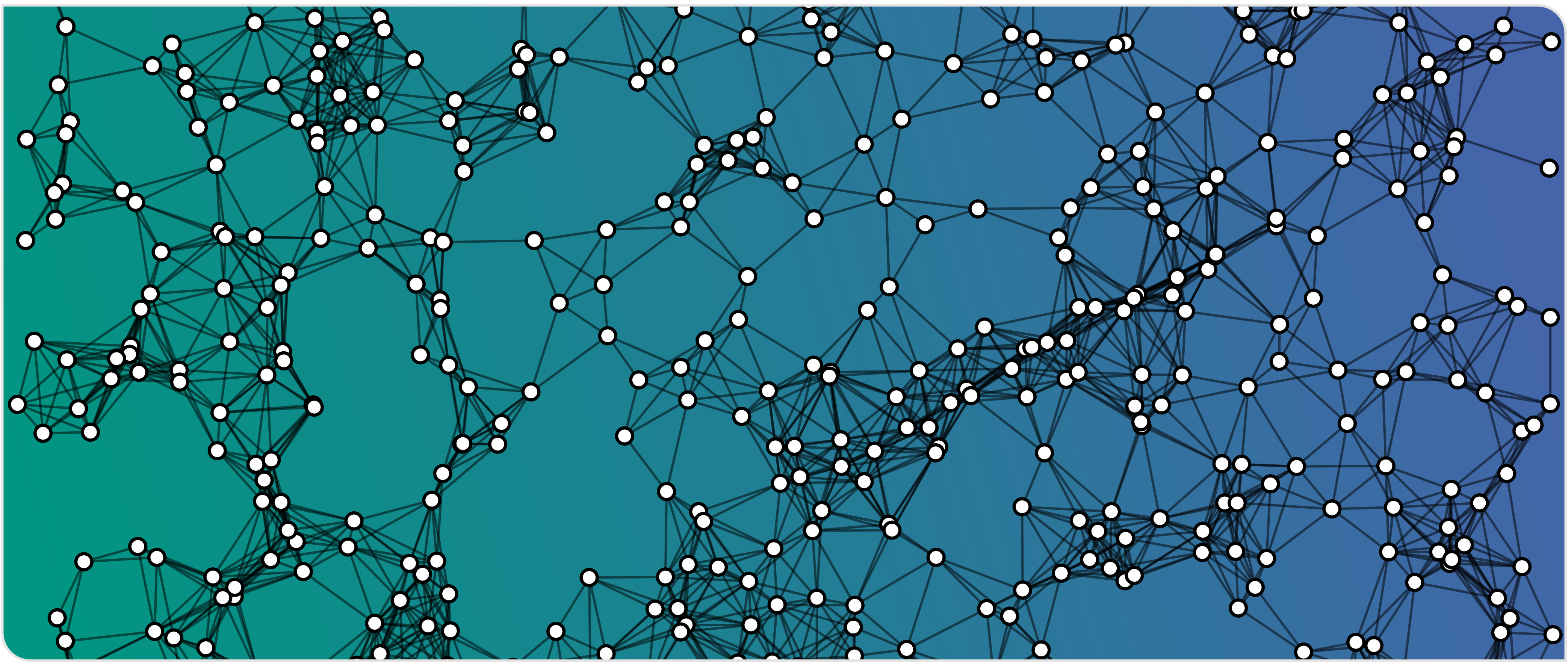
Karlsruher Institut für Technologie

Proseminar: Algorithmen für NP-schwere Probleme

Lineare Programme und Dualität



Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe
- Ziel: Behebung dieses Problems bei möglichst geringen Kosten

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe
- Ziel: Behebung dieses Problems bei möglichst geringen Kosten
- nutze dazu Karotten, Weißkohl und Gewürzgurken

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe
- Ziel: Behebung dieses Problems bei möglichst geringen Kosten
- nutze dazu Karotten, Weißkohl und Gewürzgurken

	Karotten	Weißkohl	Gewürzgurken
Vitamin A (mg/kg)	35	$0,5$	$0,5$
Vitamin C (mg/kg)	60	300	10
Ballaststoffe (g/kg)	30	20	10
Preis (€/kg)	$0,75$	$0,5$	$0,15$

...and when Rabbid said, “Honey or condensed milk with your bread?” he was so excited that he said, “Both,” and then, so as not to seem greedy, he added, “But don’t bother about the bread, please.”

