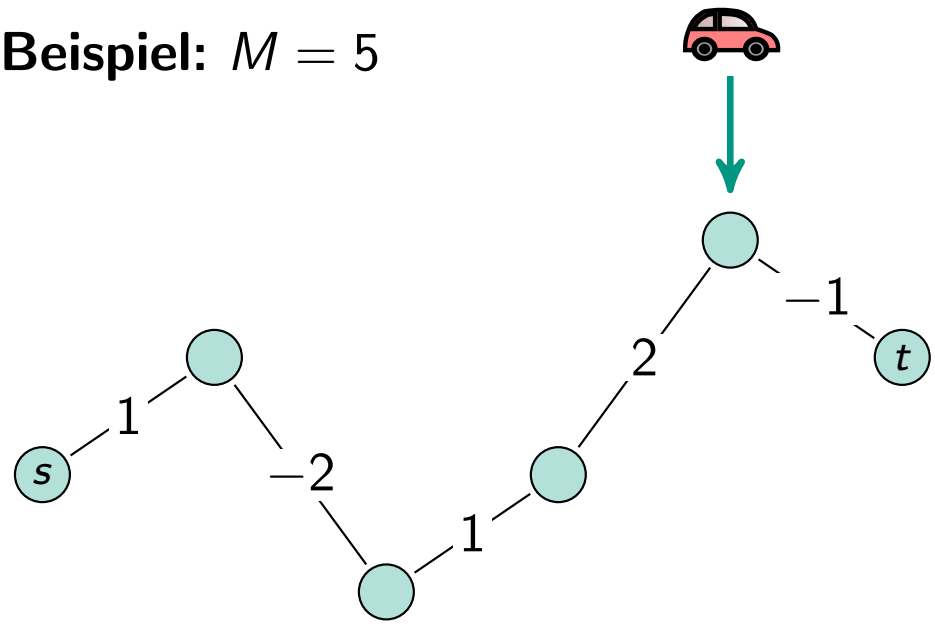


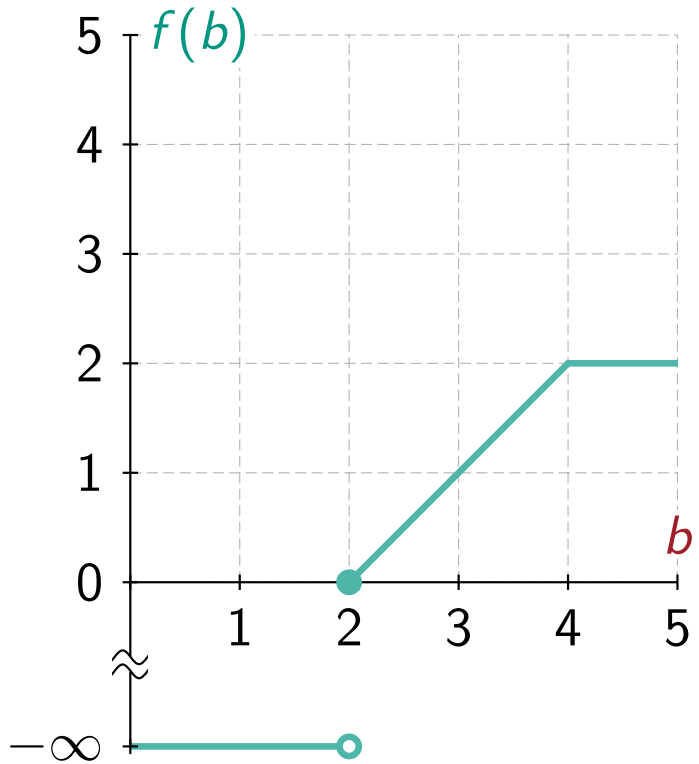
SoC-Profil

Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

Beispiel: $M = 5$



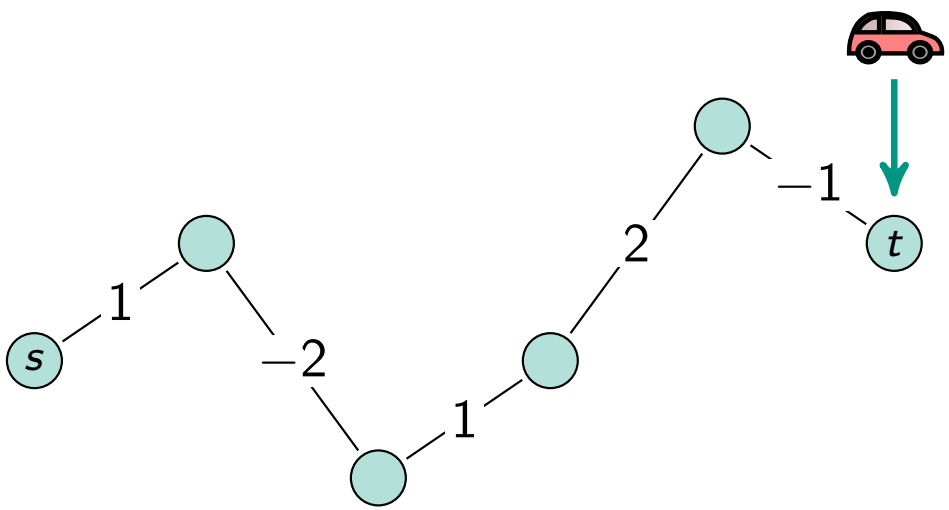


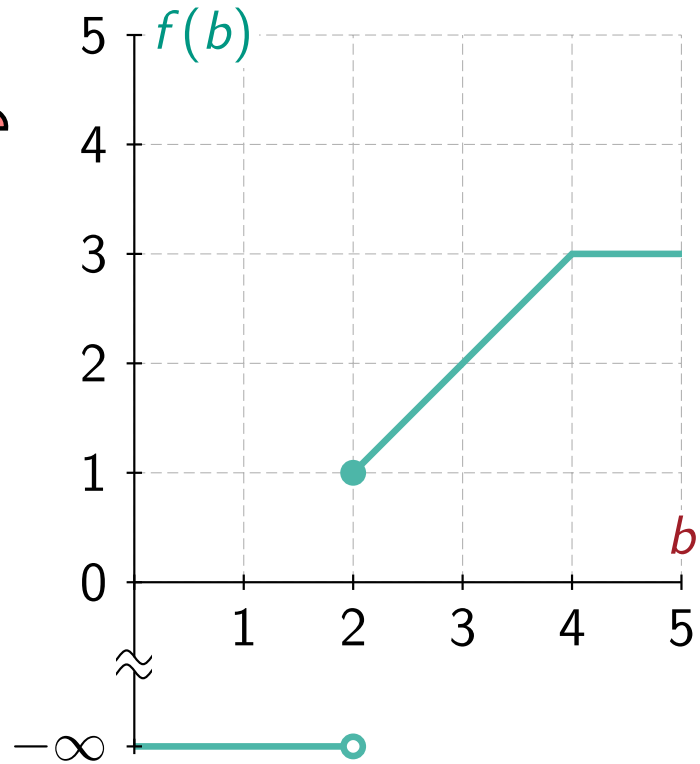
SoC-Profil

Optimaler SoC am Ziel hängt vom SoC am Startknoten ab

SoC-Profil f bildet SoC b am Start auf SoC $f(b)$ am Ziel ab

Beispiel: $M = 5$

