



# Algorithmen für Routenplanung

3. Vorlesung, Sommersemester 2021

Tim Zeitz | 19. April 2021



# Kürzeste Wege in Straßennetzwerken

Beschleunigungstechniken

- A\*
- ALT
- CALT

# Beschleunigungstechniken

## Beobachtung:

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen



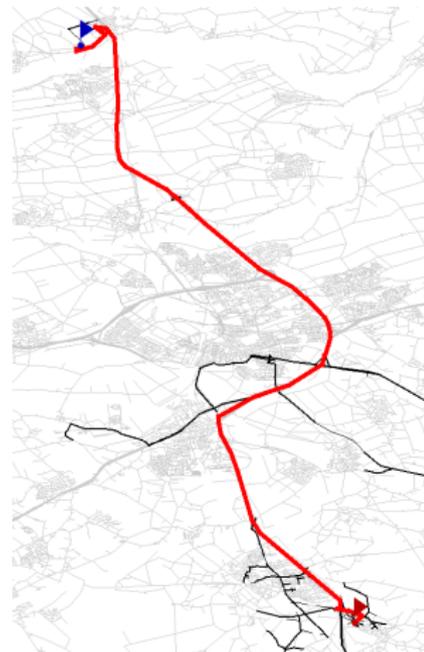
# Beschleunigungstechniken

## Beobachtung:

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen

## Idee:

- Zwei Phasen
  - Offline: Generiere Zusatzinformation in Vorberechnung
  - Online: Beschleunige Anfrage mit dieser Information
- Drei Kriterien: Vorberechnungsplatz, Vorberechnungszeit, Beschleunigung



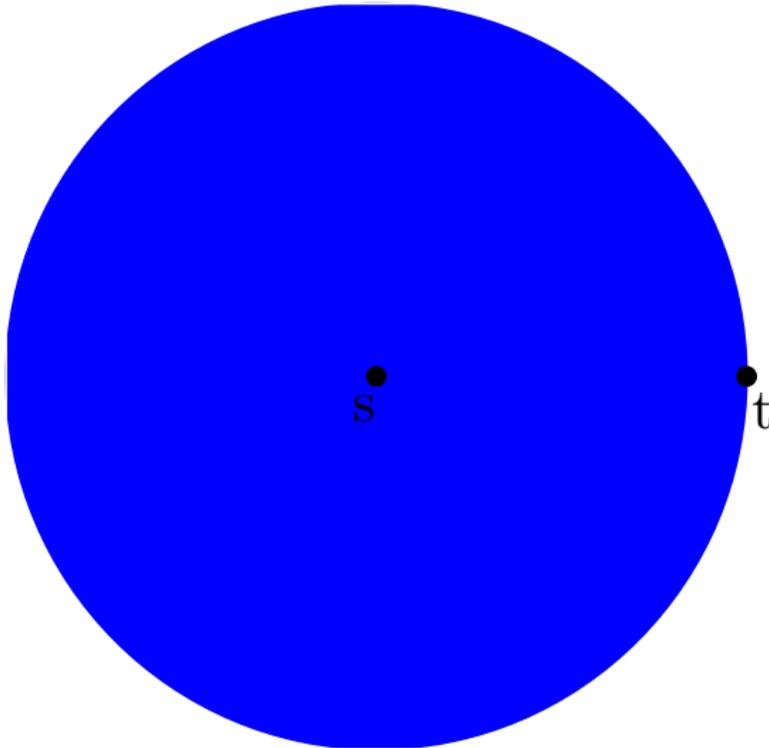
**Wie Suche zielgerichtet machen?**

## Wie Suche zielgerichtet machen?

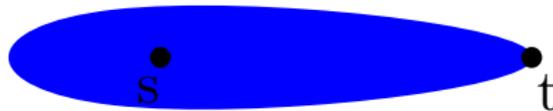
- Reihenfolge in der Knoten besucht werden ändern
- Nichtbeachten von Kanten, die in die “falsche” Richtung führen

**Jetzt:** ersteres

# Schematischer Suchraum



# Schematischer Suchraum



**A\***

## Dijkstra's Algorithmus

- benutzt  $d[v]$ , um zu entscheiden, welcher Knoten als nächstes abgearbeitet wird

## A\*

- auch zielgerichtete Suche (goal-directed search) genannt

### Idee:

- Benutze Potential  $\pi_t : V \rightarrow \mathbb{R}$
  - $\pi_t(v)$  ist ein Schätzwert für Entfernung  $d(v, t)$  zum Ziel  $t$
  - Benutze  $d[v] + \pi_t(v)$  als Key in  $Q$
- ⇒ Knoten mit geschätzt geringerer Entfernung zu  $t$  zuerst besucht

# Pseudocode A\*

---

$A^*(G = (V, E), s, t)$

---

```
1  $d[s] = 0$ 
2  $Q.clear(), Q.add(s, \pi_t(s))$ 
3 while ! $Q.empty()$  do
4    $u \leftarrow Q.deleteMin()$ 
5   break if  $u = t$ 
6   forall edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9       if  $v \in Q$  then  $Q.decreaseKey(v, d[v] + \pi_t(v))$ 
10
11      else  $Q.insert(v, d[v] + \pi_t(v))$ 
```

**Können beliebige Potentialfunktionen benutzt werden?**

## Können beliebige Potentialfunktionen benutzt werden?

- (Fast) beliebige Abarbeitungsreihenfolgen lassen sich erzeugen
- Dies kann offensichtlich zu falschen Ergebnissen führen.  
Warum sonst benutzen wir überhaupt Dijkstra und nicht Breitensuche?

## Wie kommen wir also zu zulässigen Potentialfunktionen?

# A\* – Äquivalente Formulierung



A\* auf Graph  $G = (V, E, \text{len})$ , Knoten  $s, t \in V$ , mit Potential  $\pi_t$

# A\* – Äquivalente Formulierung

A\* auf Graph  $G = (V, E, \text{len})$ , Knoten  $s, t \in V$ , mit Potential  $\pi_t$

Dijkstra auf  $\overline{G} = (V, E, \overline{\text{len}})$  mit  $\overline{\text{len}}(u, v) = \text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v)$

# A\* – Äquivalente Formulierung

A\* auf Graph  $G = (V, E, \text{len})$ , Knoten  $s, t \in V$ , mit Potential  $\pi_t$

Dijkstra auf  $\overline{G} = (V, E, \overline{\text{len}})$  mit  $\overline{\text{len}}(u, v) = \text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v)$

Beweis: Folgt direkt aus Pseudocode

# A\* – Äquivalente Formulierung

A\* auf Graph  $G = (V, E, \text{len})$ , Knoten  $s, t \in V$ , mit Potential  $\pi_t$

Dijkstra auf  $\bar{G} = (V, E, \bar{\text{len}})$  mit  $\bar{\text{len}}(u, v) = \text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v)$

Beweis: Folgt direkt aus Pseudocode

## Zulässiges Potential (feasible potential)

Eine Potentialfunktion  $\pi_t : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *zulässig*, falls  $\text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v) \geq 0$  für alle Kanten  $(u, v) \in E$ .

# A\* – Äquivalente Formulierung

A\* auf Graph  $G = (V, E, \text{len})$ , Knoten  $s, t \in V$ , mit Potential  $\pi_t$

Dijkstra auf  $\bar{G} = (V, E, \bar{\text{len}})$  mit  $\bar{\text{len}}(u, v) = \text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v)$

Beweis: Folgt direkt aus Pseudocode

## Zulässiges Potential (feasible potential)

Eine Potentialfunktion  $\pi_t : V \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *zulässig*, falls  $\text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v) \geq 0$  für alle Kanten  $(u, v) \in E$ .

