Karlsruher Institut für Technologie

# Algorithmen für Routenplanung

## 10. Vorlesung, Sommersemester 2021

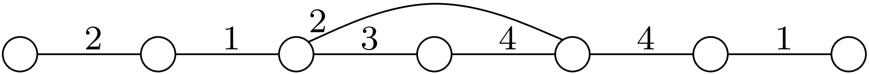
Jonas Sauer | 12. Mai 2021

# Kürzeste Wege in Straßennetzwerken
## Beschleunigungstechniken (Fortsetzung)

- Hub Labeling (HL)
- Transit Node Routing (TNR)

# Wiederholung: CH

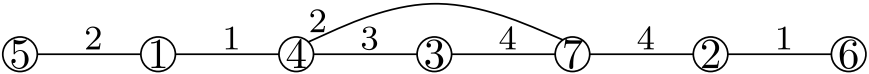
**Vorberechnung:**



# Wiederholung: CH

**Vorberechnung:**

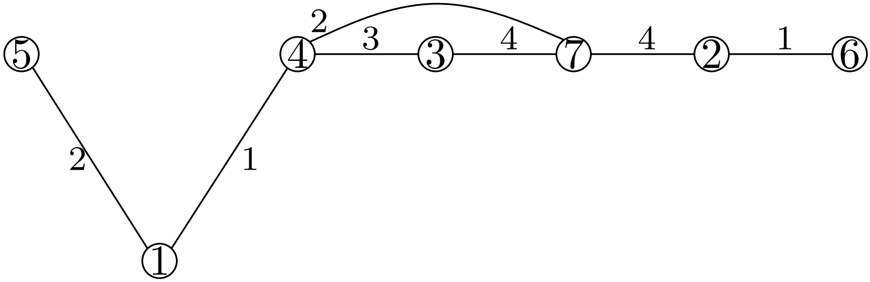
- Ordne Knoten nach Wichtigkeit



# Wiederholung: CH

**Vorberechnung:**

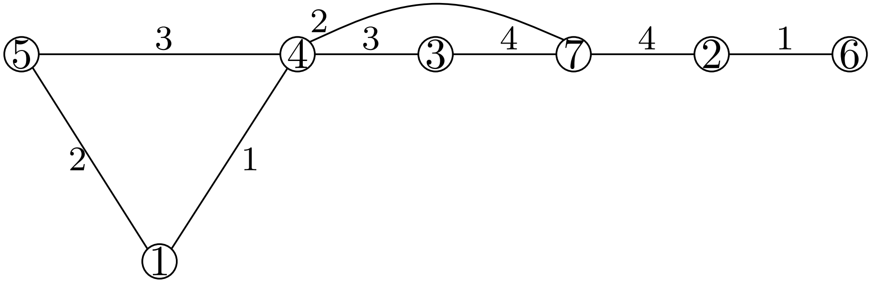
- Ordne Knoten nach Wichtigkeit
- Kontrahiere Knoten in dieser Reihenfolge
- Füge Shortcuts hinzu



# Wiederholung: CH

**Vorberechnung:**

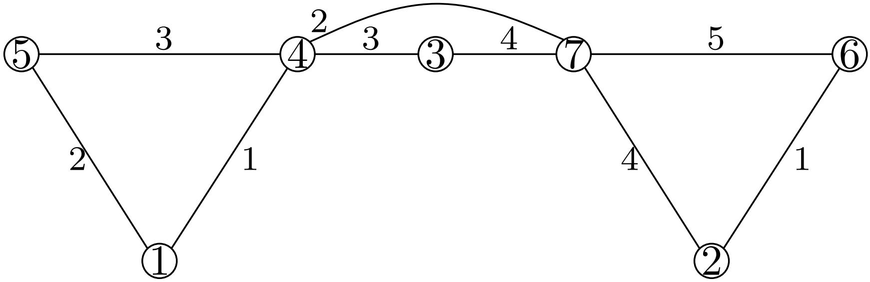
- Ordne Knoten nach Wichtigkeit
- Kontrahiere Knoten in dieser Reihenfolge
- Füge Shortcuts hinzu



# Wiederholung: CH

**Vorberechnung:**

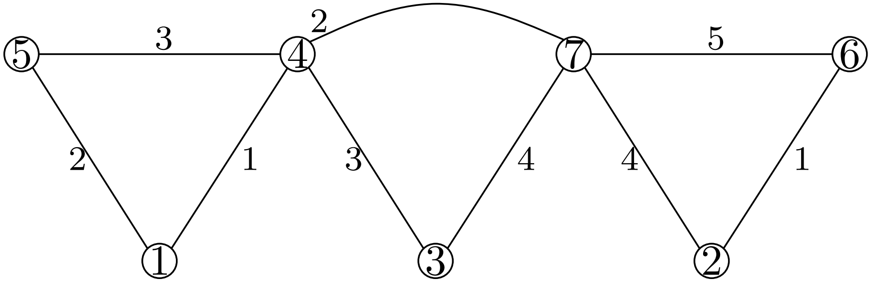
- Ordne Knoten nach Wichtigkeit
- Kontrahiere Knoten in dieser Reihenfolge
- Füge Shortcuts hinzu



# Wiederholung: CH

**Vorberechnung:**

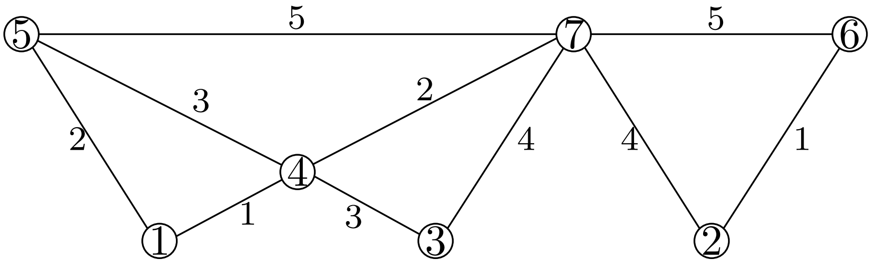
- Ordne Knoten nach Wichtigkeit
- Kontrahiere Knoten in dieser Reihenfolge
- Füge Shortcuts hinzu



# Wiederholung: CH

**Vorberechnung:**

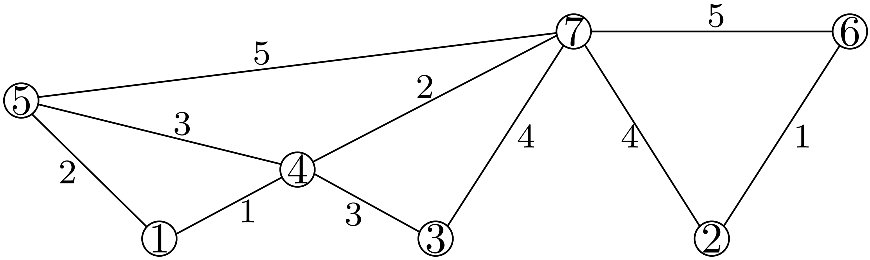
- Ordne Knoten nach Wichtigkeit
- Kontrahiere Knoten in dieser Reihenfolge
- Füge Shortcuts hinzu



# Wiederholung: CH

**Vorberechnung:**

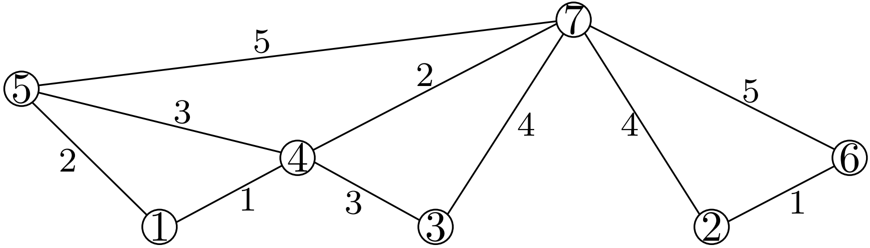
- Ordne Knoten nach Wichtigkeit
- Kontrahiere Knoten in dieser Reihenfolge
- Füge Shortcuts hinzu



# Wiederholung: CH

**Vorberechnung:**

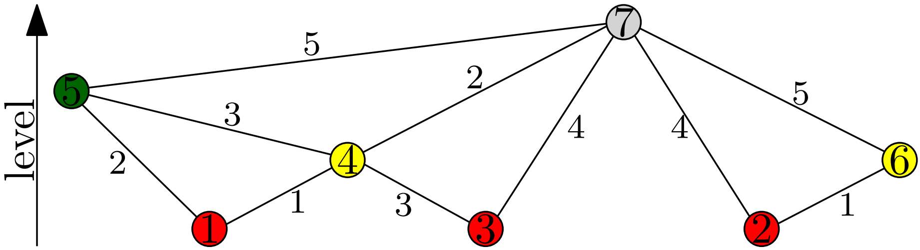
- Ordne Knoten nach Wichtigkeit
- Kontrahiere Knoten in dieser Reihenfolge
- Füge Shortcuts hinzu



# Wiederholung: CH

**Vorberechnung:**

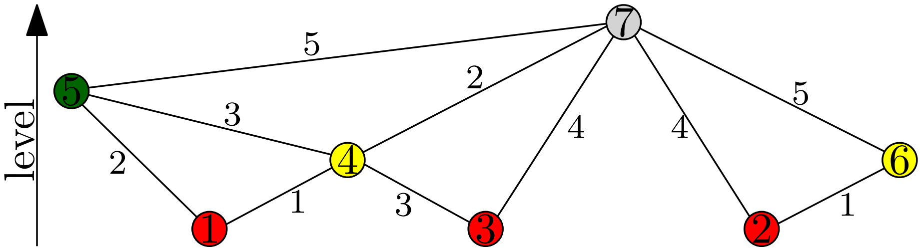
- Ordne Knoten nach Wichtigkeit
- Kontrahiere Knoten in dieser Reihenfolge
- Füge Shortcuts hinzu
- Weise den Knoten Levels zu



# Wiederholung: CH

**Punkt-zu-Punkt-Anfragen:**

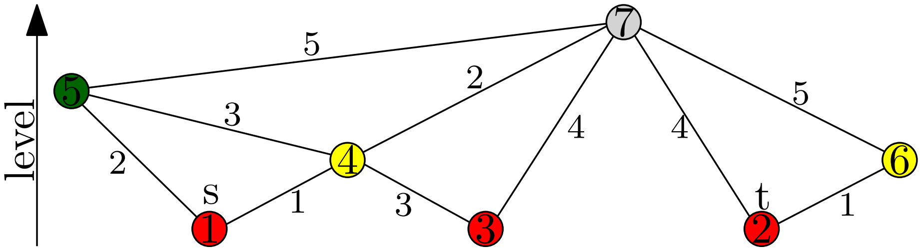
- Modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- Folge nur Kanten zu wichtigeren Knoten



# Wiederholung: CH

**Punkt-zu-Punkt-Anfragen:**

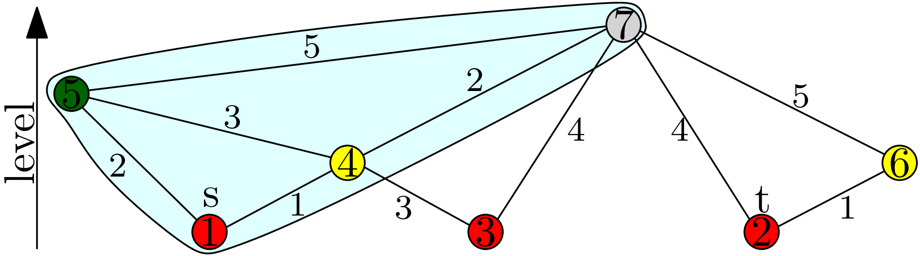
- Modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- Folge nur Kanten zu wichtigeren Knoten



# Wiederholung: CH

**Punkt-zu-Punkt-Anfragen:**

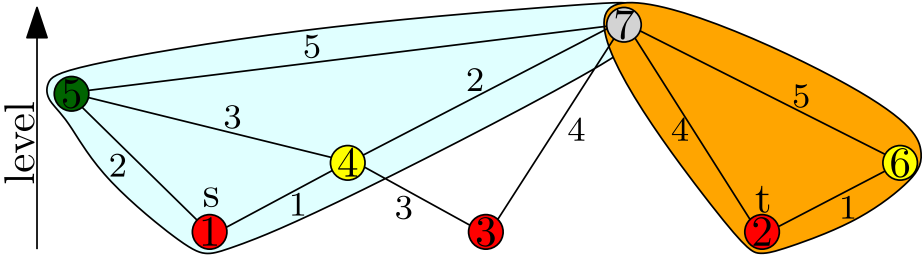
- Modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- Folge nur Kanten zu wichtigeren Knoten



# Wiederholung: CH

**Punkt-zu-Punkt-Anfragen:**

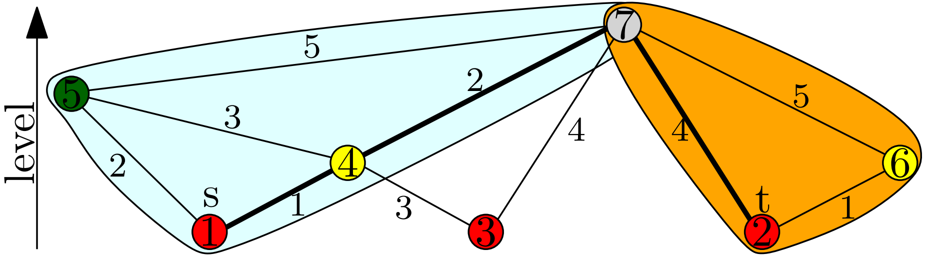
- Modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- Folge nur Kanten zu wichtigeren Knoten