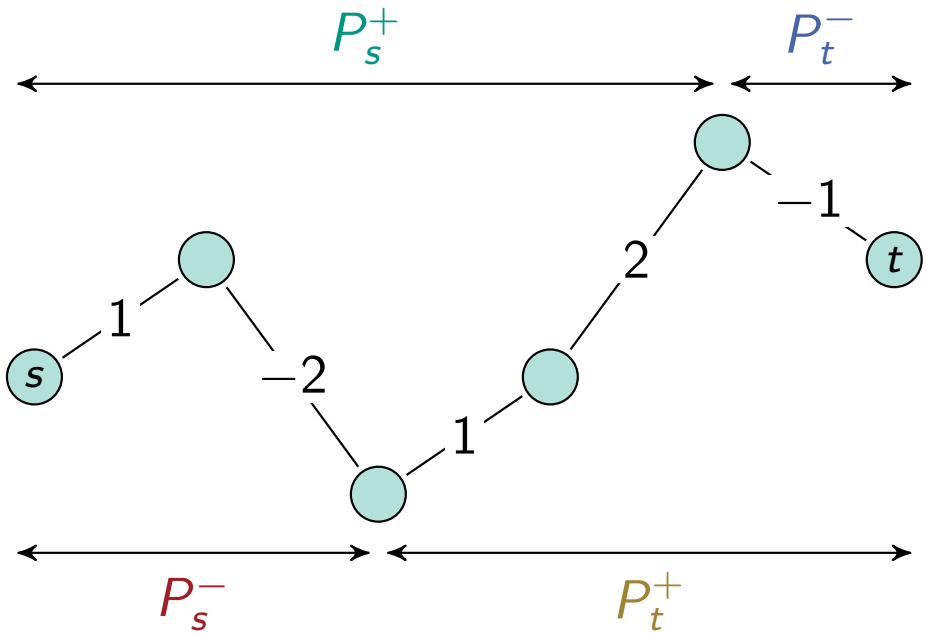


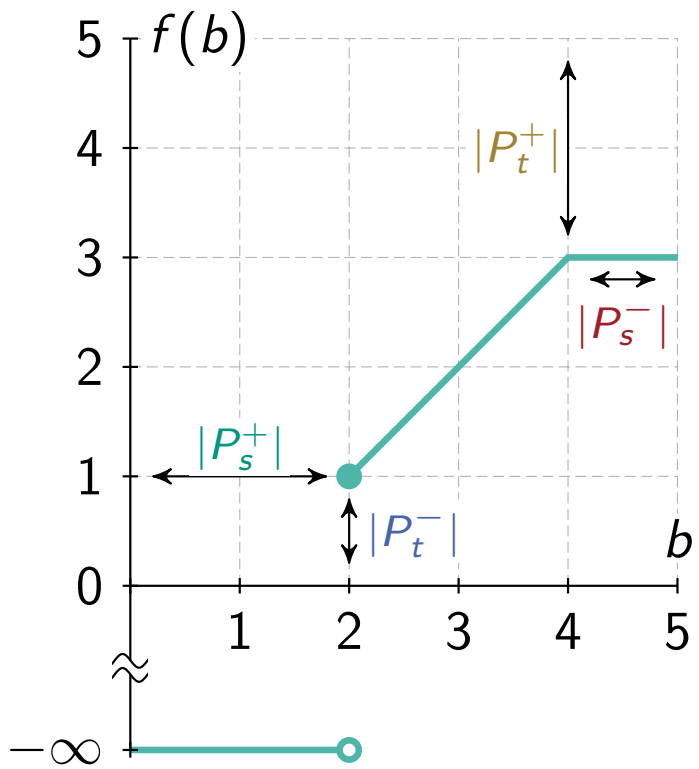


SoC-Profil eines Pfads

SoC-Profil von P bestimmt durch min./max. Präfix/Suffix

Beispiel:





$\Rightarrow$ Komplexität des SoC-Profils ist konstant

SoC-Profil eines Pfads

SoC-Profil entlang eines Pfads P hängt nur von 4 Subpfaden ab:

- max. Präfix P_s^+ von P:
  P befahrbar gdw. $b \geq |P_s^+|$ (Anm.: es gilt $|P_s^+| \geq 0$)
- min. Präfix P_s^- von P:
  Akku mindestens an einem Knoten auf P voll geladen gdw.
  $b - |P_s^-| \geq M$ (Anm.: es gilt $|P_s^-| \leq 0$)
- max. Suffix P_t^+ von P:
  Bestimmt, wie viel SoC nach Befahren höchstens übrig bleibt
  (Anm.: es gilt $|P_t^+| \geq 0$)
- min. Suffix P_t^- von P:
  Bestimmt, wie viel SoC nach Befahren mindestens übrig bleibt
  (Anm.: es gilt $|P_t^-| \leq 0$)