Es gilt für jeden Pfad  $P = (s = v_1, \dots, v_k = t)$

$$\begin{aligned}\bar{\text{len}}(P) &= \sum_{i=1}^k \bar{\text{len}}(v_i, v_{i+1}) = \sum_{i=1}^k (\text{len}(v_i, v_{i+1}) - \pi_t(v_i) + \pi_t(v_{i+1})) \\ &= \left( \sum_{i=1}^k \text{len}(v_i, v_{i+1}) \right) - \pi_t(v_1) + \pi_t(v_k) \\ &= \text{len}(P) - \pi_t(s) + \pi_t(t).\end{aligned}$$

# Ein Beispiel - Euklidische Ebene

- Knoten sind Punkte in der (euklidischen) Ebene
- Kantenlängen sind euklidische Abstände  
(d.h.  $\text{len}(u, v) = \|u - v\|_2$ ).
- $\pi_t(v) = \|v - t\|_2$

# Ein Beispiel - Euklidische Ebene

- Knoten sind Punkte in der (euklidischen) Ebene
- Kantenlängen sind euklidische Abstände (d.h.  $\text{len}(u, v) = \|u - v\|_2$ ).
- $\pi_t(v) = \|v - t\|_2$

$\pi_t$  ist zulässiges Potential, denn

$$\text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v) = \|u - v\|_2 - \|u - t\|_2 + \|v - t\|_2 \geq 0$$

wegen Dreiecksungleichung ( $\Delta$ -UGL)

$$\|u - v\|_2 + \|v - t\|_2 \geq \|u - t\|_2$$

# Ein Beispiel II

## Idee:

- Knoten besitzen Geokoordinaten
- Kanten besitzen Fahrtgeschwindigkeiten
- es gibt eine Maximalgeschwindigkeit  $v_{\max}$  in  $G$
- nimm  $\|u - t\|_2 / v_{\max}$  als Potential

# Ein Beispiel II

## Idee:

- Knoten besitzen Geokoordinaten
- Kanten besitzen Fahrtgeschwindigkeiten
- es gibt eine Maximalgeschwindigkeit  $v_{\max}$  in  $G$
- nimm  $\|u - t\|_2 / v_{\max}$  als Potential

Ist zulässiges Potential, denn

$$\text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v) = \frac{\|u - v\|_2}{v(u,v)} - \frac{\|u - t\|_2}{v_{\max}} + \frac{\|v - t\|_2}{v_{\max}} \geq 0$$

# Ein Beispiel II

## Idee:

- Knoten besitzen Geokoordinaten
- Kanten besitzen Fahrtgeschwindigkeiten
- es gibt eine Maximalgeschwindigkeit  $v_{\max}$  in  $G$
- nimm  $\|u - t\|_2 / v_{\max}$  als Potential

Ist zulässiges Potential, denn

$$\text{len}(u, v) - \pi_t(u) + \pi_t(v) = \frac{\|u - v\|_2}{v(u,v)} - \frac{\|u - t\|_2}{v_{\max}} + \frac{\|v - t\|_2}{v_{\max}} \geq 0$$

## Probleme (bei Straßengraphen):

- Overhead zur Berechnung des Potentials  $\|u - t\|_2 / v_{\max}$
- Schlechte untere Schranke an die tatsächliche Reisezeit
- deswegen praktisch keine Beschleunigung in Transportnetzen

- Intuition:  $\pi_t(v)$  ist ein Schätzwert für  $d(v, t)$
- Falls  $\pi_t$  zulässig und  $\pi_t(t) = 0$ , so ist das Potential  $\pi_t(v)$  eine untere Schranke für  $d(v, t)$ .
- Bessere untere Schranken ergeben kleinere Suchräume

- Intuition:  $\pi_t(v)$  ist ein Schätzwert für  $d(v, t)$
- Falls  $\pi_t$  zulässig und  $\pi_t(t) = 0$ , so ist das Potential  $\pi_t(v)$  eine untere Schranke für  $d(v, t)$ .
- Bessere untere Schranken ergeben kleinere Suchräume
- Ist  $\pi_t(v) = d(v, t)$  für alle  $v \in V$ , so werden nur Knoten auf kürzesten  $s$ - $t$ -Wegen abgearbeitet.

- Intuition:  $\pi_t(v)$  ist ein Schätzwert für  $d(v, t)$
- Falls  $\pi_t$  zulässig und  $\pi_t(t) = 0$ , so ist das Potential  $\pi_t(v)$  eine untere Schranke für  $d(v, t)$ .
- Bessere untere Schranken ergeben kleinere Suchräume
- Ist  $\pi_t(v) = d(v, t)$  für alle  $v \in V$ , so werden nur Knoten auf kürzesten  $s$ - $t$ -Wegen abgearbeitet.
- $\pi$  und  $\pi + c, c \in \mathbb{R}$  haben gleiche reduzierte Kosten

## Kombinierbarkeit von Potentialen

Seien  $\pi_1$  und  $\pi_2$  zulässige Potentiale. Dann ist  $p = \max\{\pi_1, \pi_2\}$  (komponentenweises Maximum) auch ein zulässiges Potential.

## Kombinierbarkeit von Potentialen

Seien  $\pi_1$  und  $\pi_2$  zulässige Potentiale. Dann ist  $p = \max\{\pi_1, \pi_2\}$  (komponentenweises Maximum) auch ein zulässiges Potential.

### Herleitung

$$\text{len}(u, v) - \pi_t^1(u) + \pi_t^1(v) \geq 0$$

$$\text{len}(u, v) - \pi_t^2(u) + \pi_t^2(v) \geq 0$$

$$\text{len}(u, v) - \pi_t^1(u) + \max\{\pi_t^1(v), \pi_t^2(v)\} \geq 0$$

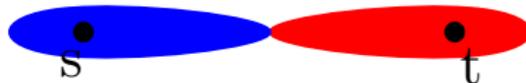
$$\text{len}(u, v) - \pi_t^2(u) + \max\{\pi_t^1(v), \pi_t^2(v)\} \geq 0$$

$$\text{len}(u, v) - \max\{\pi_t^1(u), \pi_t^2(u)\} + \max\{\pi_t^1(v), \pi_t^2(v)\} \geq 0$$

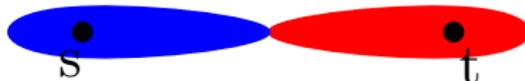
# Bidirektionaler $A^*$



# Bidirektionaler A\*



# Bidirektionaler A\*



Zur Erinnerung Bidirektionaler Dijkstra:

- alternierende/parallele Vorwärts- und Rückwärtssuche
- Vorwärts-  $\vec{Q}$  und Rückwärtsqueue  $\overleftarrow{Q}$
- Tentative Distanz  $\mu$
- Abbruchkriterium:  $\mu \leq \minKey(\vec{Q}) + \minKey(\overleftarrow{Q})$  ?

# Bidirektionaler A\*

## Erster Ansatz:

- benutze Vorwärtspot.  $\pi_f$  und Rückwärtspot.  $\pi_b$

# Bidirektionaler A\*

## Erster Ansatz:

- benutze Vorwärtspot.  $\pi_f$  und Rückwärtspot.  $\pi_b$

## Problem:

## Erster Ansatz:

- benutze Vorwärtspot.  $\pi_f$  und Rückwärtspot.  $\pi_b$

## Problem:

- Suchen operieren auf unterschiedlichen Längenfunktionen
- ⇒ Abbruchkriterium Bidirektionaler Dijkstra funktioniert nicht mehr
- konservatives Abbruchkriterium: stoppe erst, wenn  $\minKey(\vec{Q}) > \mu$  oder  $\minKey(\overleftarrow{Q}) > \mu$

## Zweiter Ansatz:

- Wann operieren Suchen auf dem gleichen Graphen?
- wenn reduzierte Kosten gleich:

$$\begin{aligned}\text{len}_{\pi_b}(v, u) &= \text{len}_{\pi_f}(u, v) \\ \text{len}(u, v) - \pi_b(v) + \pi_b(u) &= \text{len}(u, v) - \pi_f(u) + \pi_f(v) \\ -\pi_b(v) + \pi_b(u) &= -\pi_f(u) + \pi_f(v) \\ \pi_b(u) + \pi_f(u) &= \pi_b(v) + \pi_f(v)\end{aligned}$$