A. A. Milne, Winnie the Pooh

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe
- Ziel: Behebung dieses Problems bei möglichst geringen Kosten
- nutze dazu Karotten, Weißkohl und Gewürzgurken

	Karotten	Weißkohl	Gewürzgurken
Vitamin A (mg/kg)	35	$0,5$	$0,5$
Vitamin C (mg/kg)	60	300	10
Ballaststoffe (g/kg)	30	20	10
Preis (€/kg)	$0,75$	$0,5$	$0,15$

. . . and when Rabbid said, “Honey or condensed milk with your bread?” he was so excited that he said, “Both,” and then, so as not to seem greedy, he added, “But don’t bother about the bread, please.”

A. A. Milne, Winnie the Pooh

Lösung

- x_1, x_2, x_3 repräsentieren die Menge an Karotten, Kohl und Gurken

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe
- Ziel: Behebung dieses Problems bei möglichst geringen Kosten
- nutze dazu Karotten, Weißkohl und Gewürzgurken

	Karotten	Weißkohl	Gewürzgurken
Vitamin A (mg/kg)	35	$0,5$	$0,5$
Vitamin C (mg/kg)	60	300	10
Ballaststoffe (g/kg)	30	20	10
Preis (€/kg)	$0,75$	$0,5$	$0,15$

. . . and when Rabbid said, “Honey or condensed milk with your bread?” he was so excited that he said, “Both,” and then, so as not to seem greedy, he added, “But don’t bother about the bread, please.”

A. A. Milne, Winnie the Pooh

Lösung

- x_1, x_2, x_3 repräsentieren die Menge an Karotten, Kohl und Gurken

$$\text{minimiere:}\quad 0,75x_1 + 0,5x_2 + 0,15x_3$$

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe
- Ziel: Behebung dieses Problems bei möglichst geringen Kosten
- nutze dazu Karotten, Weißkohl und Gewürzgurken

	Karotten	Weißkohl	Gewürzgurken
Vitamin A (mg/kg)	35	$0,5$	$0,5$
Vitamin C (mg/kg)	60	300	10
Ballaststoffe (g/kg)	30	20	10
Preis (€/kg)	$0,75$	$0,5$	$0,15$

. . . and when Rabbid said, “Honey or condensed milk with your bread?” he was so excited that he said, “Both,” and then, so as not to seem greedy, he added, “But don’t bother about the bread, please.”

A. A. Milne, Winnie the Pooh

Lösung

- x_1, x_2, x_3 repräsentieren die Menge an Karotten, Kohl und Gurken

$$\begin{aligned} \text{minimiere: } & 0,75x_1 + 0,5x_2 + 0,15x_3 \\ \text{Nebenbedingungen: } & 35x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 \geq 0,5 \end{aligned}$$

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe
- Ziel: Behebung dieses Problems bei möglichst geringen Kosten
- nutze dazu Karotten, Weißkohl und Gewürzgurken

	Karotten	Weißkohl	Gewürzgurken
Vitamin A (mg/kg)	35	0, 5	0, 5
Vitamin C (mg/kg)	60	300	10
Ballaststoffe (g/kg)	30	20	10
Preis (€/kg)	0, 75	0, 5	0, 15

. . . and when Rabbid said, “Honey or condensed milk with your bread?” he was so excited that he said, “Both,” and then, so as not to seem greedy, he added, “But don’t bother about the bread, please.”

A. A. Milne, Winnie the Pooh

Lösung

- x_1, x_2, x_3 repräsentieren die Menge an Karotten, Kohl und Gurken

$$\begin{aligned} \text{minimiere:}\quad & 0,75x_1 + 0,5x_2 + 0,15x_3 \\ \text{Nebenbedingungen:}\quad & 35x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 \geq 0,5 \\ & 60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \end{aligned}$$

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Karlsruher Institut für Technologie

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe
- Ziel: Behebung dieses Problems bei möglichst geringen Kosten
- nutze dazu Karotten, Weißkohl und Gewürzgurken

	Karotten	Weißkohl	Gewürzgurken
Vitamin A (mg/kg)	35	$0,5$	$0,5$
Vitamin C (mg/kg)	60	300	10
Ballaststoffe (g/kg)	30	20	10
Preis (€/kg)	$0,75$	$0,5$	$0,15$

. . . and when Rabbid said, "Honey or condensed milk with your bread?" he was so excited that he said, "Both," and then, so as not to seem greedy, he added, "But don't bother about the bread, please."