SoC-Profil $\leftrightarrow$ Verbrauchsfunktion

SoC-Profil entlang eines Pfads P kann mit 3 Werten beschrieben werden:

SoC-Profil $\rightarrow$ Verbrauchsfunktion:

- $\text{minIn}_P = |P_s^+|$
- $\text{maxOut}_P = M - |P_t^+|$
- $\text{cost}_P = |P_s^+| - |P_t^-| = |P_t^+| - |P_s^-|$

SoC-Profil $\leftrightarrow$ Verbrauchsfunktion

SoC-Profil entlang eines Pfads P kann mit 3 Werten beschrieben werden:

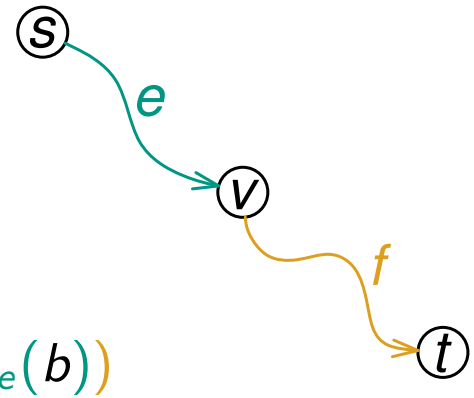
SoC-Profil $\rightarrow$ Verbrauchsfunktion:

- $\text{minIn}_P = |P_s^+|$
- $\text{maxOut}_P = M - |P_t^+|$
- $\text{cost}_P = |P_s^+| - |P_t^-| = |P_t^+| - |P_s^-|$

Verbrauchsfunktion $\rightarrow$ SoC-Profil:

- $|P_s^+| = \text{minIn}_P$
- $|P_s^-| = M - \text{maxOut}_P - \text{cost}_P$
- $|P_t^+| = M - \text{maxOut}_P$
- $|P_t^-| = \text{minIn}_P - \text{cost}_P$