⇒ Also muss gelten:  $\pi_b + \pi_f \equiv \text{const.}$

## Idee:

- Kombiniere  $\pi_f$  und  $\pi_b$  zu  $p_f + p_b \equiv 0$ :

$$p_f = \frac{\pi_f - \pi_b}{2} \quad p_b = \frac{\pi_b - \pi_f}{2} = -p_f$$

- $-\pi_b$  ist ein zulässiges Potential auf  $\vec{G}$
- $\sim$  Durchschnitt der reduzierten Kosten

## Somit

- wie bidirektionaler Dijkstra
- aber mit  $d(s, u) + p_f(u)$  und  $d(v, t) + p_b(v)$  als keys
- stoppe wenn  $\minKey(\vec{Q}) + \minKey(\overleftarrow{Q}) > \mu_{p_f} = \mu + p_f(s) - p_f(t) = \mu$
- dadurch bidirektional zielgerichtet

# ALT

- Der ALT-Algorithmus ist  $A^*$  mit einer speziellen vorberechneten Potentialfunktion
- ALT steht für  $A^*$ , landmarks, triangle-inequality

## Vorbereitung

- Dazu wird eine kleine Menge  $L$  ( $\approx 16$ ) an Knoten ausgewählt (Landmarken)
- Für jede Landmarke  $\ell$  und jeden Knoten  $v \in V$  werden die Distanzen  $d(v, \ell)$  und  $d(\ell, v)$  vorberechnet (da Graph gerichtet)

# Dreiecksungleichung für Graphen

Für alle Knoten  $s, u, t \in V$  gilt

$$d(s, u) + d(u, t) \geq d(s, t)$$

Beweis:  $d(s, t)$  laut Definition kürzeste-Weg-Distanz. Weg über  $u$  muss also mindestens genauso lang sein.

# Potentiale durch Landmarken

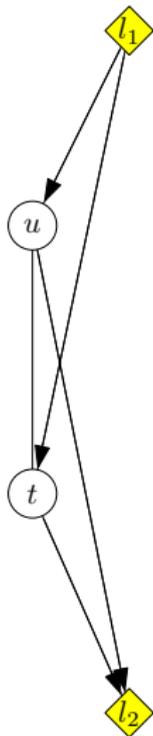
$\Delta$ -UGL

$$d(s, u) + d(u, t) \geq d(s, t)$$

also gilt im Beispiel für  $l_1, l_2$ :

$$d(l_1, u) + d(u, t) \geq d(l_1, t)$$

$$d(u, t) + d(t, l_2) \geq d(u, l_2)$$



# Potentiale durch Landmarken

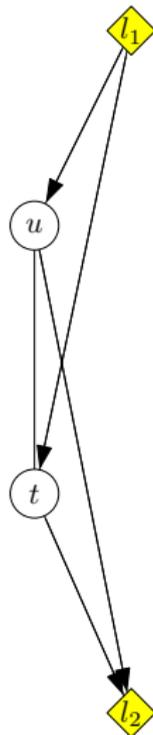
$\Delta$ -UGL

$$d(s, u) + d(u, t) \geq d(s, t)$$

also gilt im Beispiel für  $l_1, l_2$ :

$$d(u, t) \geq d(l_1, t) - d(l_1, u)$$

$$d(u, t) \geq d(u, l_2) - d(t, l_2)$$



# Potentiale durch Landmarken

$\Delta$ -UGL

$$d(s, u) + d(u, t) \geq d(s, t)$$

also gilt im Beispiel für  $l_1, l_2$ :

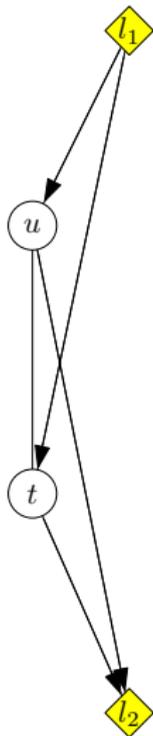
$$d(u, t) \geq d(l_1, t) - d(l_1, u)$$

$$d(u, t) \geq d(u, l_2) - d(t, l_2)$$

Benutze für alle Knoten  $u, t, l \in V$  die Potentiale

$$\pi_t^+(u) = d(l, t) - d(l, u) \leq d(u, t)$$

$$\pi_t^-(u) = d(u, l) - d(t, l) \leq d(u, t)$$



## Satz

Die Potentiale

$$\pi_t^{\ell+}(u) = d(\ell, t) - d(\ell, u)$$

$$\pi_t^{\ell-}(u) = d(u, \ell) - d(t, \ell)$$

sind zulässig für jede Landmarke  $\ell \in L$ .

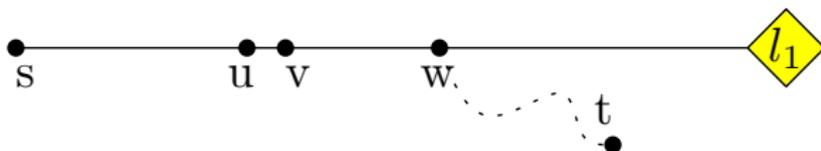
**Beweis:** Mit  $\Delta$ -UGL für Graphen.

## Korollar

Für eine Menge  $L$  von Landmarken ist das Potential

$$\pi_t^L(u) = \max_{\ell \in L} \{ \max \{ \pi_t^{\ell+}(u), \pi_t^{\ell-}(u) \} \}$$

zulässig.



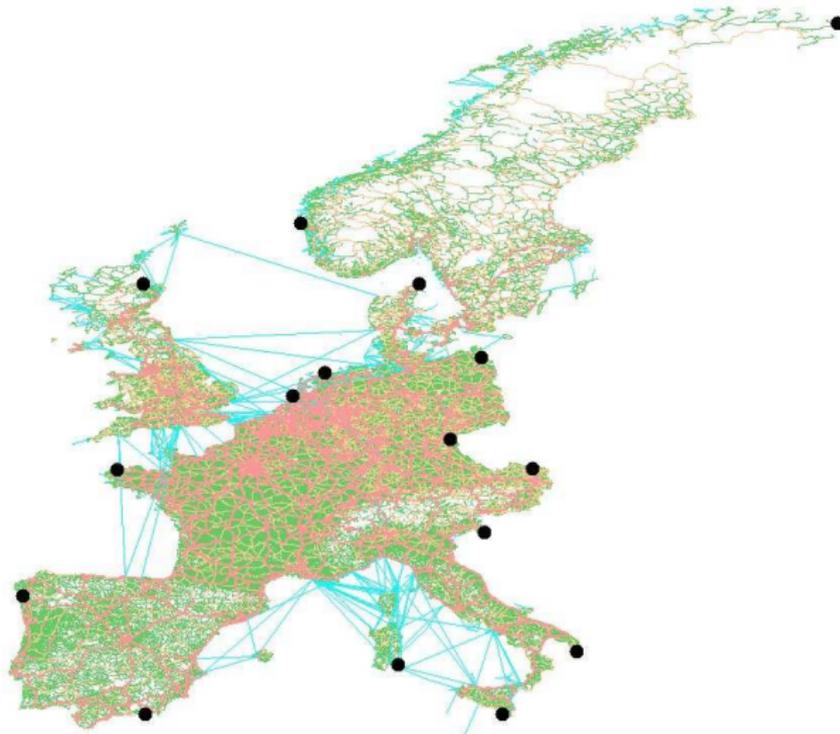
## Was sind gute Landmarken?