# Wiederholung: CH

**Punkt-zu-Punkt-Anfragen:**

- Modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- Folge nur Kanten zu wichtigeren Knoten



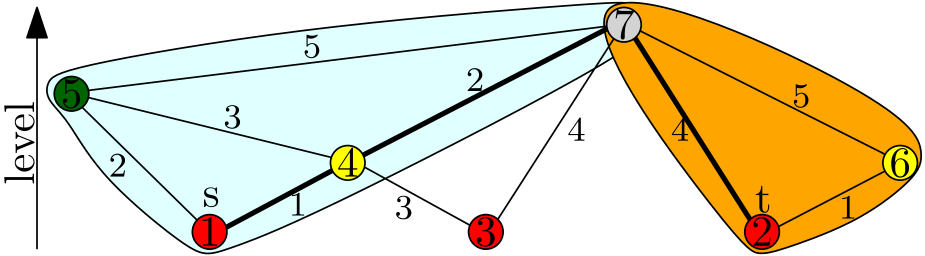
# Wiederholung: CH

**Punkt-zu-Punkt-Anfragen:**

- Modifizierter bidirektionaler Dijkstra
- Folge nur Kanten zu wichtigeren Knoten

**Korrektheit:**

- Es gibt einen wichtigsten Knoten auf dem Pfad
- Dieser wird von Vorwärts- und Rückwärtssuche gescannt



# Hub Labeling

# Hub Labeling

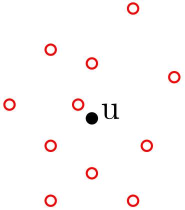
**Vorberechnung:**

- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u), L_b(u)$

# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

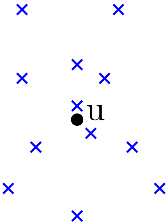
- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u), L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\mathrm{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$



# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

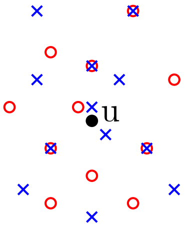
- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u), L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\text{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\text{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$



# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u), L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\mathrm{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\mathrm{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$



# Hub Labeling

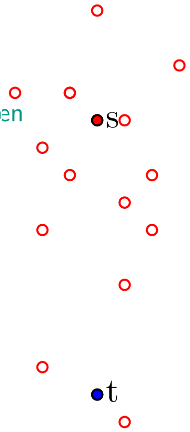
**Vorberechnung:**

- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u), L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\text{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\text{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$
- Die Labels müssen die cover property erfüllen:
  $\forall s, t \in V$: $L_f(s) \cap L_b(t)$ enthält $\geq 1$ Knoten
  auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad

# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

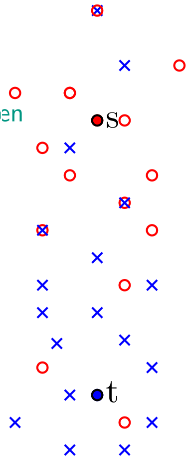
- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u), L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\mathrm{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\mathrm{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$
- Die Labels müssen die cover property erfüllen:
  $\forall s, t \in V$: $L_f(s) \cap L_b(t)$ enthält $\geq 1$ Knoten
  auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad



# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

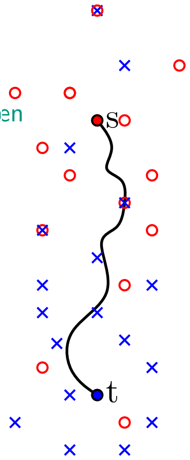
- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u), L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\mathrm{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\mathrm{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$
- Die Labels müssen die cover property erfüllen:
  $\forall s, t \in V$: $L_f(s) \cap L_b(t)$ enthält $\geq 1$ Knoten auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad



# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

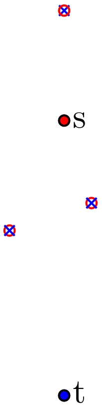
- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u), L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\text{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\text{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$
- Die Labels müssen die cover property erfüllen:
  $\forall s, t \in V$: $L_f(s) \cap L_b(t)$ enthält $\geq 1$ Knoten
  auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad



# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u)$, $L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\mathrm{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\mathrm{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$
- Die Labels müssen die cover property erfüllen:
  $\forall s, t \in V$: $L_f(s) \cap L_b(t)$ enthält $\geq 1$ Knoten
  auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad



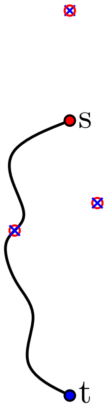

$s$–$t$-**Anfrage:**

- Finde Knoten $v \in L_f(s) \cap L_b(t)$ ...

# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u), L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\mathrm{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\mathrm{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$
- Die Labels müssen die cover property erfüllen:
  $\forall s, t \in V$: $L_f(s) \cap L_b(t)$ enthält $\geq 1$ Knoten auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad



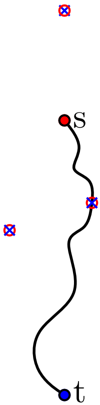

**$s$–$t$-Anfrage:**

- Finde Knoten $v \in L_f(s) \cap L_b(t)$ ...
- ... der $\mathrm{dist}(s, v) + \mathrm{dist}(v, t)$ minimiert

# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u), L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\text{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\text{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$
- Die Labels müssen die cover property erfüllen:
  $\forall s, t \in V$: $L_f(s) \cap L_b(t)$ enthält $\geq 1$ Knoten auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad



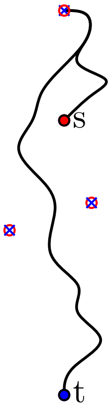

**$s$–$t$-Anfrage:**

- Finde Knoten $v \in L_f(s) \cap L_b(t)$ ...
- ... der $\text{dist}(s, v) + \text{dist}(v, t)$ minimiert

# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u)$, $L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\mathrm{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\mathrm{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$
- Die Labels müssen die cover property erfüllen:
  $\forall s, t \in V$: $L_f(s) \cap L_b(t)$ enthält $\geq 1$ Knoten
  auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad



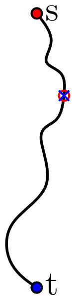

*s*–*t*-**Anfrage:**

- Finde Knoten $v \in L_f(s) \cap L_b(t)$ ...
- ... der $\mathrm{dist}(s, v) + \mathrm{dist}(v, t)$ minimiert

# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u)$, $L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\mathrm{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\mathrm{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$
- Die Labels müssen die cover property erfüllen:
  $\forall s, t \in V$: $L_f(s) \cap L_b(t)$ enthält $\geq 1$ Knoten
  auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad



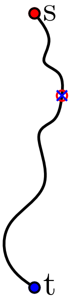

**$s$–$t$-Anfrage:**

- Finde Knoten $v \in L_f(s) \cap L_b(t) \ldots$
- $\ldots$ der $\mathrm{dist}(s, v) + \mathrm{dist}(v, t)$ minimiert

# Hub Labeling

**Vorberechnung:**

- Für jeden Knoten $u$: Berechne zwei Labels $L_f(u)$, $L_b(u)$
- Ein Label ist eine Menge von Knoten (Hubs) und Distanzen
  - $\mathrm{dist}(u, v)$ für jeden Hub $v \in L_f(u)$
  - $\mathrm{dist}(v, u)$ für jeden Hub $v \in L_b(u)$
- Die Labels müssen die cover property erfüllen:
  $\forall s, t \in V$: $L_f(s) \cap L_b(t)$ enthält $\geq 1$ Knoten
  auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad




$s$–$t$-**Anfrage:**

- Finde Knoten $v \in L_f(s) \cap L_b(t) \ldots$
- $\ldots$ der $\mathrm{dist}(s, v) + \mathrm{dist}(v, t)$ minimiert

**Beobachtungen:**

- Laufzeit hängt von Labelgröße ab
- Wie effizient berechnen?

# Hub Labeling

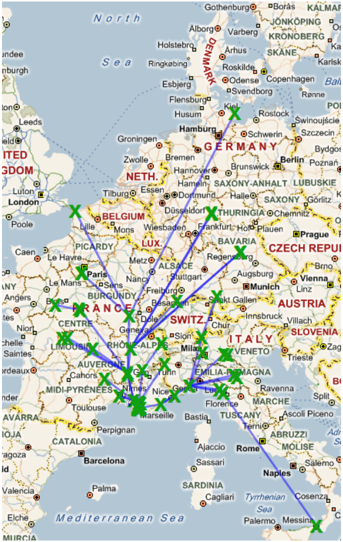
**Speichern der Labels:**

- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID

# Hub Labeling

**Speichern der Labels:**

- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID




$L_f(s)$

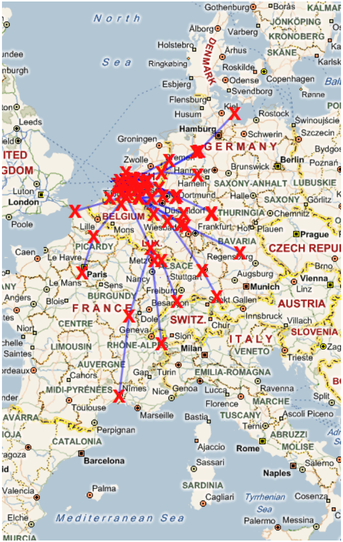
| | | | |
|---|---|---|---|
| 1,0 | 4,1 | 5,2 | 7,3 |

## Speichern der Labels:

- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID

| $L_f(s)$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1,0 | 4,1 | 5,2 | 7,3 |

| $L_b(t)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2,0 | 6,1 | 7,4 | 8,1 | 9,3 |



# Hub Labeling

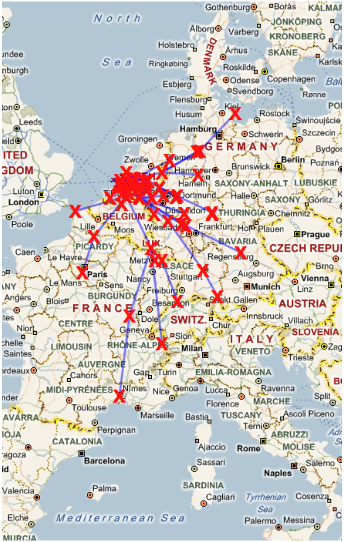
## Speichern der Labels:

- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID

## Anfrage:

- Simultanes Scannen von zwei Arrays
- Nur einige Speicherzugriffe nötig

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $L_f(s)$ | 1,0 | 4,1 | 5,2 | 7,3 | $\infty$ |
| $L_b(t)$ | 2,0 | 6,1 | 7,4 | 8,1 | 9,3 |



# Hub Labeling

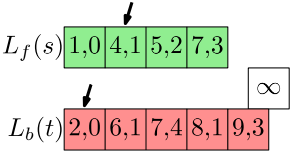


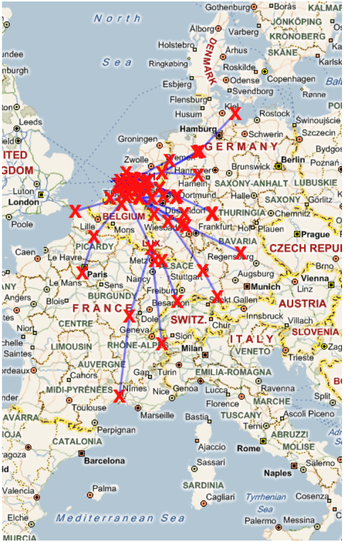
**Speichern der Labels:**

- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID

**Anfrage:**

- Simultanes Scannen von zwei Arrays
- Nur einige Speicherzugriffe nötig



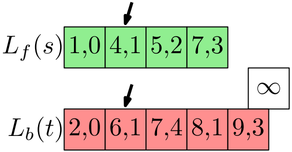
# Hub Labeling

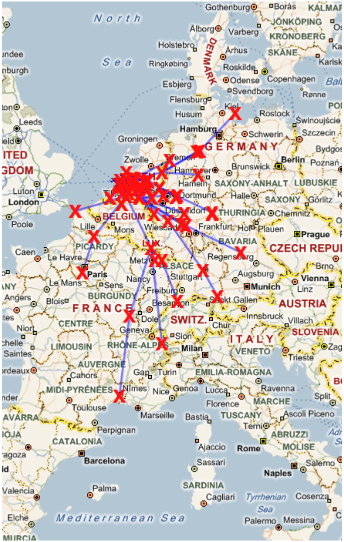
**Speichern der Labels:**

- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID

**Anfrage:**

- Simultanes Scannen von zwei Arrays
- Nur einige Speicherzugriffe nötig






Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

# Hub Labeling

**Speichern der Labels:**

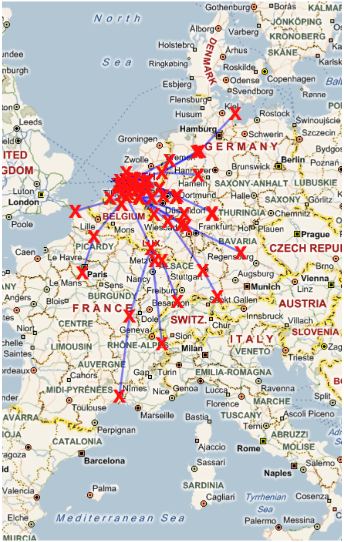
- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID

**Anfrage:**

- Simultanes Scannen von zwei Arrays
- Nur einige Speicherzugriffe nötig

| $L_f(s)$ | 1,0 | 4,1 | 5,2 | 7,3 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|

| $L_b(t)$ | 2,0 | 6,1 | 7,4 | 8,1 | 9,3 |
|---|---|---|---|---|---|





Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

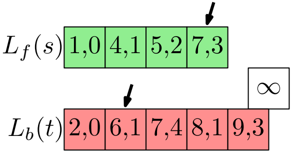
# Hub Labeling

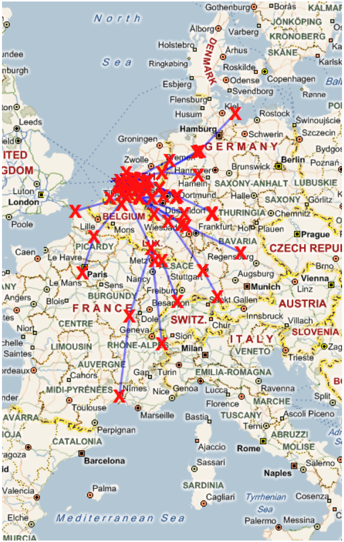
**Speichern der Labels:**

- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID

**Anfrage:**

- Simultanes Scannen von zwei Arrays
- Nur einige Speicherzugriffe nötig



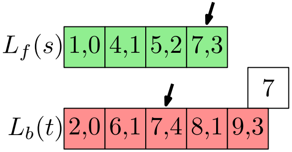
# Hub Labeling

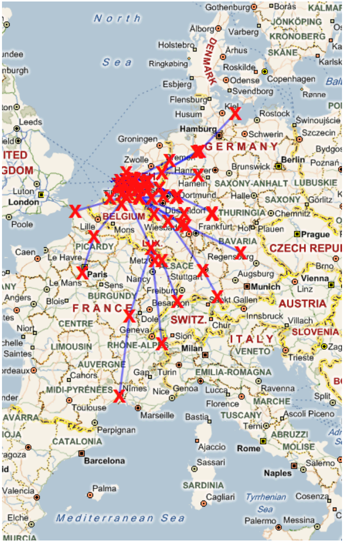
**Speichern der Labels:**

- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID

**Anfrage:**

- Simultanes Scannen von zwei Arrays
- Nur einige Speicherzugriffe nötig



# Hub Labeling

**Speichern der Labels:**

- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID

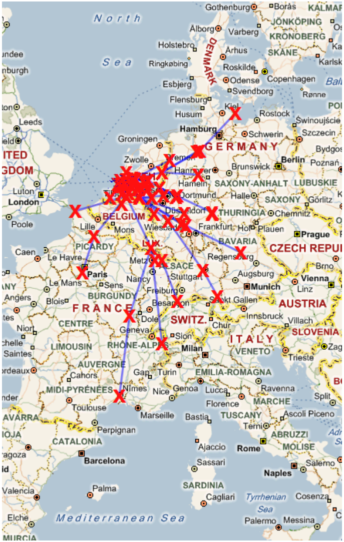
**Anfrage:**

- Simultanes Scannen von zwei Arrays
- Nur einige Speicherzugriffe nötig

| $L_f(s)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1,0 | 4,1 | 5,2 | 7,3 | |

7

| $L_b(t)$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2,0 | 6,1 | 7,4 | 8,1 | 9,3 |



# Hub Labeling

**Speichern der Labels:**

- Als Menge von (Hub, Distanz)-Paaren
- Sortiert nach Hub-Knoten-ID

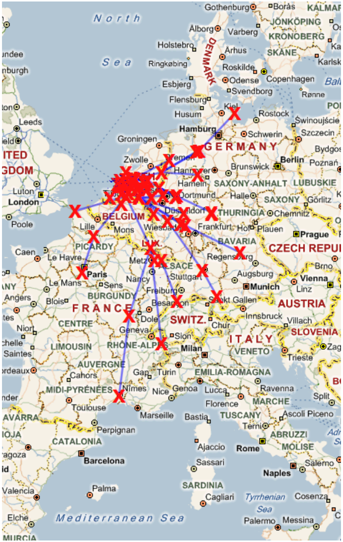
**Anfrage:**

- Simultanes Scannen von zwei Arrays
- Nur einige Speicherzugriffe nötig
- Sehr hohe Lokalität

$L_f(s)$: | 1,0 | 4,1 | 5,2 | 7,3 |

7

$L_b(t)$: | 2,0 | 6,1 | 7,4 | 8,1 | 9,3 |



# Hub Labeling

**Komplexität**:

- Maximale Labellänge soll klein sein
- Optimale Hub-Labels zu berechnen ist NP-schwer [BGK$^+$15]
- Es gibt eine $\mathcal{O}(\log n)$-Approximation [GPPR04]
  - Ursprüngliche Laufzeit in $\mathcal{O}(n^5)$
  - Wurde auf $\mathcal{O}(n^3 \log n)$ verbessert [DGSW14]

# Hierarchische Hub-Labels

**Hierarchische Hub-Labels**:

- Jedes Labeling definiert eine Relation $\preceq$ auf den Labels:

$$v \preceq u \iff u \in L_f(v) \cup L_b(v)$$

- Ein Labeling ist hierarchisch, wenn $\preceq$ eine partielle Ordnung ist.
- Optimale hierarchische Hub-Labels zu berechnen ist NP-schwer [BGK+15]

**Kanonische Hub-Labels**:

- Ein Labeling ist kanonisch bezüglich einer Knotenordnung $O$, wenn
  - das Labeling hierarchisch ist
  - $\preceq$ mit $O$ konsistent ist
  - man aus keinem Label einen Hub löschen kann
- Das kanonische Labeling ist eindeutig für eine feste Ordnung $O$

# Verbindung zu CH

- $\preceq$ ordnet die Knoten nach „Wichtigkeit“ wie bei CH
- CH-Suchräume sind gültige hierarchische Hub-Labels
- Aber sie sind größer als nötig (siehe Stall-on-Demand)
- Und in der Regel sind sie nicht kanonisch

$\rightarrow$ Überflüssige Knoten filtern

# Verbindung zu CH

- $\preceq$ ordnet die Knoten nach „Wichtigkeit“ wie bei CH
- CH-Suchräume sind gültige hierarchische Hub-Labels
- Aber sie sind größer als nötig (siehe Stall-on-Demand)
- Und in der Regel sind sie nicht kanonisch

$\rightarrow$ Überflüssige Knoten filtern

- Im Folgenden betrachten wir nur noch hierarchische Hub-Labels
- Für Beweise nehmen wir ferner an:
  - Kürzeste Wege sind eindeutig
  - Graphen sind ungerichtet
    $L(v) := L_f(v) = L_b(v)$

# Labels kanonisch machen

- Sei $m(s,t)$ der Knoten mit höchsten Rank auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad
- $m(s,t)$ ist der gemeinsame Hub von $s$ und $t$, über den der kürzeste Pfad geht

**Satz**

Wir können einen Hub $h$ aus dem Label $L(v)$ von $v$ löschen

$$\Updownarrow$$

$$h \neq m(v,h)$$

# Labels kanonisch machen

- Sei $m(s,t)$ der Knoten mit höchsten Rank auf dem kürzesten $s$–$t$-Pfad
- $m(s,t)$ ist der gemeinsame Hub von $s$ und $t$, über den der kürzeste Pfad geht

**Satz**

Wir können einen Hub $h$ aus dem Label $L(v)$ von $v$ löschen

$$\Updownarrow$$

$$h \neq m(v,h)$$

- Zwei Richtungen:
- Wenn $h = m(v,h)$, dann dürfen wir $h$ nicht aus $L(v)$ löschen.
- Wenn $h \neq m(v,h)$, dann dürfen wir $h$ aus $L(v)$ löschen.

# Labels kanonisch machen

**Übersicht**:

- Erste Richtung: Wenn $h = m(v, h)$, dann dürfen wir $h$ nicht aus $L(v)$ löschen.
- Wir müssen zeigen, dass es eine Anfrage gibt, die nach der Herausnahme von $h$ aus dem Label von $v$ inkorrekt wird.
- **Wir zeigen:** Wenn wir $h$ löschen, wird die $v$–$h$-Anfrage falsch beantwortet.

# Labels kanonisch machen

**Übersicht**:

- Erste Richtung: Wenn $h = m(v, h)$, dann dürfen wir $h$ nicht aus $L(v)$ löschen.
- Wir müssen zeigen, dass es eine Anfrage gibt, die nach der Herausnahme von $h$ aus dem Label von $v$ inkorrekt wird.
- **Wir zeigen:** Wenn wir $h$ löschen, wird die $v$–$h$-Anfrage falsch beantwortet.

**Beweis**:

- Ein gemeinsamer Hub von $h$ und $v$ kann nicht niedriger sein als $h$ oder $v$ (folgt direkt aus der Definition von kanonischem Labeling)
- Der höchste Knoten auf dem kürzesten $v$–$h$-Pfad ist $h$ (Voraussetzung)
- Also können sich $L(v)$ und $L(h)$ nur in $h$ schneiden

$\implies$ $h$ darf nicht gelöscht werden

# Labels kanonisch machen

**Übersicht**:

- Zweite Richtung: Wenn $h \neq m(v, h)$, dann dürfen wir $h$ aus $L(v)$ löschen
- Wir müssen zeigen, dass alle Anfragen nach der Herausnahme von $h$ aus dem Label von $v$ noch korrekt sind

# Labels kanonisch machen

**Übersicht**:

- Zweite Richtung: Wenn $h \neq m(v, h)$, dann dürfen wir $h$ aus $L(v)$ löschen
- Wir müssen zeigen, dass alle Anfragen nach der Herausnahme von $h$ aus dem Label von $v$ noch korrekt sind

**Beweis**:

- $L(v)$ wird nur bei $v$–$t$- oder $s$–$v$-Anfragen angeschaut, also können nur diese inkorrekt werden
  $\rightarrow$ Betrachte ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v$–$t$-Anfragen
- Eine $v$–$t$-Anfrage kann nur inkorrekt werden, wenn $h$ auf dem kürzesten $v$–$t$-Pfad liegt
- Es reicht also zu zeigen, dass alle $v$–$t$-Anfragen, die durch $h$ gehen, korrekt sind
- **Wir zeigen:** Diese $v$–$t$-Anfragen treffen sich nicht nur in $h$, sondern auch in $m(v, h)$ oder in $m(h, t)$

# Labels kanonisch machen

**Übersicht**:

- Zweite Richtung: Wenn $h \neq m(v, h)$, dann dürfen wir $h$ aus $L(v)$ löschen
- Wir müssen zeigen, dass alle Anfragen nach der Herausnahme von $h$ aus dem Label von $v$ noch korrekt sind

**Beweis**:

- **Wir zeigen:** Diese $v$–$t$-Anfragen treffen sich nicht nur in $h$, sondern auch in $m(v, h)$ oder in $m(h, t)$
- Fall 1:
  - $m(v, h)$ höher als $m(h, t)$
  - $m(v, h)$ also auch höchster Knoten auf $v$–$t$-Pfad
  - Nach Argument von letzter Folie: $m(v, h) \in L(v)$ und $m(v, h) \in L(t)$
  - $v$–$t$-Anfrage trifft sich nicht nur in $h$, sondern auch in $m(v, h)$
  - Da nach Voraussetzung $h \neq m(v, h)$, können wir $h$ löschen

# Labels kanonisch machen

**Übersicht**:

- Zweite Richtung: Wenn $h \neq m(v, h)$, dann dürfen wir $h$ aus $L(v)$ löschen
- Wir müssen zeigen, dass alle Anfragen nach der Herausnahme von $h$ aus dem Label von $v$ noch korrekt sind

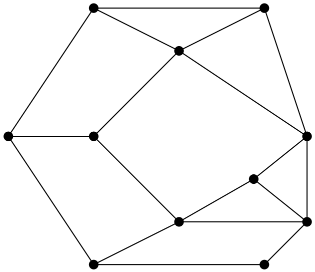
**Beweis**:

- **Wir zeigen:** Diese $v$–$t$-Anfragen treffen sich nicht nur in $h$, sondern auch in $m(v, h)$ oder in $m(h, t)$
- Fall 2:
  - $m(h, t)$ höher als in $m(v, h)$
  - $m(h, t)$ also auch höchster Knoten auf $v$–$t$-Pfad
  - Nach Argument von letzter Folie: $m(h, t) \in L(v)$ und $m(h, t) \in L(t)$
  - $v$–$t$-Anfrage trifft sich nicht nur in $h$, sondern auch in $m(h, t)$
  - Wenn $h = m(h, t)$, dann wäre $h$ der höchste Knoten auf dem $v$-$t$-Pfad. Das kann aber nicht sein, da $m(v, h)$ höher ist.
  - Da $h \neq m(h, t)$, können wir $h$ löschen

# Vorberechnung

**Idee:**

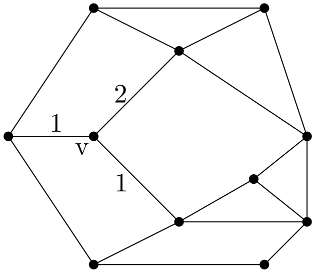
- Benutze Knotenordnung



# Vorberechnung

**Idee:**

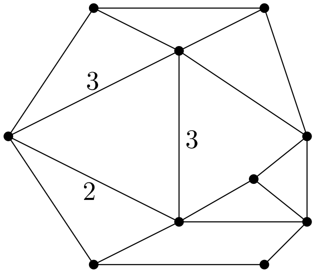
- Benutze Knotenordnung
- Kontrahiere Knoten $v$