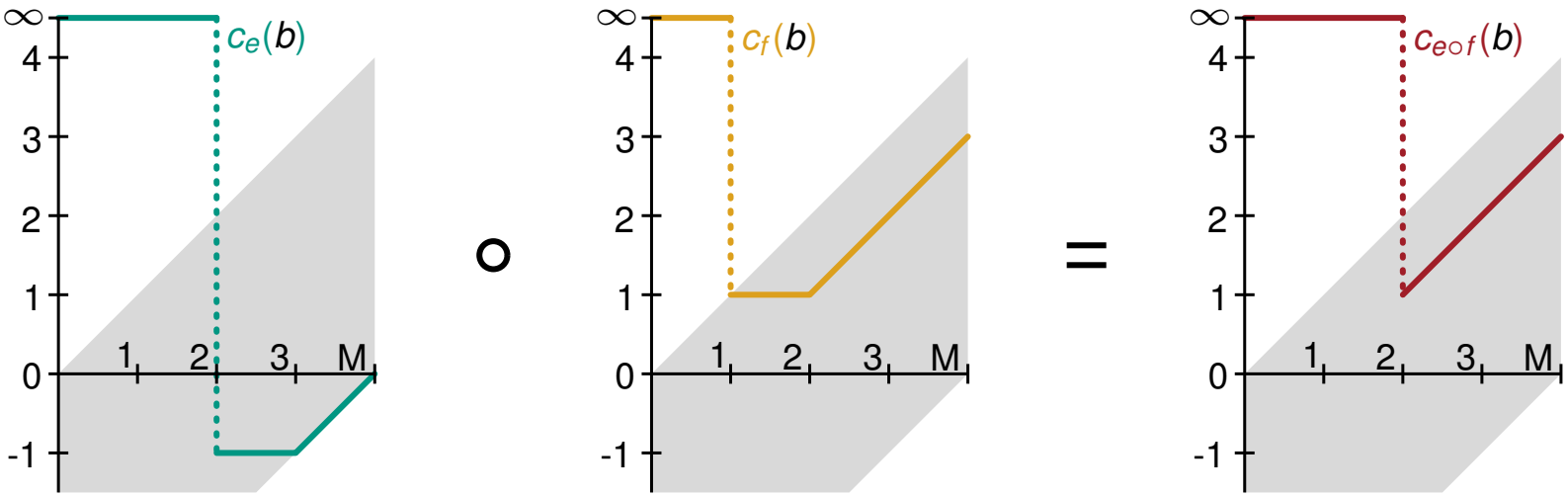
Verbrauchsfunktionen – Linking



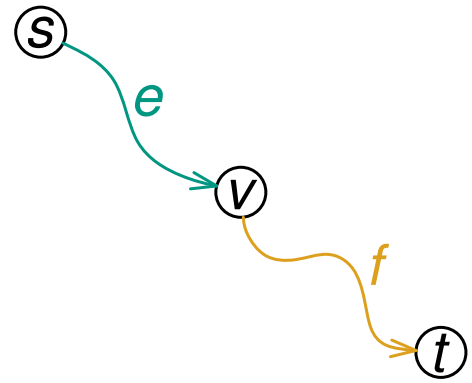
Gesucht: Verbrauch beim Traversieren von e *und* f

- Verbrauch auf e gegeben durch $c_e(b)$
- SoC nach e = SoC vor f = $b - c_e(b)$

$\Rightarrow$ Verbrauch auf e UND f: $c_{e \circ f}(b) = c_e(b) + c_f(b - c_e(b))$

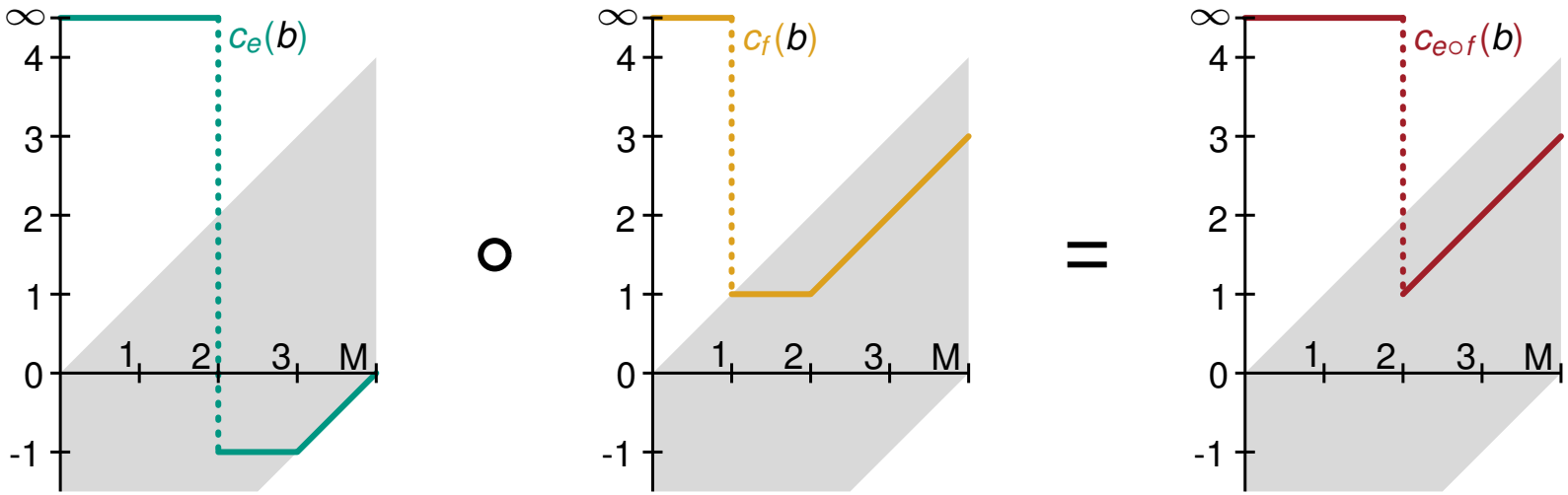


Verbrauchsfunktionen – Linking



Formal: $c_{e \circ f}(b)$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{minIn}_{e \circ f} &= \max[\text{minIn}_e,\ \text{minIn}_f + \text{cost}_e] \\ \text{maxOut}_{e \circ f} &= \min[\text{maxOut}_f,\ \text{maxOut}_e - \text{cost}_f] \\ \text{cost}_{e \circ f} &= \max[\text{cost}_e + \text{cost}_f,\ \text{minIn}_e - \text{maxOut}_f] \end{aligned}$$