- $\pi_t^{\ell_1}(u) = d(u, \ell_1) - d(t, \ell_1)$ ,  $\pi_t^{\ell_1}(v) = d(v, \ell_1) - d(t, \ell_1)$
  - also  $\text{len}_\pi(u, v) = \text{len}(u, v) - d(u, \ell_1) + d(v, \ell_1) = 0$
- ⇒ gemeinsame Kanten (kürzester Weg und Weg zur Landmarke) haben reduzierte Kosten von 0

## Also:

- “gute” Landmarken überdecken viele Kanten für viele  $s, t$ -Paare
- trifft unter anderem zu, wenn “hinter” vielen Knoten
- am Rand des Graphen

# Beispiel gute Landmarken



## mehrere Ansätze:

- brute force: teste alle Knotenteilmengen der Größe  $|L|$ :

$$\mathcal{O}(n^{|L|} \cdot \underbrace{n(m + n \log n)}_{\text{all pair shortest path}})$$

- + höchste Beschleunigung
- zu lange Vorberechnung

## mehrere Ansätze:

- brute force: teste alle Knotenteilmengen der Größe  $|L|$ :  
$$\mathcal{O}(n^{|L|} \cdot \underbrace{n(m + n \log n)}_{\text{all pair shortest path}})$$
  - + höchste Beschleunigung
  - zu lange Vorberechnung
- wähle zufällig
  - + schnellste Vorberechnung
  - schlechte Beschleunigung

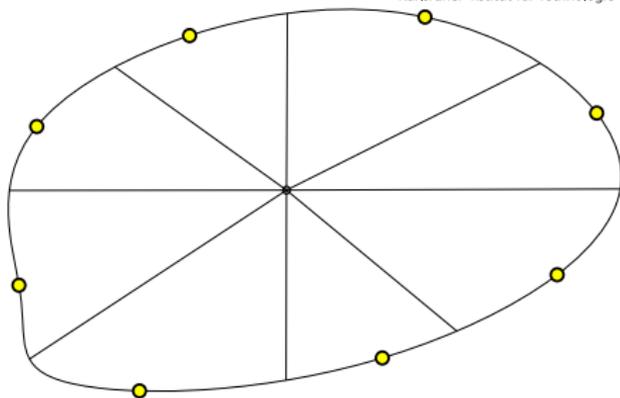
## mehrere Ansätze:

- brute force: teste alle Knotenteilmengen der Größe  $|L|$ :  
$$\mathcal{O}(n^{|L|} \cdot \underbrace{n(m + n \log n)}_{\text{all pair shortest path}})$$
  - + höchste Beschleunigung
  - zu lange Vorberechnung
- wähle zufällig
  - + schnellste Vorberechnung
  - schlechte Beschleunigung
- mehrere Heuristiken, die versuchen den Rand zu finden
  - planar
  - farthest
  - avoid
  - lokale Optimierung (maxCover)

# Planar-Landmarken

## Vorgehen:

- suche Mittelpunkt  $c$  des Graphen
- teile Graphen in  $k$  Teile
- in jedem Teil wähle Knoten mit maximalen Abstand zu  $c$  als Landmarke



## Anmerkungen:

- benötigt Einbettung
- am besten kombiniert mit weiteren Optimierungen

---

## Farthest-Landmarks( $G, k$ )

---

```
1  $L \leftarrow \emptyset$ 
2 while  $|L| < k$  do
3   if  $|L| = 0$  then DIJKSTRA( $G, \text{RANDOMNODE}$ )
4
5   else DIJKSTRA( $G, L$ )
6
7    $u \leftarrow$  last settled node
8    $L \leftarrow L \cup \{u\}$ 
```

---

### Anmerkungen:

- Multi-Startknoten Dijkstra
- schlecht für kleine  $k$
- erste Landmarke schlecht
- weitere Landmarken massiv abhängig von erster

## Idee:

- Identifiziere rekursiv Teile des Graphen, für die die bisherigen Landmarken  $L$  keine guten Schranken liefern

## Vorgehen:

- Berechne kürzeste-Wege-Baum  $T_r$  von (zufälligem) Knoten  $r$
- Für jeden Knoten  $u$ :  $weight(u) := d(r, u) - \pi_u^L(r)$   
Je größer das Gewicht desto schlechter die aktuelle Abschätzung für  $u$
- Betrachte Teilbaum  $T_u$ :  $size(u) := \begin{cases} 0 & L \cap T_u \neq \emptyset \\ \sum_{v \in T_u} weight(v) & \text{sonst} \end{cases}$   
Summe der Gewichte des Teilbaums von  $u$
- Sei  $w := \arg \max_{u \in T_r} size(u)$   
Teilbaum  $T_w$  hat (von  $r$  aus betrachtet) keine Landmarke "hinter" sich und in Summe die schlechteste Abschätzung
- Traversiere  $T_w$ , folge jeweils dem Kind maximaler Größe
- das erreichte Blatt wird zu  $L$  hinzugefügt

## Problem:

- konstruktive Heuristik
- anfangs gewählte Landmarken eventuell suboptimal

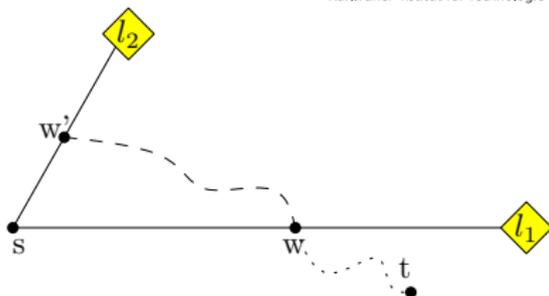
## Idee:

- lokale Optimierung
- berechne mehr landmarken als nötig ( $\approx 4k$ )
- wähle beste durch Optimierungsfunktion, z.B.
  - ① maximiere Anzahl überdeckter Kanten, d.h.  $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) = 0$
  - ② maximiere  $\pi(s)$  für 1 Mio.  $s$ - $t$  Paare (simuliert Anfragen)
- Avoid + Funktion 1 wird maxCover genannt

# Anfragen: Aktive Landmarken

## Problem:

- Landmarken können Suche in die falsche Richtung ziehen
- Auswertung von vielen Landmarken erzeugt großen overhead



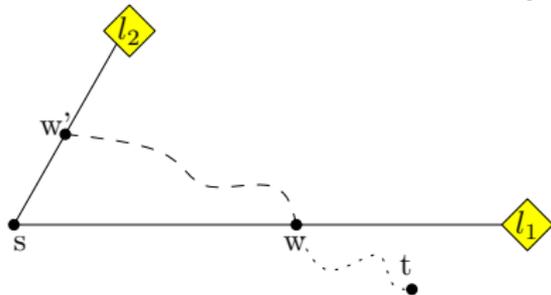
## Lösung:

- wähle während Initialisierung eine Teilmenge von  $L$  als aktiv
- diese, für die  $\pi_t^\ell(s)$  maximal sind
- Führe die Suche nur mit aktiven Landmarken aus

# Anfragen: Aktive Landmarken

## Problem:

- Landmarken können Suche in die falsche Richtung ziehen
- Auswertung von vielen Landmarken erzeugt großen overhead



## Verbesserungen:

- Benutze Heuristik um während der Suche die Wahl der aktiven Landmarken anzupassen.
- Starte mit zwei Landmarken, füge während der Suche weitere hinzu.
- Schlechte Landmarken können auch wieder inaktiviert werden.

Der Suchraum von Dijkstra's Algorithmus

$$V(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) \leq d(s, t)\}$$

ist ein graphentheoretischer Kreis.

Der Suchraum von ALT ist (vgl. Pseudocode)

$$V^L(s, t) \subseteq \{v \in V \mid d(s, v) + \pi^L(v) \leq d(s, t)\}$$

mit Potentialen

$$\pi_t^L(v) = \max_{\ell \in L} \{\max\{\pi_t^{\ell+}(v), \pi_t^{\ell-}(v)\}\}$$

$$\pi_t^{\ell+}(v) = d(\ell, t) - d(\ell, v)$$

$$\pi_t^{\ell-}(v) = d(v, \ell) - d(t, \ell)$$

Der Suchraum von ALT ist (vgl. Pseudocode)

$$V^L(s, t) \subseteq \{v \in V \mid d(s, v) + \pi^L(v) \leq d(s, t)\}$$

mit Potentialen

$$\pi_t^L(v) = \max_{\ell \in L} \{\max\{\pi_t^{\ell+}(v), \pi_t^{\ell-}(v)\}\}$$

$$\pi_t^{\ell+}(v) = d(\ell, t) - d(\ell, v)$$

$$\pi_t^{\ell-}(v) = d(v, \ell) - d(t, \ell)$$

Wir betrachten jedes  $\ell \in L$  einzeln, einsetzen oben:

$$V_{\ell+}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) + \pi_t^{\ell+}(v) \leq d(s, t)\}$$

$$V_{\ell-}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) + \pi_t^{\ell-}(v) \leq d(s, t)\}$$