# Vorberechnung

**Idee:**

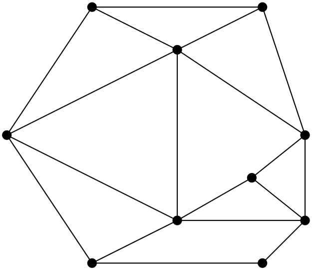
- Benutze Knotenordnung
- Kontrahiere Knoten $v$



# Vorberechnung

**Idee:**

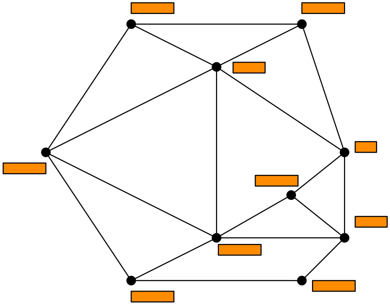
- Benutze Knotenordnung
- Kontrahiere Knoten $v$



# Vorberechnung

**Idee:**

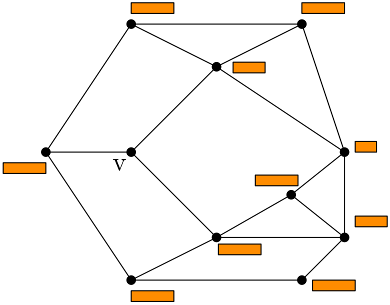
- Benutze Knotenordnung
- Kontrahiere Knoten $v$
- Berechne Labels rekursiv



# Vorberechnung

**Idee:**

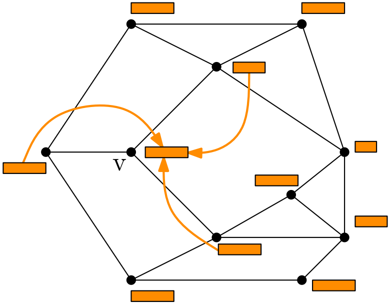
- Benutze Knotenordnung
- Kontrahiere Knoten $v$
- Berechne Labels rekursiv



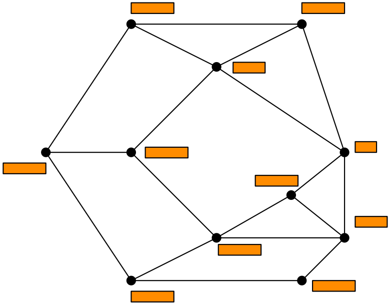
# Vorberechnung

**Idee:**

- Benutze Knotenordnung
- Kontrahiere Knoten $v$
- Berechne Labels rekursiv
- Vereinige (merge) Labels der Aufwärtsnachbarn von $v$
- Dünne Label aus



# Vorberechnung



**Idee:**

- Benutze Knotenordnung
- Kontrahiere Knoten $v$
- Berechne Labels rekursiv
- Vereinige (merge) Labels der Aufwärtsnachbarn von $v$
- Dünne Label aus

**Korrektheit:**

- Analog zur Korrektheit von CH
- Argumentation über den wichtigsten Knoten auf dem Pfad
- Dieser ist im Vorwärtslabel von $s$ und im Rückwärtslabel von $t$

# Vereinigen von Labels

**Generell:**

- $L_f(v)$ ist die Vereinigung der Labels der Aufwärtsnachbarn von $v$ im augmentierten Graph
- Die Distanzen zu jedem Hub in $L_f(v)$ werden um die Länge der Kante zum Nachbarknoten erhöht
- $L_f(v)$ enthält zusätzlich $v$ als Hub mit Distanz 0
- So konstruiertes Label ist korrekt, aber nicht kleinstmöglich

# Vereinigen von Labels

**Generell:**

- $L_f(v)$ ist die Vereinigung der Labels der Aufwärtsnachbarn von $v$ im augmentierten Graph
- Die Distanzen zu jedem Hub in $L_f(v)$ werden um die Länge der Kante zum Nachbarknoten erhöht
- $L_f(v)$ enthält zusätzlich $v$ als Hub mit Distanz 0
- So konstruiertes Label ist korrekt, aber nicht kleinstmöglich

**Ausdünnen:**

- Manche Knoten im Label sind nicht notwendig
- **Ziel**: Entferne Hubs $h$, für die $h \neq m(v, h)$
- Label von $h$ ist final, da $h$ höher als $v$
- Label von $v$ ist korrekt (aber noch nicht minimal)
- Wir können eine HL-Anfrage durchführen, um $m(v, h)$ zu bestimmen
- Lösche $h$, wenn $h \neq m(v, h)$

# Pruned Labeling [DGPW14, AIY13]

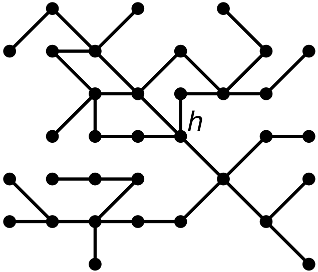
**Alternative Labelkonstruktion**:

- Verteile Hubs auf Labels
- $h$ ist Hub von $v$
  $\iff h = m(h, v)$
  $\iff$ es gibt auf dem $h$–$v$-Pfad keinen höheren Knoten als $h$
- Starte Dijkstra von $h$ und besuche alle $v$, in deren Label $h$ liegt

# Pruned Labeling [DGPW14, AIY13]

**Alternative Labelkonstruktion**:

- Verteile Hubs auf Labels
- $h$ ist Hub von $v$
  $\iff$ $h = m(h, v)$
  $\iff$ es gibt auf dem $h$–$v$-Pfad keinen höheren Knoten als $h$
- Starte Dijkstra von $h$ und besuche alle $v$, in deren Label $h$ liegt

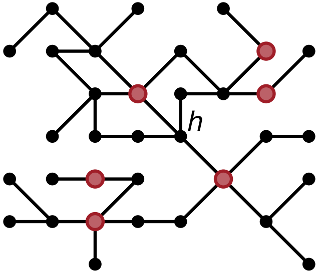



Ziel: $h$ in alle Labels verteilen

# Pruned Labeling [DGPW14, AIY13]

**Alternative Labelkonstruktion**:

- Verteile Hubs auf Labels
- $h$ ist Hub von $v$
  $\iff$ $h = m(h, v)$
  $\iff$ es gibt auf dem $h$–$v$-Pfad keinen höheren Knoten als $h$
- Starte Dijkstra von $h$ und besuche alle $v$, in deren Label $h$ liegt

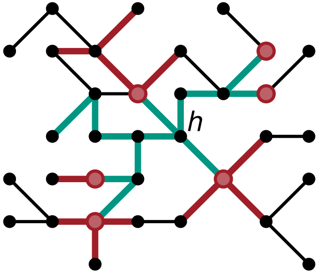



Rote Knoten sind höher als $h$

# Pruned Labeling [DGPW14, AIY13]

**Alternative Labelkonstruktion**:

- Verteile Hubs auf Labels
- $h$ ist Hub von $v$
  $\iff h = m(h, v)$
  $\iff$ es gibt auf dem $h$–$v$-Pfad keinen höheren Knoten als $h$
- Starte Dijkstra von $h$ und besuche alle $v$, in deren Label $h$ liegt




$h$ kommt in Label von Knoten, die über grüne Pfade erreichbar sind

# Pruned Labeling [DGPW14, AIY13]

- Dijkstras Algorithmus sucht ganzen Graph ab
- $\rightarrow$ muss vorzeitig abgebrochen werden

**Option 1:**

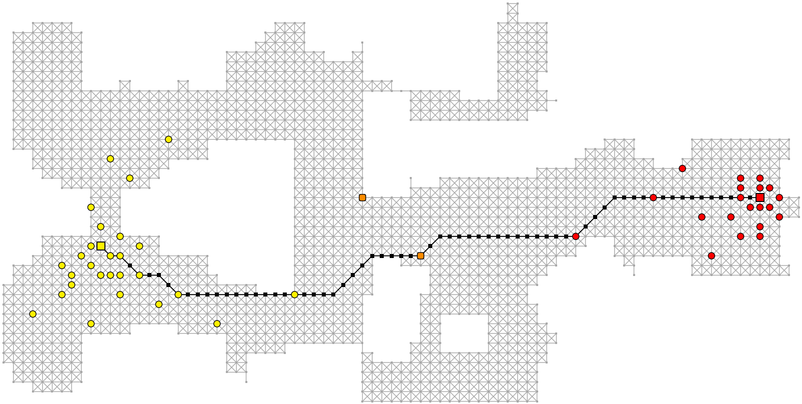
- **Beobachtung**: Wenn alle Knoten in der Queue über rote Pfade gehen, dann werden nie wieder Knoten aufgenommen, die über grüne Pfade gehen
- **Idee**: Speichere, welche Knoten über grüne Pfade erreichbar sind. Wenn keine grünen mehr in der Queue sind, dann kann die Suche abgebrochen werden.

# Pruned Labeling [DGPW14, AIY13]

**Option 2:**

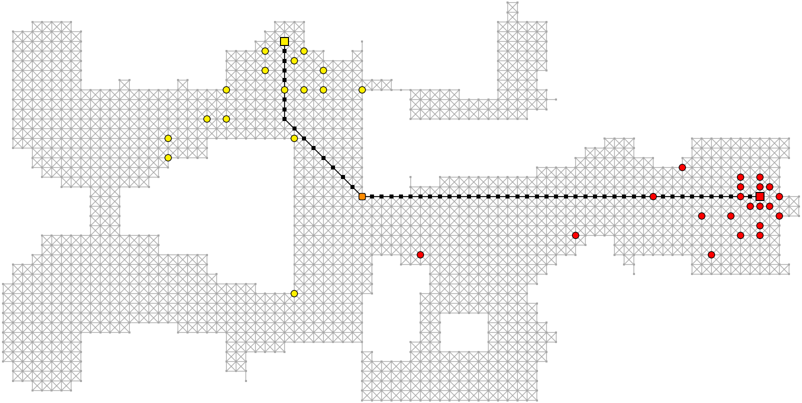
- Verteile hohe Knoten zuerst
- **Effekt**: $m(h, v)$ wird vor $h$ verteilt (da höher) oder $m(h, v) = h$
- Wir können deswegen $m(h, v)$ per HL-Anfrage auf den bereits aufgebauten partiellen Labels berechnen
  - Wenn die Anfrage einen höchsten gemeinsamen Knoten findet, dann ist das $m(h, v)$ und $m(h, v) \neq h$
  - Wenn die Anfrage keinen gemeinsamen Knoten findet, dann ist $m(h, v) = h$
- Baue damit eine Pruning-Regel für Dijkstras Algorithmus
- Nachdem ein Knoten $v$ aus der Queue genommen wird, berechne $m(h, v)$
  - $m(h, v) = h \longrightarrow$ Füge $h$ in das Label von $v$ ein und relaxiere ausgehende Kanten von $v$
  - $m(h, v) \neq h \longrightarrow$ Füge $h$ nicht in das Label von $v$ ein und prune die Suche an $v$

# Beispiel: Grid Graph



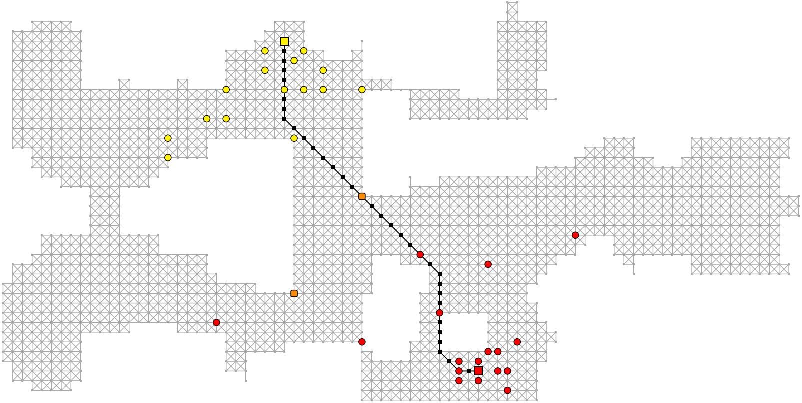
Autoren von [DGPW14] haben diese Bilder erstellt

# Beispiel: Grid Graph



Autoren von [DGPW14] haben diese Bilder erstellt

# Beispiel: Grid Graph



Autoren von [DGPW14] haben diese Bilder erstellt

# Ergebnisse

| Method | Preprocessing time [h:mm] | Preprocessing space [GB] | Query time [$\mu$s] |
|---|---|---|---|
| MLD-3 | $<$ 0:01 | 0.4 | 912 |
| CH | 0:02 | 0.4 | 96.3 |
| HL-0 | 0:03 | 22.5 | 0.700 |
| HL-15 | 0:05 | 18.8 | 0.556 |
| HL-17 | 0:25 | 18.4 | 0.545 |
| HL-$\infty$ | 5:43 | 16.8 | 0.508 |
| HL-$\infty$ + Oracle | 6:12 | 17.7 | 0.254 |
| Table Lookup | ??? | 1 208 358.7 | 0.056 |

- Vorberechnung mit 12 Cores parallelisiert
- Table Lookup nimmt an, dass Speicherstelle nicht im Cache liegt
- HL-$x$: Benutze Top-Down-Ordnung für höchste $2^x$ Knoten