A. A. Milne, Winnie the Pooh

Lösung

- x_1, x_2, x_3 repräsentieren die Menge an Karotten, Kohl und Gurken

$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & 0,75x_1 + 0,5x_2 + 0,15x_3 \\ \text{Nebenbedingungen:} \quad & 35x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 \geq 0,5 \\ & 60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\ & 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4 \end{aligned}$$

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe
- Ziel: Behebung dieses Problems bei möglichst geringen Kosten
- nutze dazu Karotten, Weißkohl und Gewürzgurken

	Karotten	Weißkohl	Gewürzgurken
Vitamin A (mg/kg)	35	0,5	0,5
Vitamin C (mg/kg)	60	300	10
Ballaststoffe (g/kg)	30	20	10
Preis (€/kg)	0,75	0,5	0,15

. . . and when Rabbid said, "Honey or condensed milk with your bread?" he was so excited that he said, "Both," and then, so as not to seem greedy, he added, "But don't bother about the bread, please."

A. A. Milne, Winnie the Pooh

Lösung

- x_1, x_2, x_3 repräsentieren die Menge an Karotten, Kohl und Gurken

$$
\begin{aligned}
\text{minimiere:}\quad & 0,75x_1 + 0,5x_2 + 0,15x_3 \\
\text{Nebenbedingungen:}\quad & 35x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 \geq 0,5 \\
& 60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\
& 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

Beispiel: Ausgewogen und Billig

Problem

- Burger entsprechen nicht den offiziellen Ernährungsrichtlinien
- pro Gericht fehlen 0,5 mg Vitamin A, 15 mg Vit. C, 4 g Ballaststoffe
- Ziel: Behebung dieses Problems bei möglichst geringen Kosten
- nutze dazu Karotten, Weißkohl und Gewürzgurken

	Karotten	Weißkohl	Gewürzgurken
Vitamin A (mg/kg)	35	0,5	0,5
Vitamin C (mg/kg)	60	300	10
Ballaststoffe (g/kg)	30	20	10
Preis (€/kg)	0,75	0,5	0,15

...and when Rabbid said, "Honey or condensed milk with your bread?" he was so excited that he said, "Both," and then, so as not to seem greedy, he added, "But don't bother about the bread, please."

A. A. Milne, Winnie the Pooh

Lösung

- x_1, x_2, x_3 repräsentieren die Menge an Karotten, Kohl und Gurken

$$\begin{aligned}
\text{minimiere:}\quad & 0,75x_1 + 0,5x_2 + 0,15x_3 \\
\text{Nebenbedingungen:}\quad & 35x_1 + 0,5x_2 + 0,5x_3 \geq 0,5 \\
& 60x_1 + 300x_2 + 10x_3 \geq 15 \\
& 30x_1 + 20x_2 + 10x_3 \geq 4 \\
& x_i \geq 0
\end{aligned}$$

- optimale Lösung:
  - 9,5 g Karotten
  - 38 g Kohl
  - 290 g Gurken

Lineare Programme – Trivia

- wurden bereits in den 40er Jahren verwendet (und manuell gelöst)

Lineare Programme – Trivia

- wurden bereits in den 40er Jahren verwendet (und manuell gelöst)
- „Programm" ist ein militärischer Begriff für verschiedene Arten von Plänen (z.B. Versorgungsplan, Verlegungsplan für Truppen etc.)