Der Suchraum von ALT ist (vgl. Pseudocode)

$$V^L(s, t) \subseteq \{v \in V \mid d(s, v) + \pi^L(v) \leq d(s, t)\}$$

mit Potentialen

$$\pi_t^L(v) = \max_{\ell \in L} \{\max\{\pi_t^{\ell+}(v), \pi_t^{\ell-}(v)\}\}$$

$$\pi_t^{\ell+}(v) = d(\ell, t) - d(\ell, v)$$

$$\pi_t^{\ell-}(v) = d(v, \ell) - d(t, \ell)$$

Wir betrachten jedes  $\ell \in L$  einzeln, einsetzen oben:

$$V_{\ell+}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) + d(\ell, t) - d(\ell, v) \leq d(s, t)\}$$

$$V_{\ell-}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) + d(v, \ell) - d(t, \ell) \leq d(s, t)\}$$

Der Suchraum von ALT ist (vgl. Pseudocode)

$$V^L(s, t) \subseteq \{v \in V \mid d(s, v) + \pi^L(v) \leq d(s, t)\}$$

mit Potentialen

$$\pi_t^L(v) = \max_{\ell \in L} \{\max\{\pi_t^{\ell+}(v), \pi_t^{\ell-}(v)\}\}$$

$$\pi_t^{\ell+}(v) = d(\ell, t) - d(\ell, v)$$

$$\pi_t^{\ell-}(v) = d(v, \ell) - d(t, \ell)$$

Wir betrachten jedes  $\ell \in L$  einzeln, einsetzen oben:

$$V_{\ell+}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) - d(\ell, v) \leq d(s, t) - d(\ell, t)\}$$

$$V_{\ell-}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) + d(v, \ell) \leq d(s, t) + d(t, \ell)\}$$

$$V_{\ell-}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) + d(v, \ell) \leq d(s, t) + d(t, \ell)\}$$

ist eine graphentheoretische Ellipse. (Mit Brennpunkten  $s$  und  $\ell$ )

$$V_{\ell^-}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) + d(v, \ell) \leq d(s, t) + d(t, \ell)\}$$

ist eine graphentheoretische Ellipse. (Mit Brennpunkten  $s$  und  $\ell$ )

$$V_{\ell^+}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) - d(\ell, v) \leq d(s, t) - d(\ell, t)\}$$

ist eine graphentheoretische Hyperbel. (Mit Brennpunkten  $s$  und  $\ell$ )

$$V_{\ell-}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) + d(v, \ell) \leq d(s, t) + d(t, \ell)\}$$

ist eine graphentheoretische Ellipse. (Mit Brennpunkten  $s$  und  $\ell$ )

$$V_{\ell+}(s, t) = \{v \in V \mid d(s, v) - d(\ell, v) \leq d(s, t) - d(\ell, t)\}$$

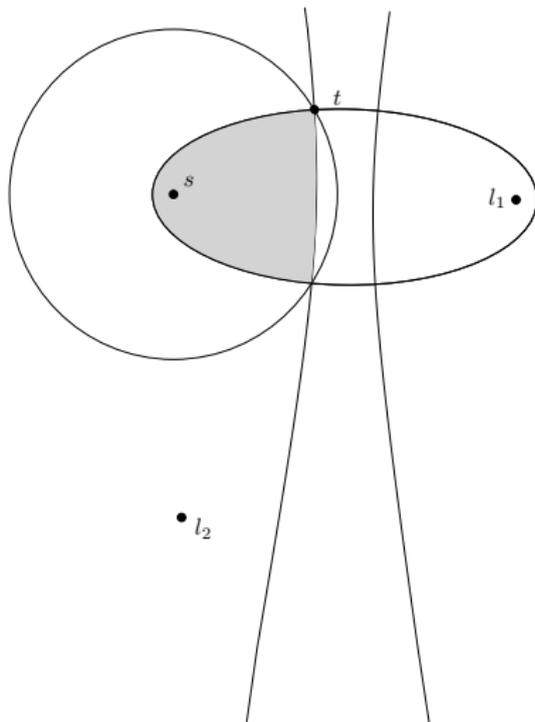
ist eine graphentheoretische Hyperbel. (Mit Brennpunkten  $s$  und  $\ell$ )

Der Suchraum von ALT

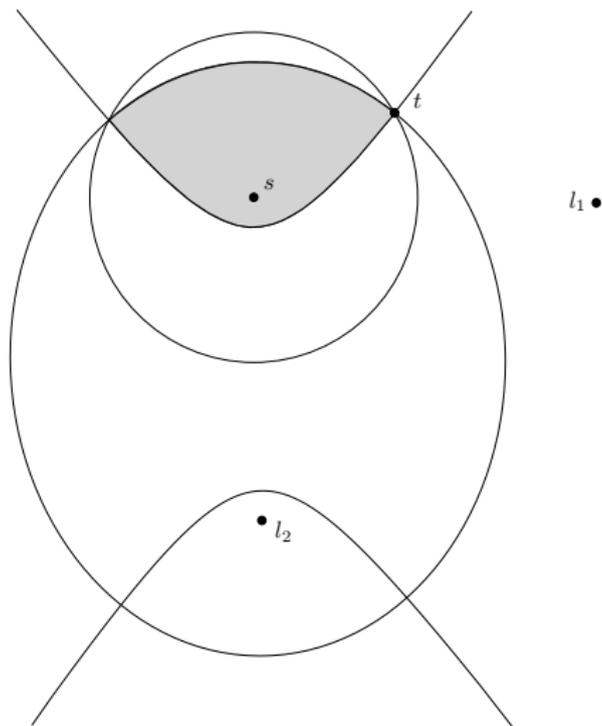
$$V^L(s, t) \subseteq \{v \in V \mid d(s, v) + \pi^L(v) \leq d(s, t)\}$$

ist also die Schnittmenge aus den Ellipsen und Hyperbeln über alle Landmarken in  $L$ .

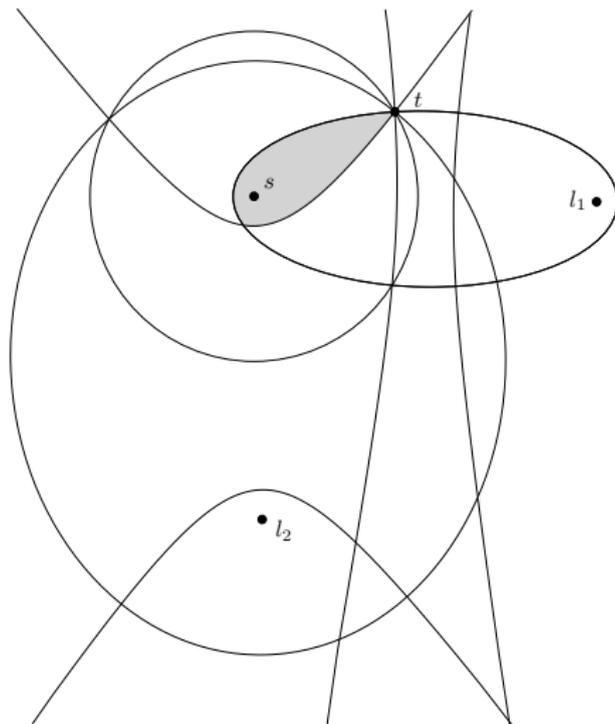
# Eine Intuition für den ALT-Suchraum



# Eine Intuition für den ALT-Suchraum



# Eine Intuition für den ALT-Suchraum



## Eingaben:

- Straßennetzwerke
  - Europa: 18 Mio. Knoten, 42 Mio. Kanten
  - USA: 22 Mio. Knoten, 56 Mio. Kanten