# Ergebnisse

| | Preprocessing | | Query |
|---|---|---|---|
| Method | time [h:mm] | space [GB] | time [$\mu$s] |
| MLD-3 | $<$ 0:01 | 0.4 | 912 |
| CH | 0:02 | 0.4 | 96.3 |
| HL-0 | 0:03 | 22.5 | 0.700 |
| HL-15 | 0:05 | 18.8 | 0.556 |
| HL-17 | 0:25 | 18.4 | 0.545 |
| HL-$\infty$ | 5:43 | 16.8 | 0.508 |
| HL-$\infty$ + Oracle | 6:12 | 17.7 | 0.254 |
| Table Lookup | ??? | 1 208 358.7 | 0.056 |

- Vorberechnung mit 12 Cores parallelisiert
- Table Lookup nimmt an, dass Speicherstelle nicht im Cache liegt
- HL-$x$: Benutze Top-Down-Ordnung für höchste $2^x$ Knoten
- HL ist Faktor 100 schneller als CH (Speedup 10 Mio.)
- Hoher Speicherverbrauch (durch Kompression reduzierbar)

# Zusammenfassung

- Knotenordnung definiert Labeling
- Beschleunigung gegenüber CH von Faktor mehr als 100
- Durch bessere Lokalität
- Nur 5-mal langsamer als ein Speicherzugriff
- Schnellster Algorithmus momentan
- Beschleunigt lokale und globale Anfragen
- Aber Speicherverbrauch sehr hoch

# HLDB

# Aufgabenstellung

**Beobachtung:**

- Queries sind schnell genug
- Visualisierung und Netzwerklatenz der Flaschenhals
- Schwieriger und hoch optimierter Code

# Aufgabenstellung

**Beobachtung:**

- Queries sind schnell genug
- Visualisierung und Netzwerklatenz der Flaschenhals
- Schwieriger und hoch optimierter Code

**Können wir Geschwindigkeit gegen einfachere Bedienbarkeit eintauschen?**

# Aufgabenstellung

**Beobachtung:**

- Queries sind schnell genug
- Visualisierung und Netzwerklatenz der Flaschenhals
- Schwieriger und hoch optimierter Code

**Können wir Geschwindigkeit gegen einfachere Bedienbarkeit eintauschen?**

**Idee:** Implementiere Routenplanung direkt in SQL

# Location Services in SQL

**Vorteile:**

- Einfach zu nutzen
- Daten meist eh schon in SQL
- Skalieren einfach (bestehende Datenbanksysteme, Cloud SQL)
- Auch für Nicht-Routing-Experten zu nutzen
- External-Memory-Implementierung „umsonst“

# Location Services in SQL

**Vorteile:**

- Einfach zu nutzen
- Daten meist eh schon in SQL
- Skalieren einfach (bestehende Datenbanksysteme, Cloud SQL)
- Auch für Nicht-Routing-Experten zu nutzen
- External-Memory-Implementierung „umsonst“

**Nachteile:**

- SQL viel langsamer als optimierter C++-Code
- Keine aufwändigen Datenstrukturen möglich (Graph, Priority Queue)
- Dijkstra-basierte Techniken sind keine Option

# Ideensammlung

**Welcher Ansatz?**

# Ideensammlung

**Welcher Ansatz?**

- Keine Priority Queue?

# Ideensammlung

**Welcher Ansatz?**

- Keine Priority Queue?
- Keine Graphdatenstruktur?

# Ideensammlung

**Welcher Ansatz?**

- Keine Priority Queue?
- Keine Graphdatenstruktur?

**Idee: Hub Labeling**

# Speichern der Label

- Berechne Labels in C++ (wie bei Hub Labeling)
- Aber speichere die Labels direkt in der Datenbank
- Ein Vorwärtslabel von Knoten $v$ mit $k$ Hubs:
  - erzeugt $k$ Tripel $(v, u, d(v, u))$ in Tabelle `forward`
- Rückwärtslabel genauso in `backward`
- Ca. 1.35 Milliarden Zeilen pro Tabelle (ca. 19 GB pro Richtung)

$L_f(1)$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1,0 | 4,1 | 5,2 | 7,3 |

$L_b(2)$

| | | |
|---|---|---|
| 2,0 | 6,1 | 7,4 |

`forward`

| node | hub | dist |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 4 | 1 |
| 1 | 5 | 2 |
| 1 | 7 | 3 |
| 2 | 2 | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

`backward`

| node | hub | dist |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 0 |
| 2 | 6 | 1 |
| 2 | 7 | 4 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

# Speichern der Label

- Berechne Labels in C++ (wie bei Hub Labeling)
- Aber speichere die Labels direkt in der Datenbank
- Ein Vorwärtslabel von Knoten $v$ mit $k$ Hubs:
  - erzeugt $k$ Tripel $(v, u, d(v, u))$ in Tabelle `forward`
- Rückwärtslabel genauso in `backward`
- Ca. 1.35 Milliarden Zeilen pro Tabelle (ca. 19 GB pro Richtung)
- Indiziere nach `node` (primary) und `hub` (secondary)

$L_f(1)$ | 1,0 | 4,1 | 5,2 | 7,3 |

$L_b(2)$ | 2,0 | 6,1 | 7,4 |

`forward`

| node | hub | dist |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 4 | 1 |
| 1 | 5 | 2 |
| 1 | 7 | 3 |
| 2 | 2 | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

`backward`

| node | hub | dist |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 4 | 4 |
| 2 | 2 | 0 |
| 2 | 6 | 1 |
| 2 | 7 | 4 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |

# SQL-Query

**Algorithm 1:** sql_dist

**Input:** source $s \in V$, target $t \in V$

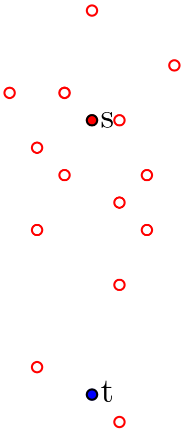
SELECT
    MIN(`forward.dist`+`backward.dist`)
FROM `forward`,`backward`
WHERE
    `forward.node` $=$ $s$ AND
    `backward.node` $=$ $t$ AND
    `forward.hub` $=$ `backward.hub`

# SQL-Query

**Algorithm 1:** sql_dist

**Input:** source $s \in V$, target $t \in V$

SELECT
    MIN(`forward.dist`+`backward.dist`)
FROM `forward`,`backward`
WHERE
    `forward.node` $=$ $s$ AND
    `backward.node` $=$ $t$ AND
    `forward.hub` $=$ `backward.hub`

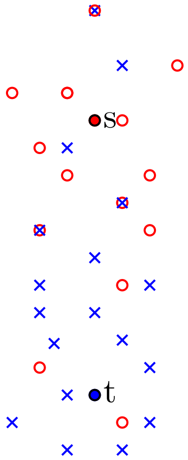


# SQL-Query

**Algorithm 1:** sql_dist

**Input:** source $s \in V$, target $t \in V$

SELECT
    MIN(`forward.dist`+`backward.dist`)
FROM `forward`,`backward`
WHERE
    `forward.node` $=$ $s$ AND
    `backward.node` $=$ $t$ AND
    `forward.hub` $=$ `backward.hub`

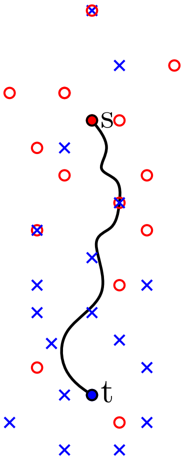


# SQL-Query

**Algorithm 1:** sql_dist

**Input:** source $s \in V$, target $t \in V$

```
SELECT
    MIN(forward.dist+backward.dist)
FROM forward,backward
WHERE
    forward.node = s AND
    backward.node = t AND
    forward.hub = backward.hub
```

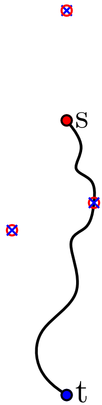


# SQL-Query

**Algorithm 1:** sql_dist

**Input:** source $s \in V$, target $t \in V$

SELECT
    MIN($\texttt{forward.dist}+\texttt{backward.dist}$)
FROM $\texttt{forward,backward}$
WHERE
    $\texttt{forward.node} = s$ AND
    $\texttt{backward.node} = t$ AND
    $\texttt{forward.hub} = \texttt{backward.hub}$

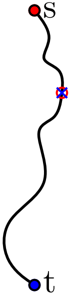


# SQL-Query

**Algorithm 1:** sql_dist

**Input:** source $s \in V$, target $t \in V$

SELECT
    MIN($\texttt{forward.dist}+\texttt{backward.dist}$)
FROM `forward,backward`
WHERE
    $\texttt{forward.node} = s$ AND
    $\texttt{backward.node} = t$ AND
    $\texttt{forward.hub} = \texttt{backward.hub}$

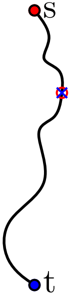


# SQL-Query

**Algorithm 1:** sql_dist

**Input:** source $s \in V$, target $t \in V$

SELECT
    MIN(`forward.dist`+`backward.dist`)
FROM `forward,backward`
WHERE
    `forward.node` $=$ $s$ AND
    `backward.node` $=$ $t$ AND
    `forward.hub` $=$ `backward.hub`




**Bemerkung:**

- berechnet nur die Distanz

# Pfadentpackung

**Idee:**

- 2 Phasen
- Speichere jeden Shortcut aus $G^+$ explizit (als Sequenz von Kanten-IDs) in Tabelle `shortcuts`
- ca. 5 GB in Tabelle

**Phase 1:**

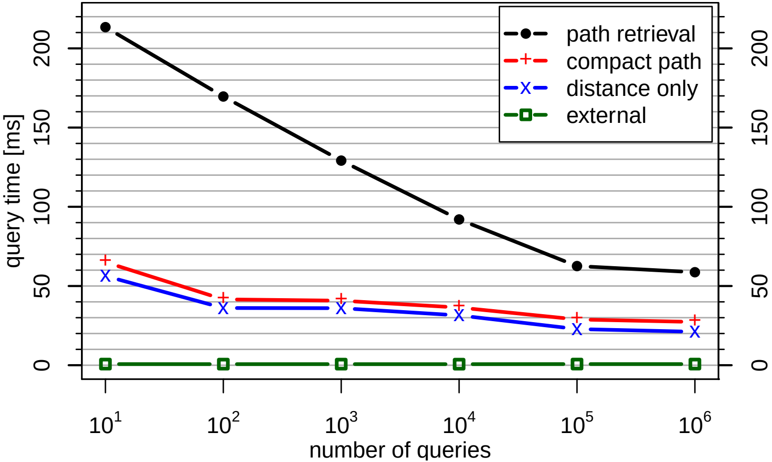
- Erzeuge Pfad in $G^+$ durch Hubs auf dem Pfad
- Erweitere Tabellen `forward` und `backward` um 2 Spalten: Parent und Shortcut
- Erhöht Speicherverbrauch der Tabelle von 19 auf 32 GB

**Phase 2:**

- Erzeuge Pfad in $G$ durch Matchen von $G^+$ mit `shortcuts`

# Ergebnisse

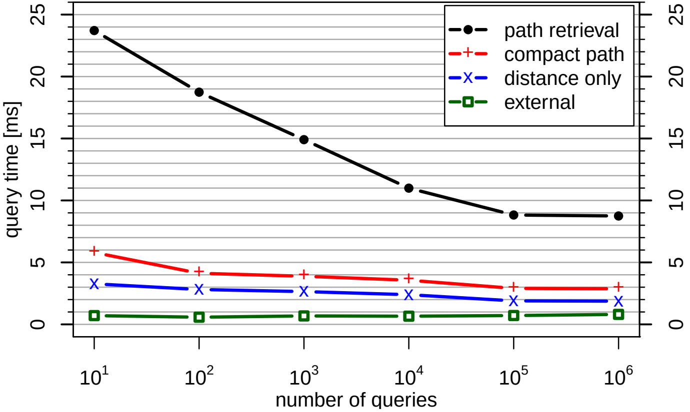
**Setup:** MS SQL Server 2008 R2 mit Daten auf HDD, kalter Cache




**Beobachtung:** Nicht schnell genug

# Ergebnisse (SSD)

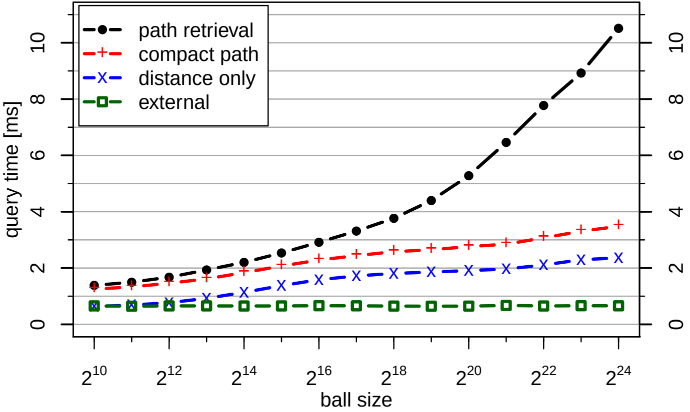
**Setup:** MS SQL Server 2008 R2 mit Daten auf SSD, kalter Cache