Lineare Programme – Trivia

- wurden bereits in den 40er Jahren verwendet (und manuell gelöst)
- „Programm“ ist ein militärischer Begriff für verschiedene Arten von Plänen (z.B. Versorgungsplan, Verlegungsplan für Truppen etc.)
- erstes großes LP, das mit dem Simplex-Algorithmus gelöst wurde
  - optimiere Kosten für ausgewogene Ernährung

Lineare Programme – Trivia

- wurden bereits in den 40er Jahren verwendet (und manuell gelöst)
- „Programm“ ist ein militärischer Begriff für verschiedene Arten von Plänen (z.B. Versorgungsplan, Verlegungsplan für Truppen etc.)
- erstes großes LP, das mit dem Simplex-Algorithmus gelöst wurde
  - optimiere Kosten für ausgewogene Ernährung
  - 77 Variablen, 9 Nebenbedingungen

Lineare Programme – Trivia

- wurden bereits in den 40er Jahren verwendet (und manuell gelöst)
- „Programm“ ist ein militärischer Begriff für verschiedene Arten von Plänen (z.B. Versorgungsplan, Verlegungsplan für Truppen etc.)
- erstes großes LP, das mit dem Simplex-Algorithmus gelöst wurde
  - optimiere Kosten für ausgewogene Ernährung
  - 77 Variablen, 9 Nebenbedingungen
  - Simplex-Methode (per Hand in 1947): 120 Personentage

Lineare Programme – Trivia

- wurden bereits in den 40er Jahren verwendet (und manuell gelöst)
- „Programm“ ist ein militärischer Begriff für verschiedene Arten von Plänen (z.B. Versorgungsplan, Verlegungsplan für Truppen etc.)
- erstes großes LP, das mit dem Simplex-Algorithmus gelöst wurde
  - optimiere Kosten für ausgewogene Ernährung
  - 77 Variablen, 9 Nebenbedingungen
  - Simplex-Methode (per Hand in 1947): 120 Personentage
- etwas später (mittels Computer): George Dantzig versucht seine eigene Ernährung zu optimieren

Lineare Programme – Trivia

- wurden bereits in den 40er Jahren verwendet (und manuell gelöst)
- „Programm“ ist ein militärischer Begriff für verschiedene Arten von Plänen (z.B. Versorgungsplan, Verlegungsplan für Truppen etc.)
- erstes großes LP, das mit dem Simplex-Algorithmus gelöst wurde
  - optimiere Kosten für ausgewogene Ernährung
  - 77 Variablen, 9 Nebenbedingungen
  - Simplex-Methode (per Hand in 1947): 120 Personentage
- etwas später (mittels Computer): George Dantzig versucht seine eigene Ernährung zu optimieren
  - erster Versuch: mehrere Liter Essig pro Tag

Lineare Programme – Trivia

- wurden bereits in den 40er Jahren verwendet (und manuell gelöst)
- „Programm“ ist ein militärischer Begriff für verschiedene Arten von Plänen (z.B. Versorgungsplan, Verlegungsplan für Truppen etc.)
- erstes großes LP, das mit dem Simplex-Algorithmus gelöst wurde
  - optimiere Kosten für ausgewogene Ernährung
  - 77 Variablen, 9 Nebenbedingungen
  - Simplex-Methode (per Hand in 1947): 120 Personentage
- etwas später (mittels Computer): George Dantzig versucht seine eigene Ernährung zu optimieren
  - erster Versuch: mehrere Liter Essig pro Tag
  - zweiter Versuch: 200 Brühwürfel pro Tag

Lineare Programme – Trivia

- wurden bereits in den 40er Jahren verwendet (und manuell gelöst)
- „Programm“ ist ein militärischer Begriff für verschiedene Arten von Plänen (z.B. Versorgungsplan, Verlegungsplan für Truppen etc.)
- erstes großes LP, das mit dem Simplex-Algorithmus gelöst wurde
  - optimiere Kosten für ausgewogene Ernährung
  - 77 Variablen, 9 Nebenbedingungen
  - Simplex-Methode (per Hand in 1947): 120 Personentage
- etwas später (mittels Computer): George Dantzig versucht seine eigene Ernährung zu optimieren
  - erster Versuch: mehrere Liter Essig pro Tag
  - zweiter Versuch: 200 Brühwürfel pro Tag
  - $\Rightarrow$ ein sinnvolles LP zu formulieren ist nicht immer trivial