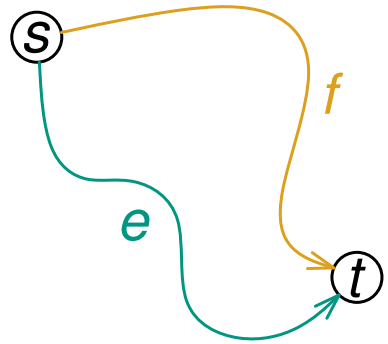


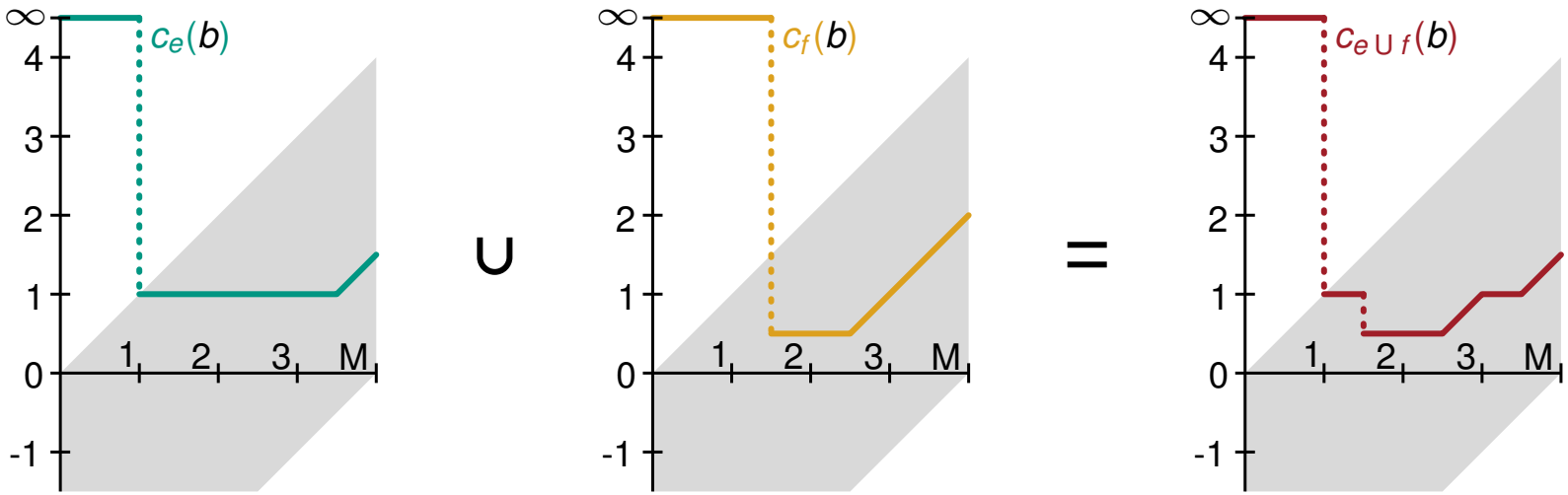
Verbrauchsfunktionen – Merging

Gesucht: Verbrauch beim Traversieren von e *oder* f

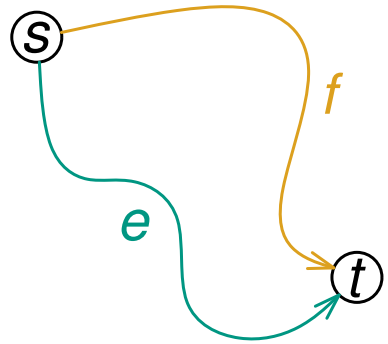
- Benutze Pfad mit geringerem Verbrauch

$\Rightarrow$ Verbrauch auf e ODER f: $c_{e \cup f}(b) = \min(c_f(b), c_e(b))$





Verbrauchsfunktionen – Merging

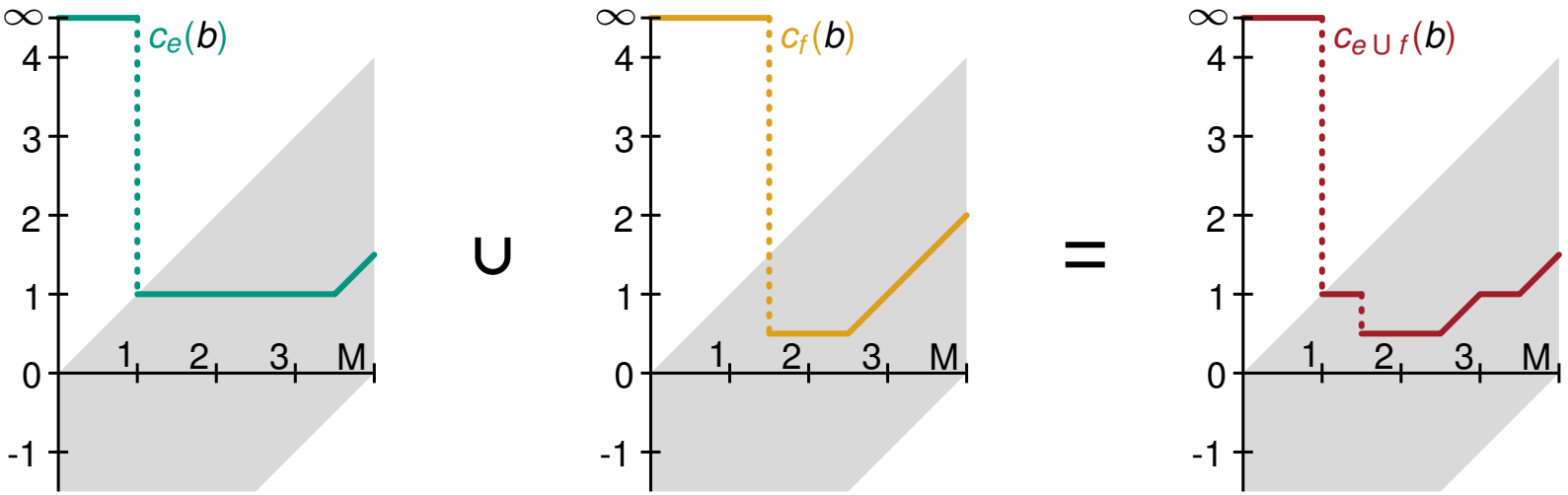


Gesucht: Verbrauch beim Traversieren von e *oder* f

- Benutze Pfad mit geringerem Verbrauch

$\Rightarrow$ Verbrauch auf e ODER f: $c_{e \cup f}(b) = \min(c_f(b), c_e(b))$

Aber: Im Allgemeinen $\mathcal{O}(m)$ Stützstellen



Literatur I

Moritz Baum, Julian Dibbelt, Thomas Pajor, and Dorothea Wagner.

Energy-optimal routes for electric vehicles.

Technical Report 2013-06, Faculty of Informatics, Karlsruhe Institute of Technology, 2013.

Moritz Baum, Jonas Sauer, Dorothea Wagner, and Tobias Zündorf.

Consumption profiles in route planning for electric vehicles: Theory and applications.

In *Proceedings of the 16th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'17)*, volume 75 of *Leibniz International Proceedings in Informatics*, pages 19:1–19:18, 2017.

Jochen Eisner, Stefan Funke, and Sabine Storandt.

Optimal route planning for electric vehicles in large networks.

In *Proceedings of the Twenty-Fifth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pages 1108–1113. AAAI Press, August 2011.