**Beobachtung:** SSD macht Queries schnell genug

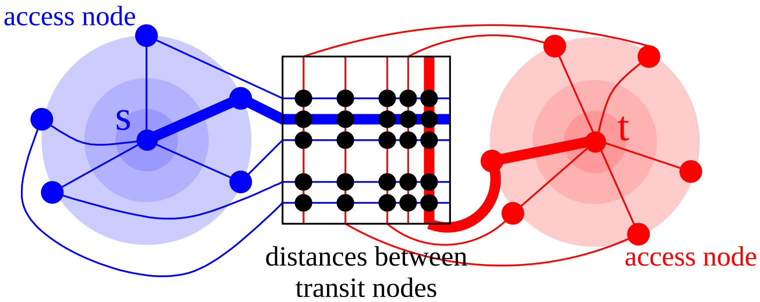
# Lokale Anfrage

**Setup:** Anfragen mit verschiedenem Rank, 10 000 Anfragen, kalter Cache

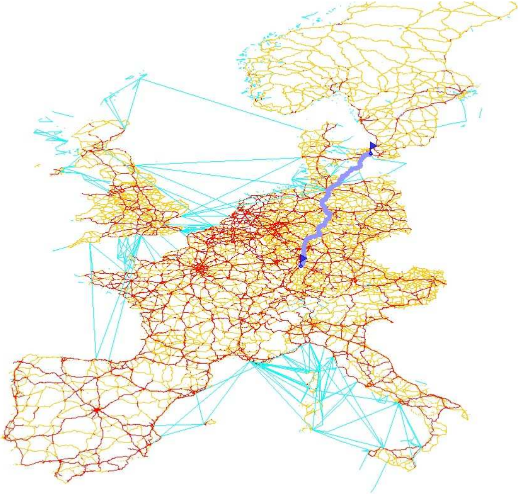



**Beobachtung:** praxisrelevante Anfragen sehr schnell

# Transit Node Routing



# Transit Node Routing



**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach…
Kopenhagen

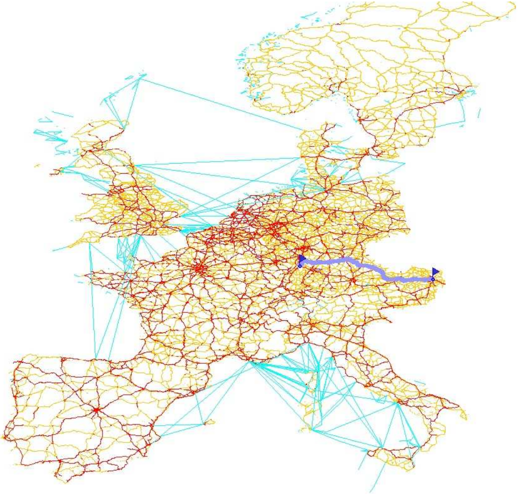
# Transit Node Routing

**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach...
Berlin

# Transit Node Routing



**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach...
Wien

# Transit Node Routing

**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach…
München

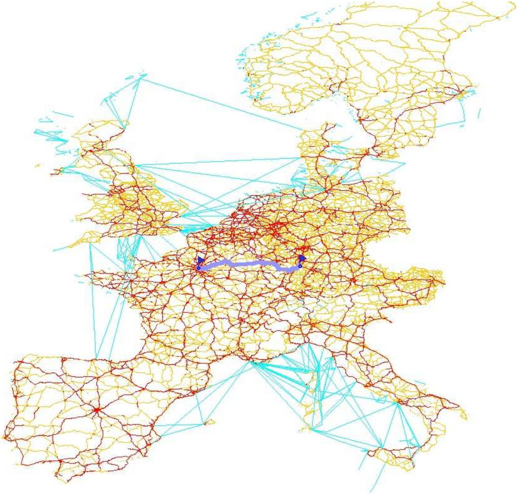
# Transit Node Routing

**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach...
Rom

# Transit Node Routing



**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach...
Paris

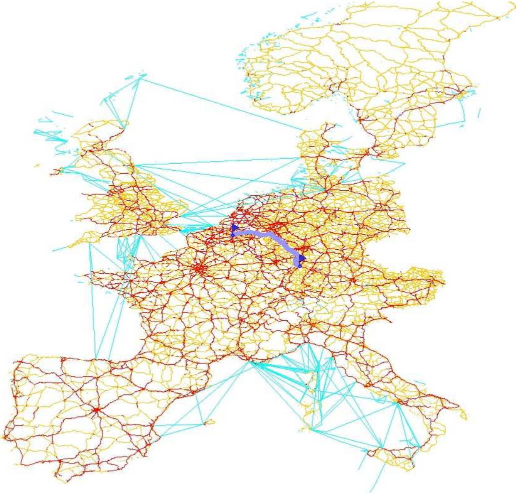
# Transit Node Routing

**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach...
London

# Transit Node Routing

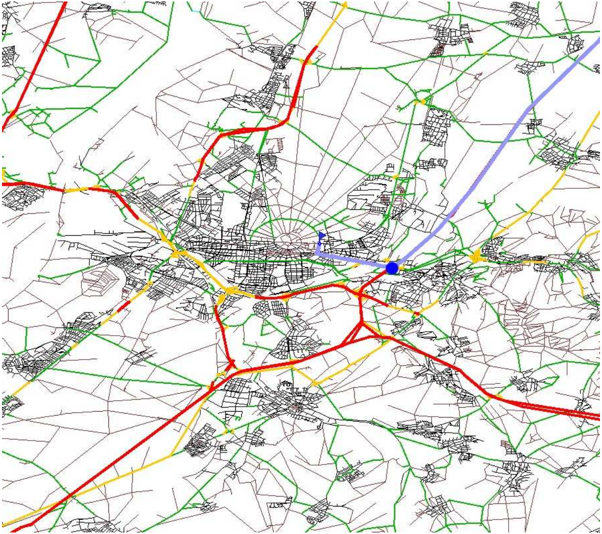


**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach...
Brüssel

# Transit Node Routing

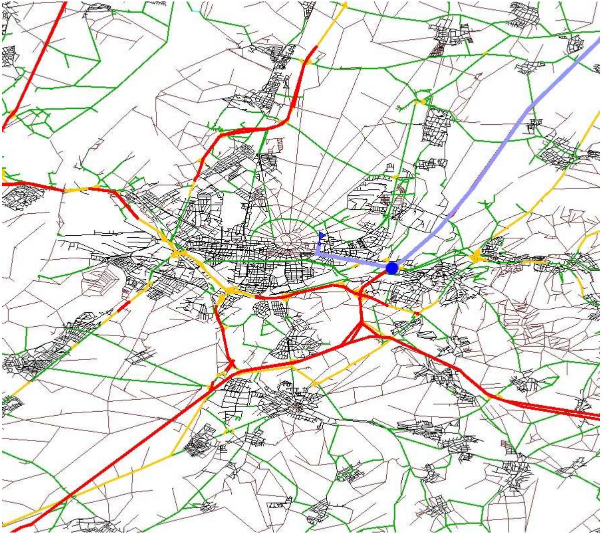


**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach…
Kopenhagen

# Transit Node Routing

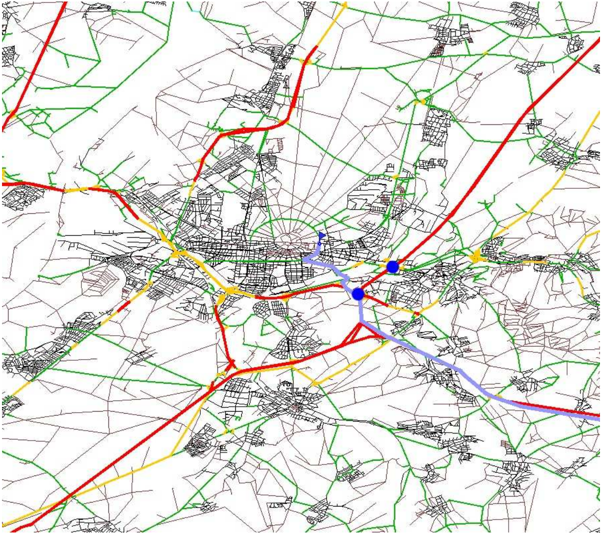


**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach…
Berlin

# Transit Node Routing

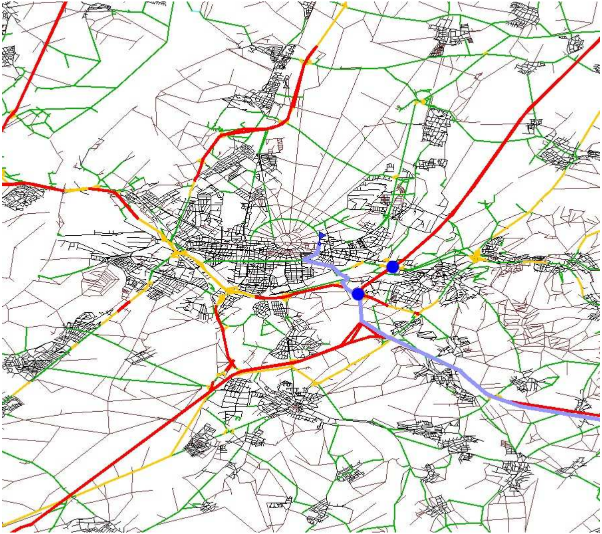


**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach. . .
Wien

# Transit Node Routing

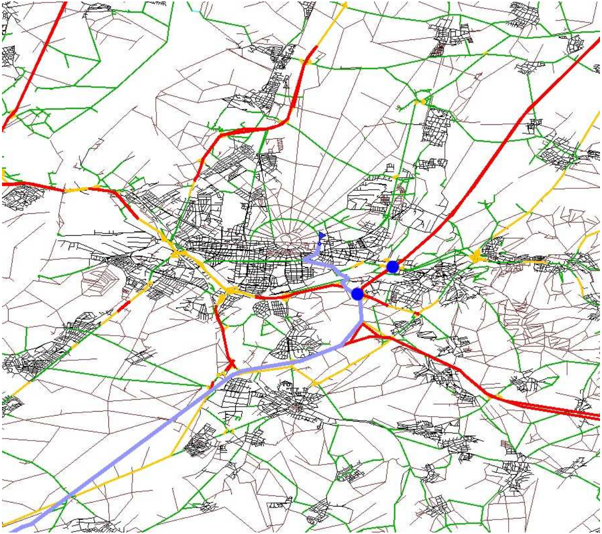


**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach. . .
München

# Transit Node Routing

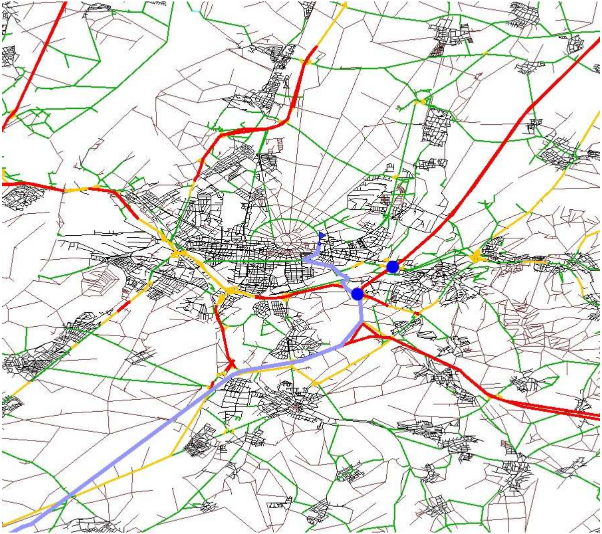


**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach...
Rom

# Transit Node Routing

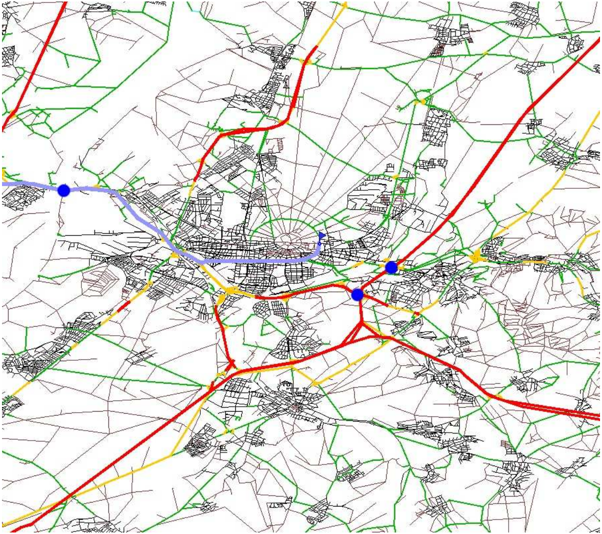


**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach. . .
Paris

# Transit Node Routing

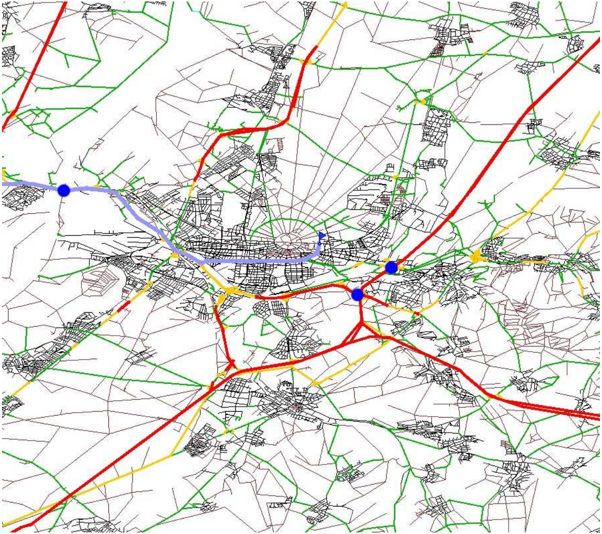


**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach...
London

# Transit Node Routing



**Beobachtung:**

- Wenn man weit weg fährt, fährt man immer an bestimmten Punkten vorbei
- Hier: von Karlsruhe aus, an drei relevanten Stellen