Lineare Programme – Trivia

- wurden bereits in den 40er Jahren verwendet (und manuell gelöst)
- „Programm“ ist ein militärischer Begriff für verschiedene Arten von Plänen (z.B. Versorgungsplan, Verlegungsplan für Truppen etc.)
- erstes großes LP, das mit dem Simplex-Algorithmus gelöst wurde
  - optimiere Kosten für ausgewogene Ernährung
  - 77 Variablen, 9 Nebenbedingungen
  - Simplex-Methode (per Hand in 1947): 120 Personentage
- etwas später (mittels Computer): George Dantzig versucht seine eigene Ernährung zu optimieren
  - erster Versuch: mehrere Liter Essig pro Tag
  - zweiter Versuch: 200 Brühwürfel pro Tag
  - $\Rightarrow$ ein sinnvolles LP zu formulieren ist nicht immer trivial
- effizient lösbar, sowohl in der Theorie als auch in der Praxis

Lineare Programme

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \ldots, x_n$

- lineare Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Lineare Programme

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \dots, x_n$

- lineare Funktion in $x_1, \dots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

$$
\begin{aligned}
\text{maximiere:}\quad & x_1 + x_2 \\
\text{sodass:}\quad & x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_2 - x_1 \leq 1 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 4x_1 - x_2 \leq 10
\end{aligned}
$$

Lineare Programme

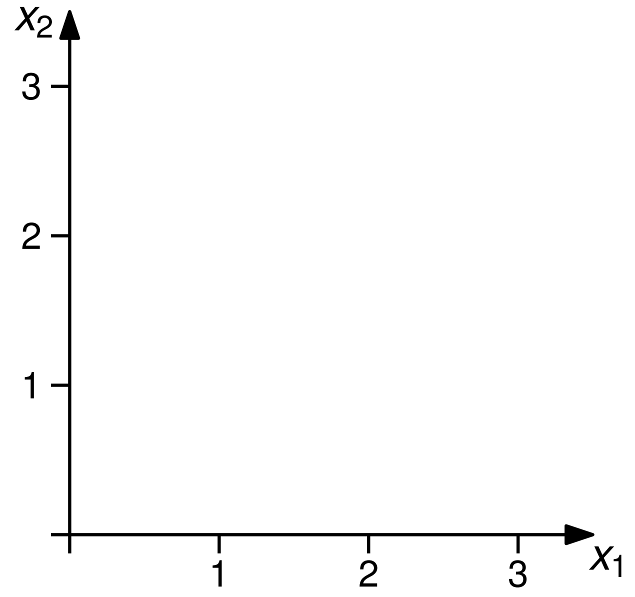
Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \ldots, x_n$

- lineare Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

$$\begin{aligned} \text{maximiere:}\quad & x_1 + x_2 \\ \text{sodass:}\quad & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 10 \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation



Lineare Programme

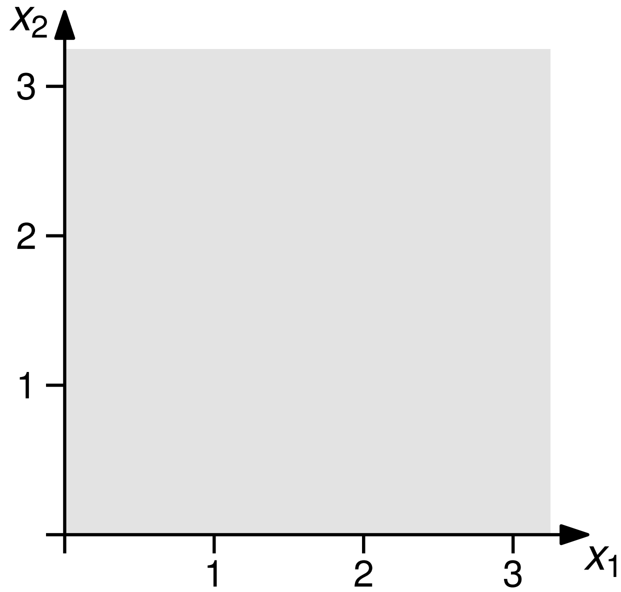
Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \ldots, x_n$

- lineare Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

$$\begin{aligned} \text{maximiere:}\quad & x_1 + x_2 \\ \text{sodass:}\quad & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 10 \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation



Lineare Programme

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \ldots, x_n$

- lineare Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

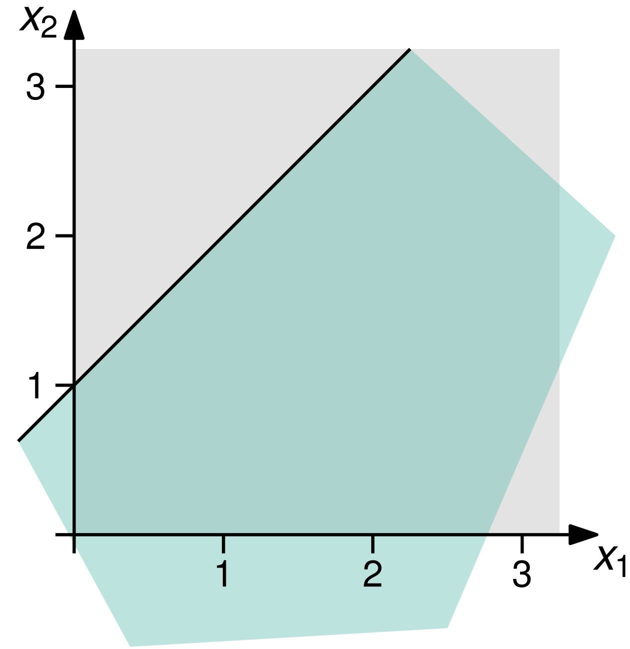
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



Lineare Programme

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \ldots, x_n$

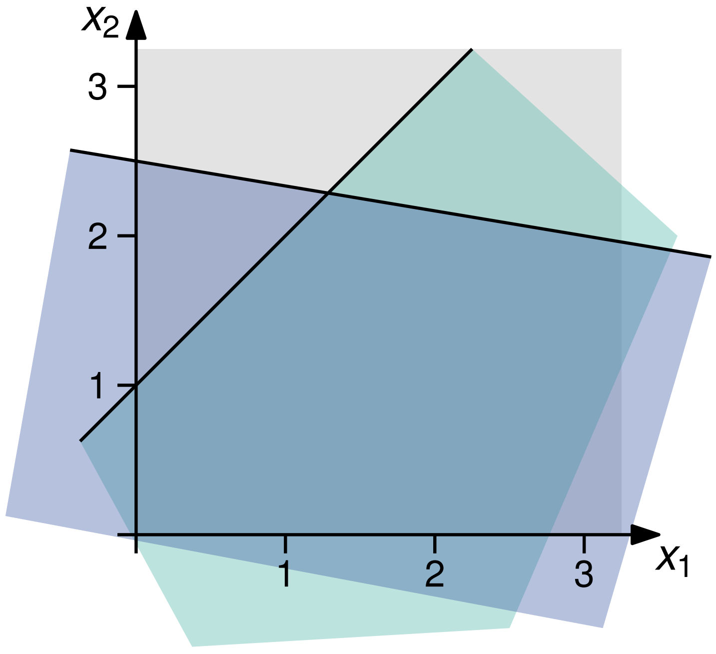
- lineare Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass:
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_2 - x_1 \leq 1$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 15$$
$$4x_1 - x_2 \leq 10$$

Geometrische Interpretation



Lineare Programme

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \ldots, x_n$

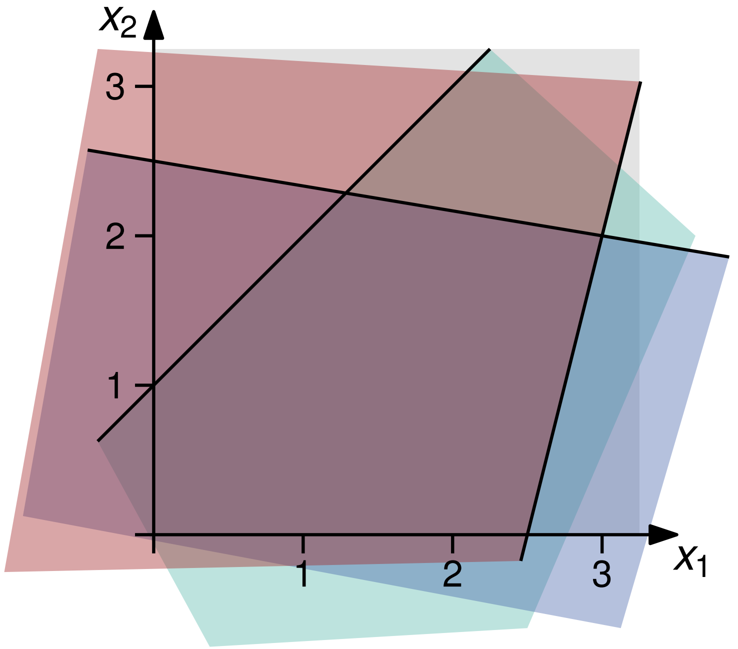
- lineare Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass:
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_2 - x_1 \leq 1$
$x_1 + 6x_2 \leq 15$
$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