## Evaluation:

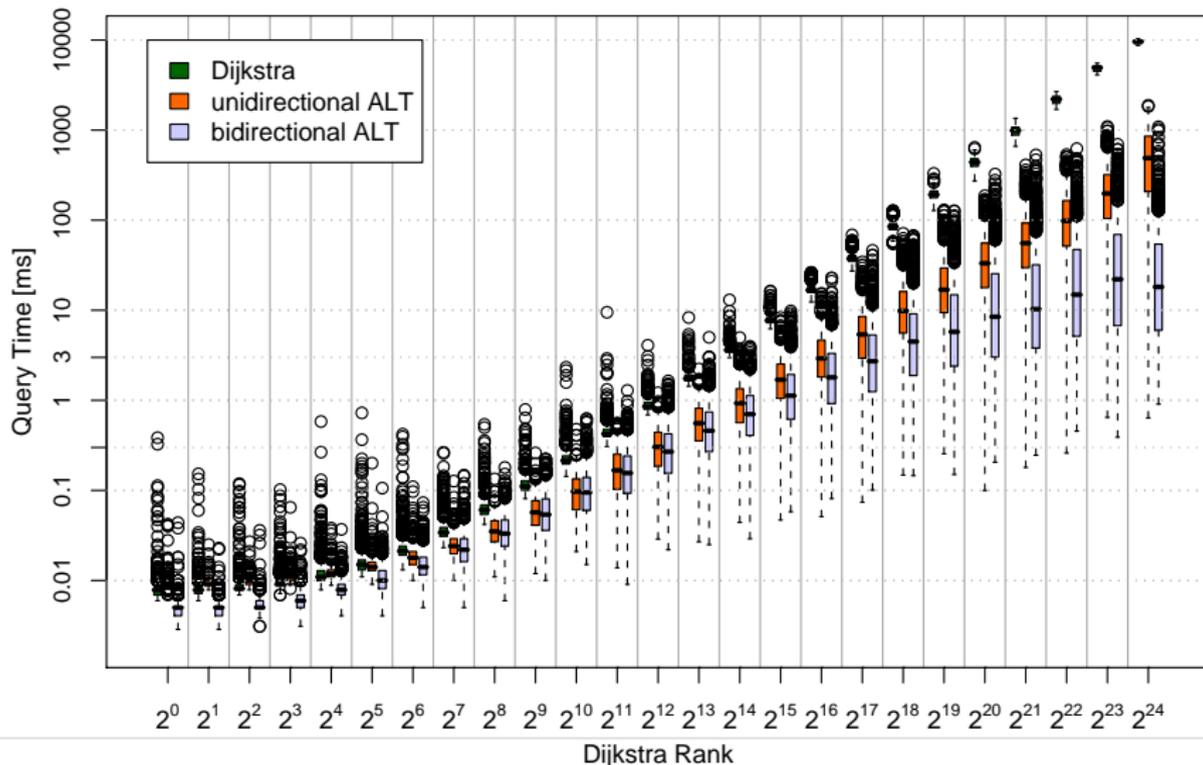
- Vorberechnung in Minuten und zusätzliche Bytes pro Knoten
- durchschnittlicher Suchraum (# abgearbeitete Knoten) und Suchzeiten (in *ms*) von 10 000 Zufallsanfragen

**Vorberechnung:** Bis 24 Landmarken maxCover, sonst avoid.

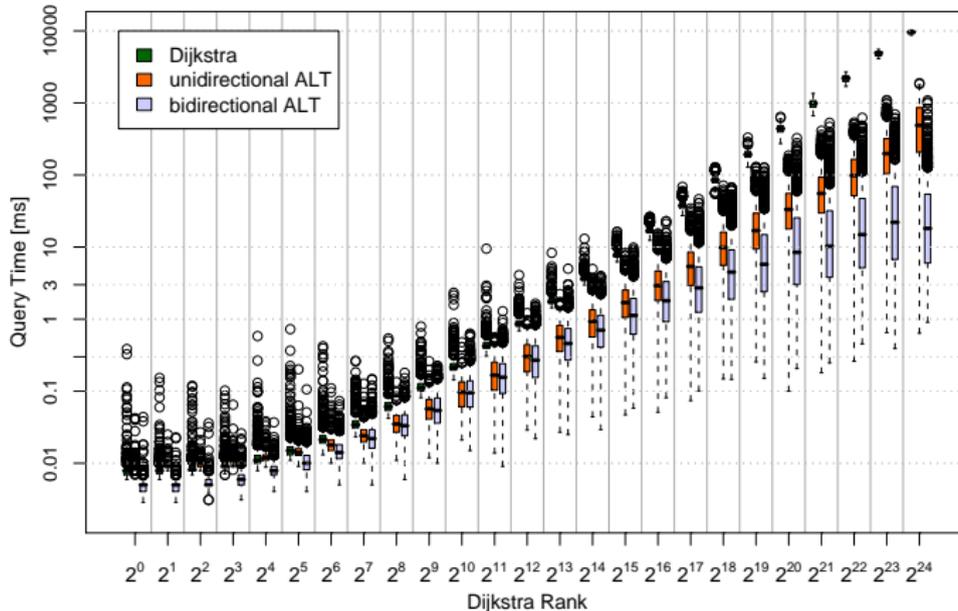
	algorithm	Prepro		Query Unidir.			Query Bidir.		
		time [min]	space [B/n]	# settled nodes	time [ms]	spd up	# settled nodes	time [ms]	spd up
<b>EUR</b>	Dijkstra	0	0	9 114 385	5 591.6	1.0	4 764 110	2 713.2	2.1
	ALT-4	12.1	32	1 289 070	469.1	11.9	355 442	254.1	22.0
	ALT-8	26.1	64	1 019 843	391.6	14.3	163 776	127.8	43.8
	ALT-16	85.1	128	815 639	327.6	17.1	74 669	53.6	104.3
	ALT-24	145.2	192	742 958	303.7	18.4	56 338	44.2	126.5
	ALT-32	27.1	256	683 566	301.4	18.6	40 945	29.4	190.2
	ALT-64	68.2	512	604 968	288.5	19.4	25 324	19.6	285.3
<b>USA</b>	Dijkstra	0	0	11 847 523	6 780.7	1.0	7 345 846	3 751.4	1.8
	ALT-8	44.5	64	922 897	329.8	20.6	328 140	219.6	30.9
	ALT-16	103.2	128	762 390	308.6	22.0	180 804	129.3	52.4
	ALT-32	35.8	256	628 841	291.6	23.3	109 727	79.5	85.3
	ALT-64	92.9	512	520 710	268.8	25.2	68 861	48.9	138.7

- bidirektionale Suche: Beschleunigung von 2
- unidirektionaler ALT: mehr als 16 Landmarken nicht sinnvoll
- bidirektionaler ALT: verdoppelung der Landmarken halbiert den Suchraum (ungefähr)
- 16 Landmarken: Beschleunigung  $\approx 100$  für Europa
- 64 Landmarken: Beschleunigung  $\approx 300$  für Europa
- hoher Speicherverbrauch (Graph-DS: 424 MB, pro Landmarke: 144 MB, Europa)
- USA schlechter als Europa (Vermutung: schlechtere Hierarchie)

# Dijkstra-Rank – Bidirektionale Suche



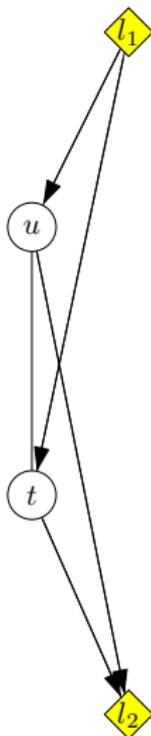
# Dijkstra-Rank – Bidirektionale Suche



- Beschleunigung steigt mit Rang, gering für nahe Anfragen
- hohe Varianz, Ausreißer bis zu Faktor 100 langsamer als Median

# Zusammenfassung ALT

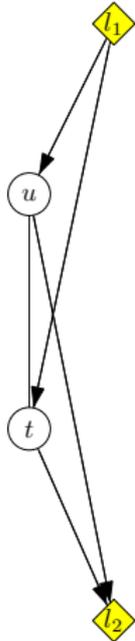
- Zielgerichtet durch geänderte Reihenfolge, wie Knoten abgearbeitet werden
- wird erreicht durch hinzufügen eines Knotenpotentials  $\pi$
- korrekt wenn  $\text{len}(u, v) - \pi(u) + \pi(v) \geq 0$  für alle Kanten
- Potentiale durch Landmarken
- kann bidirektional gemacht werden
- Beschleunigung von bis zu 300 gegenüber Dijkstra
- aber hoher Platzverbrauch (Reduktion später)
- hohe Varianz (manche Anfragen haben keine guten Landmarken)