Karlsruhe nach...
Brüssel

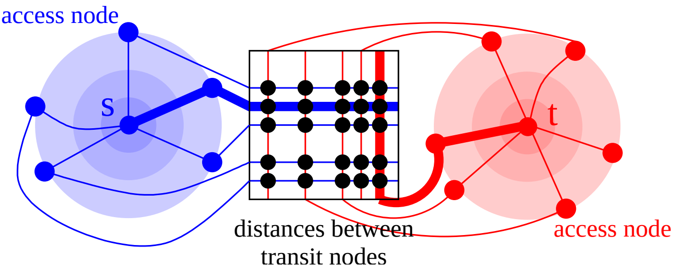
# Transit Node Routing

**Idee:**

- Reduziere Anfragen auf Zugriffe in einer quadratischen Tabelle
- Identifiziere „wichtige“ Knoten
- Vollständige Distanztabellen zwischen diesen Knoten

**Probleme:**

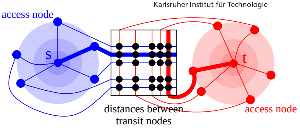
- Speicherverbrauch
- Nahe Anfragen



# Generelles TNR-Framework

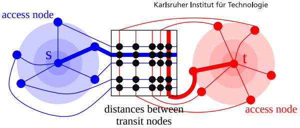
- Wähle Transit-Knoten: $\mathcal{T} \subseteq V$
- Bestimme Access-Knoten für jeden Knoten $v$:
  - Vorwärts-Access-Knoten $\overrightarrow{A}(v) \subseteq \mathcal{T}$
  - Rückwärts-Access-Knoten $\overleftarrow{A}(v) \subseteq \mathcal{T}$
- Vorberechnete Distanzen: $D_{\mathcal{T}}$ und $d_A$

# Generelles TNR-Framework



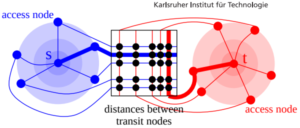

- Wähle Transit-Knoten: $\mathcal{T} \subseteq V$
- Bestimme Access-Knoten für jeden Knoten $v$:
  - Vorwärts-Access-Knoten $\overrightarrow{A}(v) \subseteq \mathcal{T}$
  - Rückwärts-Access-Knoten $\overleftarrow{A}(v) \subseteq \mathcal{T}$
- Vorberechnete Distanzen: $D_{\mathcal{T}}$ und $d_A$

# Generelles TNR-Framework




- Wähle Transit-Knoten: $\mathcal{T} \subseteq V$
- Bestimme Access-Knoten für jeden Knoten $v$:
  - Vorwärts-Access-Knoten $\overrightarrow{A}(v) \subseteq \mathcal{T}$
  - Rückwärts-Access-Knoten $\overleftarrow{A}(v) \subseteq \mathcal{T}$
- Vorberechnete Distanzen: $D_{\mathcal{T}}$ und $d_A$
- $\mathrm{dist}(s,t) \stackrel{?}{=} \min_{u \in \overrightarrow{A}(s), v \in \overleftarrow{A}(t)} \{d_A(s,u) + D_{\mathcal{T}}(u,v) + d_A(v,t)\}$

# Generelles TNR-Framework




- Wähle Transit-Knoten: $\mathcal{T} \subseteq V$
- Bestimme Access-Knoten für jeden Knoten $v$:
  - Vorwärts-Access-Knoten $\overrightarrow{A}(v) \subseteq \mathcal{T}$
  - Rückwärts-Access-Knoten $\overleftarrow{A}(v) \subseteq \mathcal{T}$
- Vorberechnete Distanzen: $D_{\mathcal{T}}$ und $d_A$
- $\mathrm{dist}(s,t) \stackrel{?}{=} \min_{u \in \overrightarrow{A}(s), v \in \overleftarrow{A}(t)} \{d_A(s,u) + D_{\mathcal{T}}(u,v) + d_A(v,t)\}$

**Berechnete Distanz nur für hinreichend weite Anfragen korrekt!**

- Locality filter: $L : V \times V \to \{\text{true}, \text{false}\}$
- true $\longrightarrow$ Fallback-Routine für lokale Anfragen
- Einseitiger Fehler erlaubt

# Zutaten TNR-Verfahren

**Also:**

- Wie Transit-Knoten bestimmen?
- Wie Access-Knoten und deren Distanz bestimmen?
- Wie Distanztabelle zwischen Transit-Knoten berechnen?
- Welcher Lokalitätsfilter?
- Wie lokale Anfragen berechnen?

# Zutaten TNR-Verfahren

**Also:**

- Wie Transit-Knoten bestimmen?
- Wie Access-Knoten und deren Distanz bestimmen?
- Wie Distanztabelle zwischen Transit-Knoten berechnen?
- Welcher Lokalitätsfilter?
- Wie lokale Anfragen berechnen?

**Ideen?**

# Zutaten TNR-Verfahren

**Also:**

- Wie Transit-Knoten bestimmen?
- Wie Access-Knoten und deren Distanz bestimmen?
- Wie Distanztabelle zwischen Transit-Knoten berechnen?
- Welcher Lokalitätsfilter?
- Wie lokale Anfragen berechnen?

**Ideen?** Verschiedene Ansätze:

- Grid-based TNR [BFM06]
- Hierarchie-basiertes TNR mit geometrischem Lokalitätsfilter [BFM+07, GSSV12]
- CH-TNR [ALS13]

# CH-TNR

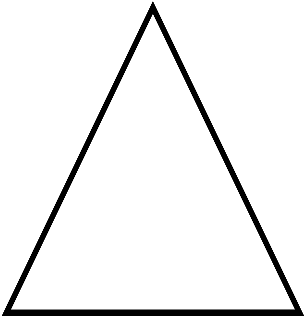
**Transit Node Routing aufbauend auf CH:**

- CH für Vorberechnung und lokale Anfrage
- Top-$k$-Knoten sind Transit-Knoten...

# CH-TNR

**Transit Node Routing aufbauend auf CH:**

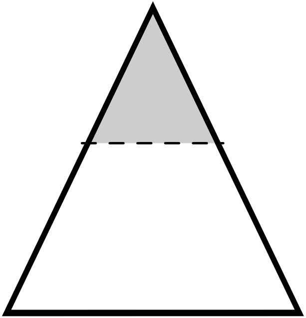
- CH für Vorberechnung und lokale Anfrage
- Top-$k$-Knoten sind Transit-Knoten...



# CH-TNR

**Transit Node Routing aufbauend auf CH:**

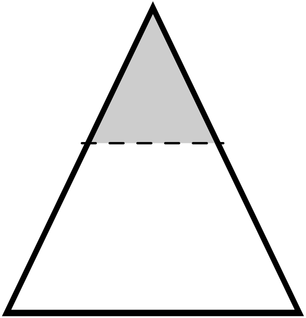
- CH für Vorberechnung und lokale Anfrage
- Top-$k$-Knoten sind Transit-Knoten...



# CH-TNR

**Transit Node Routing aufbauend auf CH:**

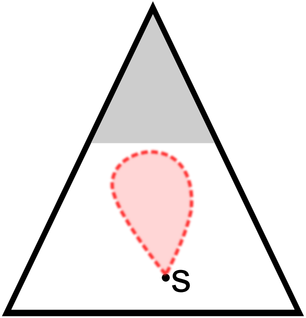
- CH für Vorberechnung und lokale Anfrage
- Top-$k$-Knoten sind Transit-Knoten...
- ...und damit die Access-Knoten berechnen



# CH-TNR

**Transit Node Routing aufbauend auf CH:**

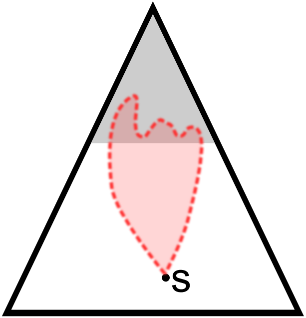
- CH für Vorberechnung und lokale Anfrage
- Top-$k$-Knoten sind Transit-Knoten...
- ...und damit die Access-Knoten berechnen



# CH-TNR

**Transit Node Routing aufbauend auf CH:**

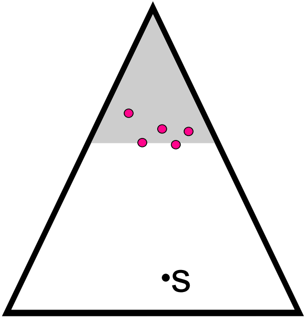
- CH für Vorberechnung und lokale Anfrage
- Top-$k$-Knoten sind Transit-Knoten...
- ...und damit die Access-Knoten berechnen



# CH-TNR

**Transit Node Routing aufbauend auf CH:**

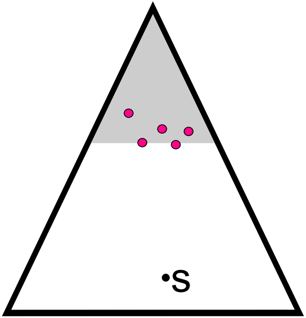
- CH für Vorberechnung und lokale Anfrage
- Top-$k$-Knoten sind Transit-Knoten...
- ...und damit die Access-Knoten berechnen



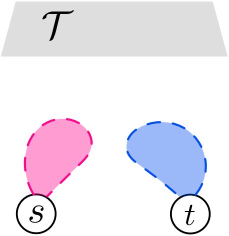
# CH-TNR

**Transit Node Routing aufbauend auf CH:**

- CH für Vorberechnung und lokale Anfrage
- Top-$k$-Knoten sind Transit-Knoten. . .
- . . . und damit die Access-Knoten berechnen
- Lokalitätsfilter?

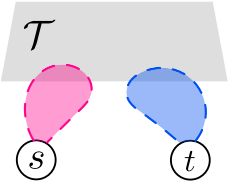


# CH-basiertes TNR




**Eigenschaften einer lokalen Anfrage:**

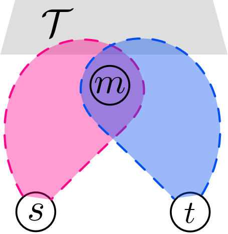
- Betrachte den höchsten Knoten $m$ auf einem kürzesten Hoch-Runter-$s$–$t$-Pfad

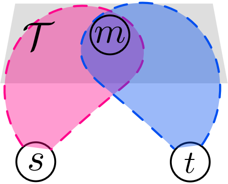


# CH-basiertes TNR

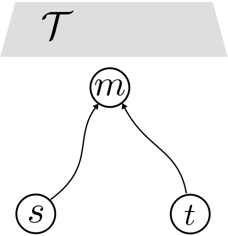
**Eigenschaften einer lokalen Anfrage:**

- Betrachte den höchsten Knoten $m$ auf einem kürzesten Hoch-Runter-$s$–$t$-Pfad



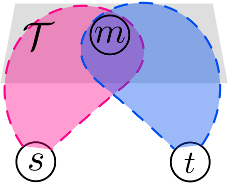



# CH-basiertes TNR




**Eigenschaften einer lokalen Anfrage:**

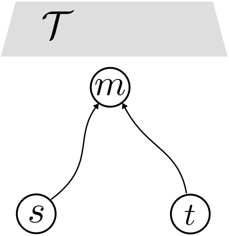
- Betrachte den höchsten Knoten *m* auf einem kürzesten Hoch-Runter-*s*–*t*-Pfad

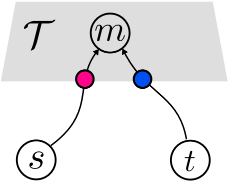


# CH-basiertes TNR

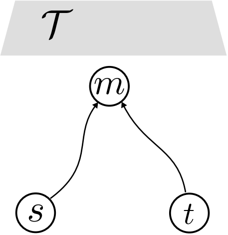
**Eigenschaften einer lokalen Anfrage:**

- Betrachte den höchsten Knoten $m$ auf einem kürzesten Hoch-Runter-$s$–$t$-Pfad
- $m \notin \mathcal{T} \iff$ lokale Anfrage



# CH-basiertes TNR

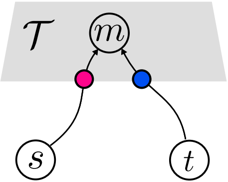



**Eigenschaften einer lokalen Anfrage:**

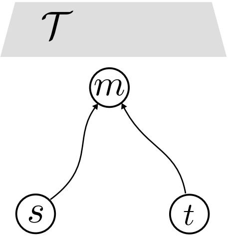
- Betrachte den höchsten Knoten $m$ auf einem kürzesten Hoch-Runter-$s$–$t$-Pfad
- $m \notin \mathcal{T} \iff$ lokale Anfrage

**Suchraum-basierter Lokalitätsfilter:**

- Speichere Suchraum unterhalb der Transit-Knoten $S : V \to V \setminus \mathcal{T}$ explizit
- Fällt bei der Access-Knoten-Berechnung als Beiprodukt ab
- Während der Anfrage: $\mathcal{L} = (S(s) \cap S(t) \neq \emptyset)$
- Braucht viel Speicher!