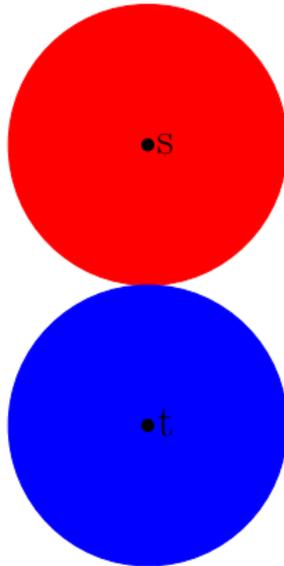
# CALT

# Core-ALT

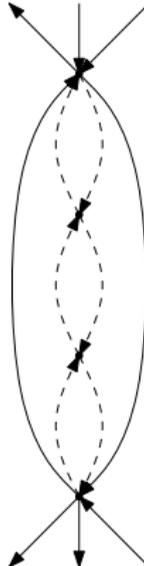
Landmarken



Bidirektionale  
Suche



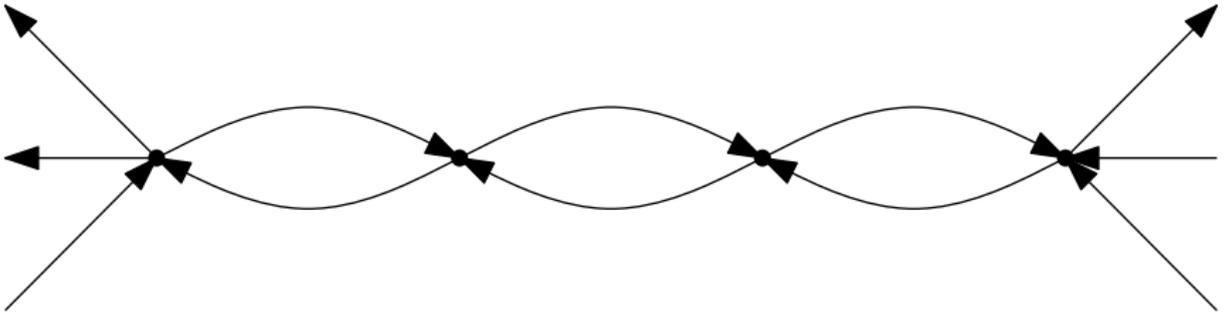
Kontraktion

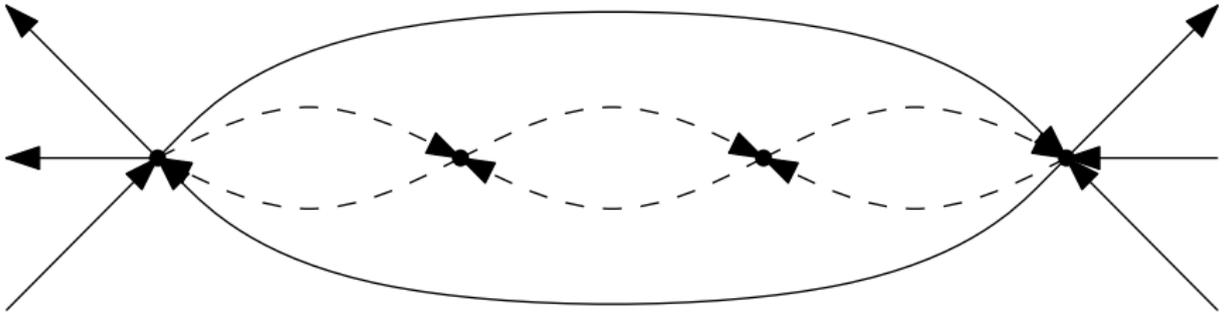


Arc-Flags

Table-Lookups

# Wdh: Kontraktion





- Identifiziere “unwichtige” Knoten
- Menge “unwichtige” Knoten: Component, verbliebene: Core
- Füge Shortcuts zwischen Core-Knoten hinzu, um Distanz innerhalb Core zu erhalten
- Generelles Query-Framework: Betrachte ggfs. Component um  $s$  und  $t$ , nutze sonst nur Core und Shortcuts

## Motivation:

- ALT ist robust gegenüber der Eingabe
- aber hoher Speicherverbrauch

## Hauptidee:

- berechne ALT nur auf kleinem Subgraphen

## Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (Kern)

S ●

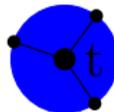
● t

## Vorbereitung

- kontrahiere Graphen zu Kern
- Landmarken nur im Kern

## Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (Kern)



## Vorbereitung

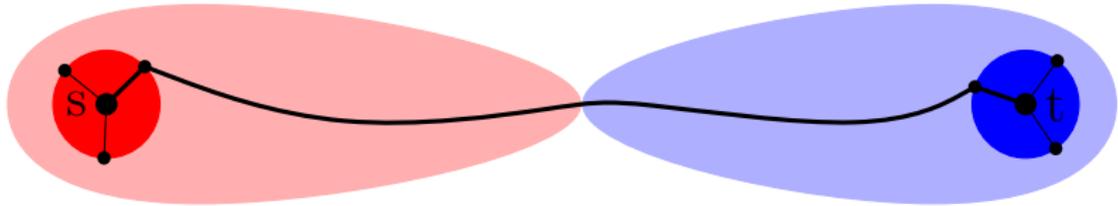
- kontrahiere Graphen zu Kern
- Landmarken nur im Kern

## Anfrage

- Initialphase: normaler Dijkstra

## Idee

- begrenze Beschleunigungstechnik auf kleinen Subgraphen (Kern)



## Vorbereitung

- kontrahiere Graphen zu Kern
- Landmarken nur im Kern

## Anfrage

- Initialphase: normaler Dijkstra
- Im Kern: benutze Landmarken und Shortcuts(!)

# Proxy Knoten

## Problem:

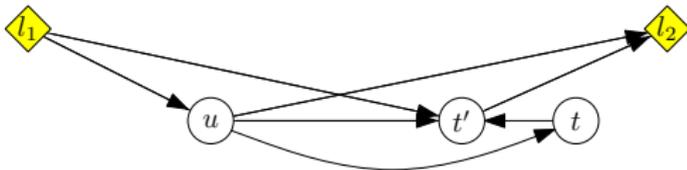
- ALT braucht Potential von jedem Knoten zu  $t$  und  $s$
- $s$  und/oder  $t$  könnten außerhalb des Kerns liegen
- somit keine Abstandswerte von den Landmarken zu  $s$  und  $t$

## Problem:

- ALT braucht Potential von jedem Knoten zu  $t$  und  $s$
- $s$  und/oder  $t$  könnten außerhalb des Kerns liegen
- somit keine Abstandswerte von den Landmarken zu  $s$  und  $t$

## Lösung:

- bestimme Proxy-Knoten  $t'$  für  $t$  ( $s$  analog),  $t'$  im Kern
- neue Ungleichungen:



$$d(u, t) \geq d(u, l_2) - d(t', l_2) - d(t, t')$$

$$d(u, t) \geq d(l_1, t') - d(l_1, u) - d(t, t')$$

# Einfluss Anzahl Landmarken

L	no cont. ( $c=0.0, h=0$ )				low cont. ( $c=1.0, h=20$ )			
	Prepro.		Query		Prepro.		Query	
	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]
8	26.1	64	163 776	127.8	7.1	10.9	12 529	10.25
16	85.2	128	74 669	53.6	9.4	14.9	5 672	5.77
32	27.1	256	40 945	29.4	6.8	23.0	3 268	2.97
64	68.2	512	25 324	19.6	8.5	36.2	2 233	2.16