# CH-basiertes TNR

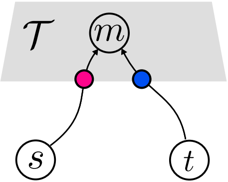



**Eigenschaften einer lokalen Anfrage:**

- Betrachte den höchsten Knoten $m$ auf einem kürzesten Hoch-Runter-$s$–$t$-Pfad
- $m \notin \mathcal{T} \iff$ lokale Anfrage

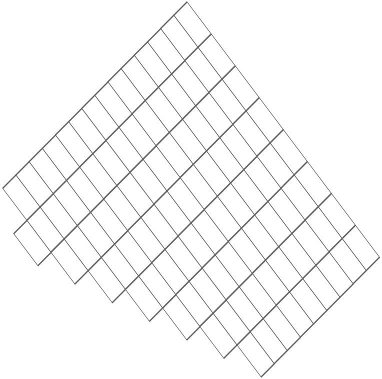
**Suchraum-basierter Lokalitätsfilter:**

- Speichere Suchraum unterhalb der Transit-Knoten $S : V \to V \setminus \mathcal{T}$ explizit
- Fällt bei der Access-Knoten-Berechnung als Beiprodukt ab
- Während der Anfrage: $\mathcal{L} = (S(s) \cap S(t) \neq \emptyset)$
- Braucht viel Speicher!
- Einseitiger Fehler erlaubt



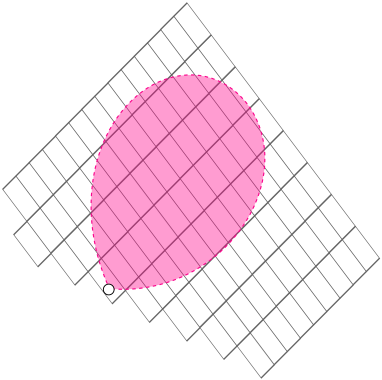
# Lokalitätsfilter

- Partitioniere Graphen in Regionen
- Überapproximation des Suchraums mittels berührter Regionen
- Wenn $x$ im Suchraum $S(s)$ ist, dann ist die Region $R(x)$ im approximierten Suchraum $S'(s)$



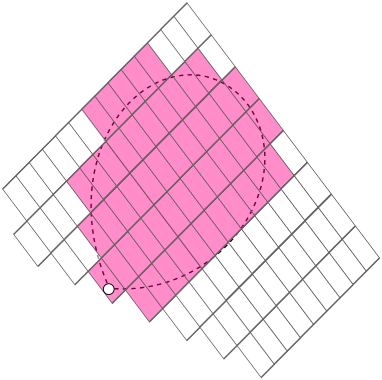
# Lokalitätsfilter

- Partitioniere Graphen in Regionen
- Überapproximation des Suchraums mittels berührter Regionen
- Wenn $x$ im Suchraum $S(s)$ ist, dann ist die Region $R(x)$ im approximierten Suchraum $S'(s)$



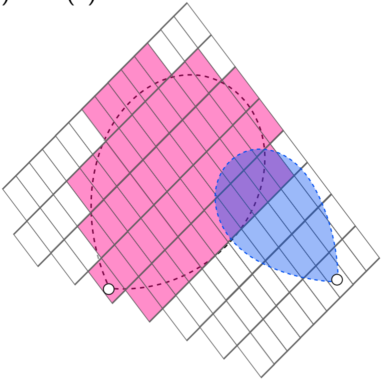
# Lokalitätsfilter

- Partitioniere Graphen in Regionen
- Überapproximation des Suchraums mittels berührter Regionen
- Wenn $x$ im Suchraum $S(s)$ ist, dann ist die Region $R(x)$ im approximierten Suchraum $S'(s)$



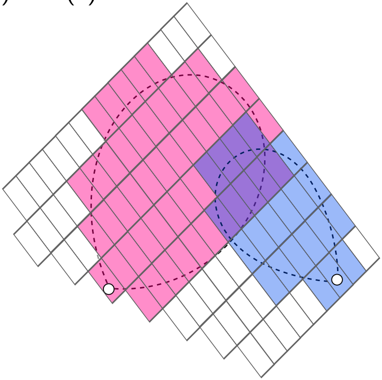
# Lokalitätsfilter

- Partitioniere Graphen in Regionen
- Überapproximation des Suchraums mittels berührter Regionen
- Wenn $x$ im Suchraum $S(s)$ ist, dann ist die Region $R(x)$ im approximierten Suchraum $S'(s)$
- $m \in S(s) \cap S(t) \implies R(m) \in S'(s) \cap S'(t)$



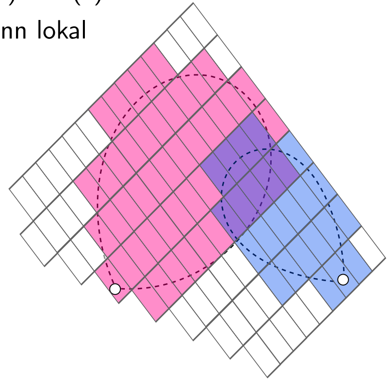
# Lokalitätsfilter

- Partitioniere Graphen in Regionen
- Überapproximation des Suchraums mittels berührter Regionen
- Wenn $x$ im Suchraum $S(s)$ ist, dann ist die Region $R(x)$ im approximierten Suchraum $S'(s)$
- $m \in S(s) \cap S(t) \implies R(m) \in S'(s) \cap S'(t)$

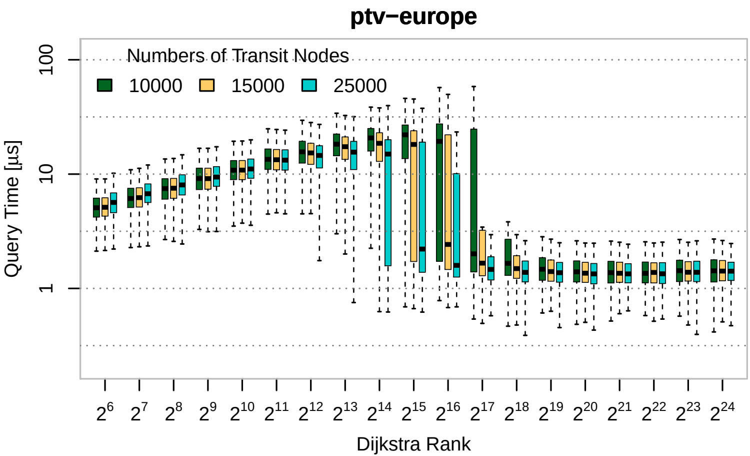


# Lokalitätsfilter

- Partitioniere Graphen in Regionen
- Überapproximation des Suchraums mittels berührter Regionen
- Wenn $x$ im Suchraum $S(s)$ ist, dann ist die Region $R(x)$ im approximierten Suchraum $S'(s)$
- $m \in S(s) \cap S(t) \Longrightarrow R(m) \in S'(s) \cap S'(t)$
- Filter: Wenn $S'(s) \cap S'(t) \neq \emptyset$ dann lokal



# Dijkstra Rank



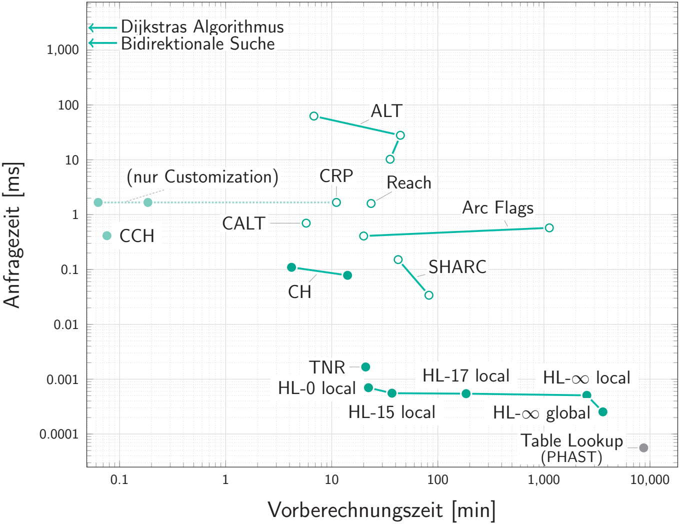

**Frage:** Welche durchschnittliche Laufzeit ergibt sich?

# Zusammenfassung

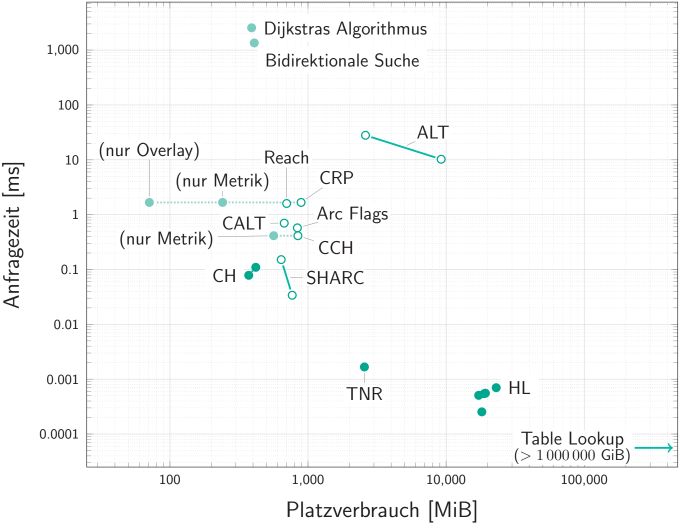
**Transit Node Routing**

- Ersetzt Suche (fast) komplett durch Table-Lookups
- 4 Zutaten:
  - Transit-Knoten
  - Distanztabelle
  - Access-Knoten
  - Locality-Filter

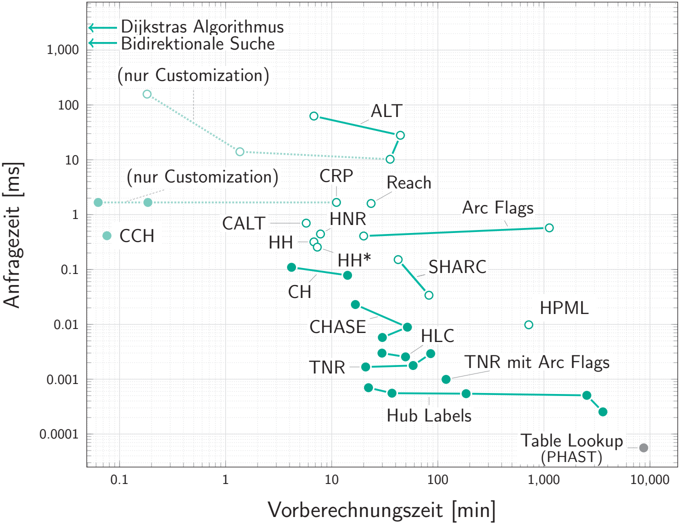
# Übersicht bisherige Techniken



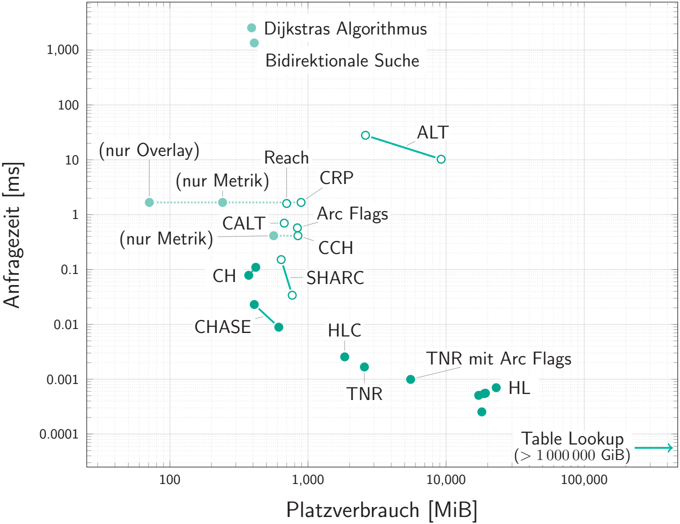
# Übersicht bisherige Techniken



# „Komplett“übersicht One-to-One



# „Komplett“übersicht One-to-One



# Literatur I


Takuya Akiba, Yoichi Iwata, and Yuichi Yoshida.
Fast exact shortest-path distance queries on large networks by pruned landmark labeling.
In *Proceedings of the 2013 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data (SIGMOD'13)*, pages 349–360. ACM Press, 2013.

Julian Arz, Dennis Luxen, and Peter Sanders.
Transit node routing reconsidered.
In *Proceedings of the 12th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'13)*, volume 7933 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 55–66. Springer, 2013.

Holger Bast, Stefan Funke, and Domagoj Matijevic.
Transit - ultrafast shortest-path queries with linear-time preprocessing.
In *The Shortest Path Problem: Ninth DIMACS Implementation Challenge* -, November 2006.

# Literatur II


Holger Bast, Stefan Funke, Domagoj Matijevic, Peter Sanders, and Dominik Schultes.
In transit to constant shortest-path queries in road networks.
In *Proceedings of the 9th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'07)*, pages 46–59. SIAM, 2007.

Maxim Babenko, Andrew V. Goldberg, Haim Kaplan, Ruslan Savchenko, and Mathias Weller.
On the complexity of hub labeling.
Technical report, ArXiv, 2015.

Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Thomas Pajor, and Renato F. Werneck.
Robust distance queries on massive networks.
In *Proceedings of the 22nd Annual European Symposium on Algorithms (ESA'14)*, volume 8737 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 321–333. Springer, September 2014.

# Literatur III


Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Ruslan Savchenko, and Renato F. Werneck.
Hub labels: Theory and practice.
In *Proceedings of the 13th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'14)*, volume 8504 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 259–270. Springer, 2014.

Cyril Gavoille, David Peleg, Stéphane Pérennes, and Ran Raz.
Distance labeling in graphs.
*Journal of Algorithms*, 53:85–112, 2004.

Robert Geisberger, Peter Sanders, Dominik Schultes, and Christian Vetter.
Exact routing in large road networks using contraction hierarchies.
*Transportation Science*, 46(3):388–404, August 2012.