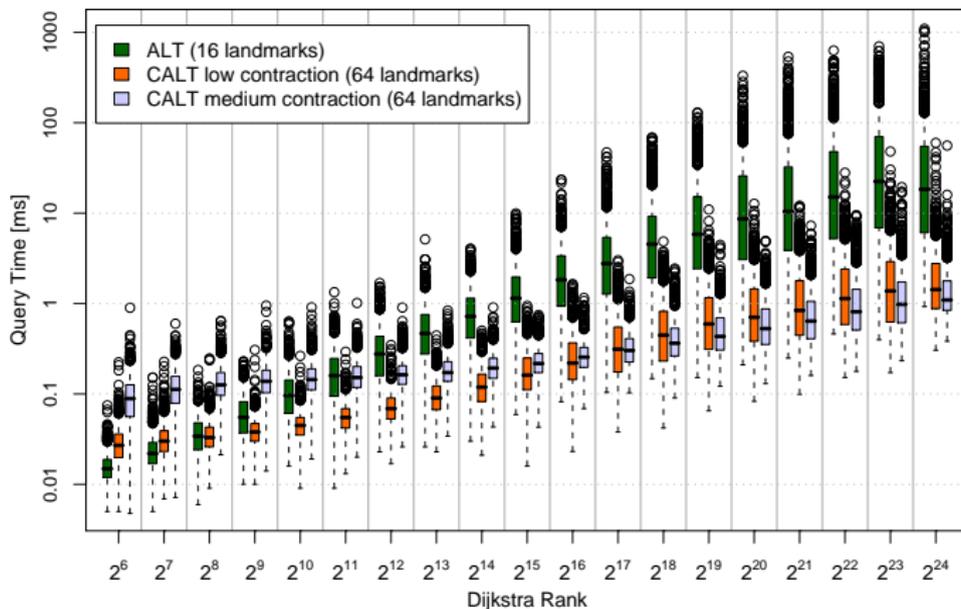
L	med: $c=2.5, h=50$				high: $c=5.0, h=100$			
	Prepro.		Query		Prepro.		Query	
	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]	time [min]	space [B/n]	#settled nodes	time [ms]
8	10.1	7.0	4 431	3.98	17.8	5.9	4 106	2.51
16	11.0	8.2	2 456	2.33	18.3	6.5	3 500	2.23
32	10.0	10.6	1 704	1.66	17.7	7.6	3 264	2.01
64	10.5	15.4	1 394	1.34	18.0	9.8	3 126	1.67

$|L| \leq 16$ : maxcover,  $|L| \geq 32$ : avoid

$h$ : shortcut max hop number

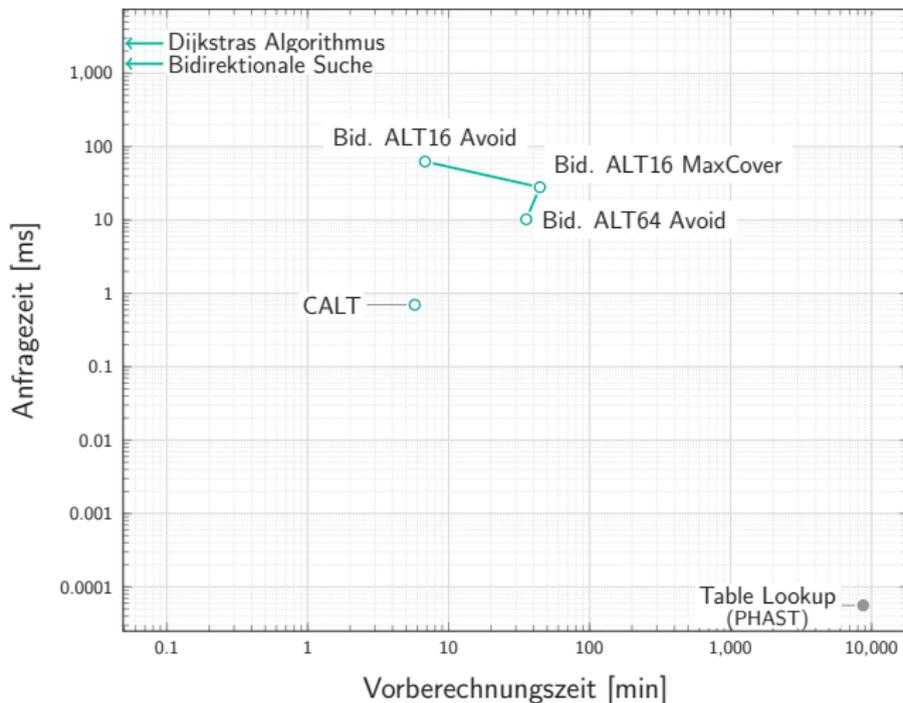
$c$ : contraction parameter (inserted shortcuts / node degree)

# Dijkstra Rank ALT vs CALT

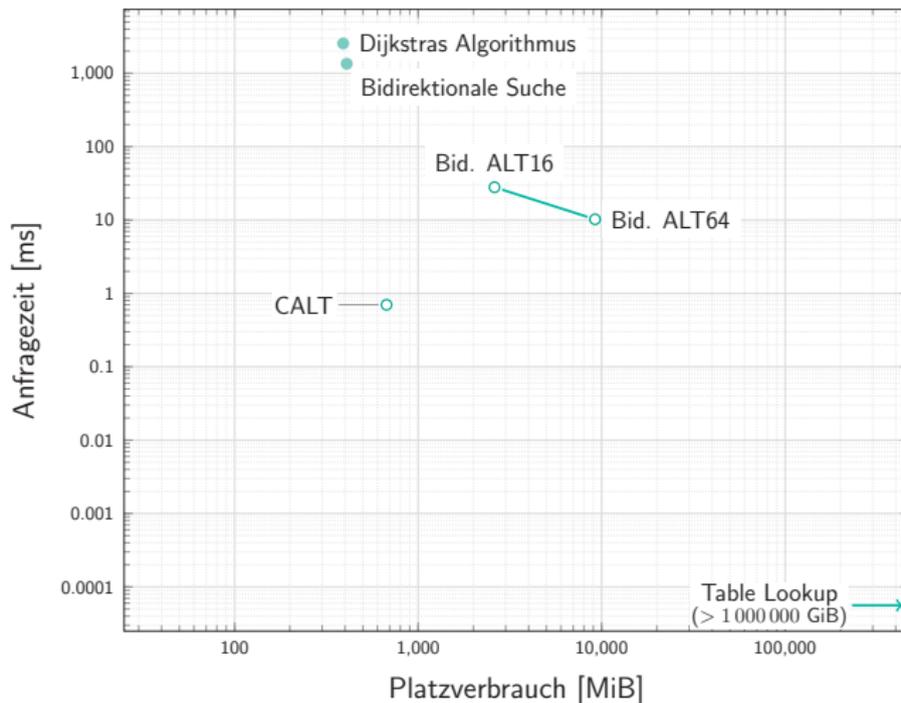


- Weit: CALT mehr als eine Größenordnung schneller als ALT, wobei kleinerer Kern ("medium contraction") besser
- Nah: je kleiner Kern, desto langsamer (da Initialphase unbeschl.)

# Übersicht bisherige Techniken



# Übersicht bisherige Techniken



# Mittwoch, 21. Mai 2021

-  Reinhard Bauer, Daniel Delling, Peter Sanders, Dennis Schieferdecker, Dominik Schultes, and Dorothea Wagner.  
Combining Hierarchical and Goal-Directed Speed-Up Techniques for Dijkstra's Algorithm.  
*ACM Journal of Experimental Algorithmics*, 15(2.3):1–31, January 2010.  
Special Section devoted to WEA'08.
-  Andrew V. Goldberg and Chris Harrelson.  
Computing the Shortest Path: A\* Search Meets Graph Theory.  
In *Proceedings of the 16th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'05)*, pages 156–165. SIAM, 2005.
-  Andrew V. Goldberg and Renato F. Werneck.  
Computing Point-to-Point Shortest Paths from External Memory.  
In *Proceedings of the 7th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'05)*, pages 26–40. SIAM, 2005.