Lineare Programme

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \ldots, x_n$

- lineare Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

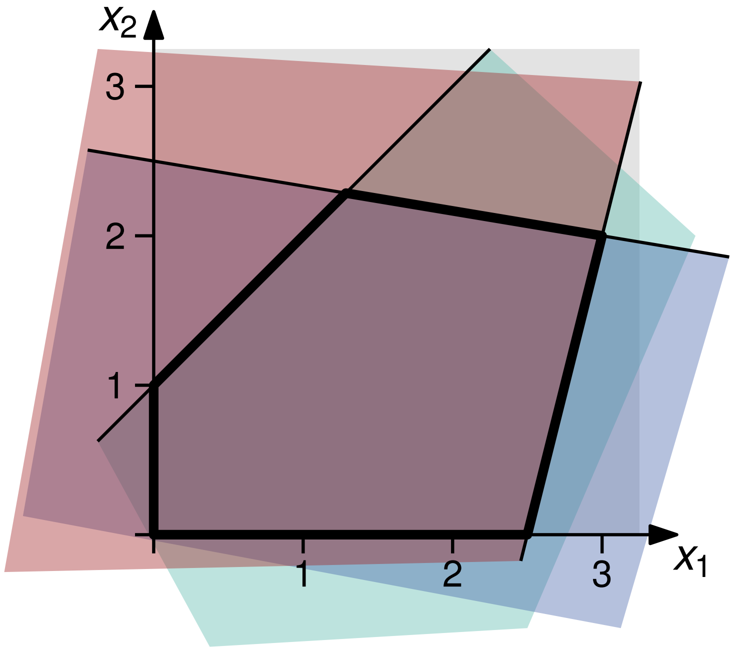
Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass:

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$
$$x_2 - x_1 \leq 1$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 15$$
$$4x_1 - x_2 \leq 10$$

Geometrische Interpretation



Lineare Programme

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \dots, x_n$

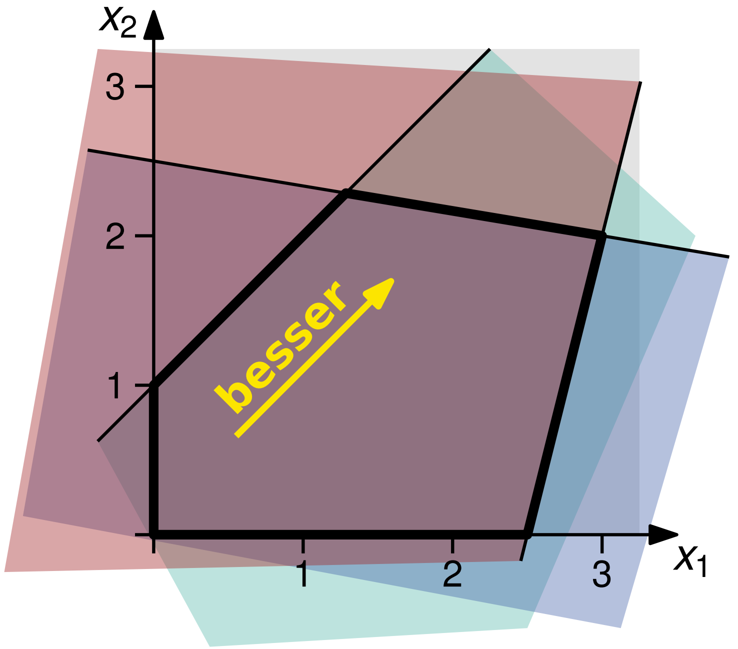
- lineare Funktion in $x_1, \dots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass:
$x_1 \geq 0$
$x_2 \geq 0$
$x_2 - x_1 \leq 1$
$x_1 + 6x_2 \leq 15$
$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



Lineare Programme

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \ldots, x_n$

- lineare Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

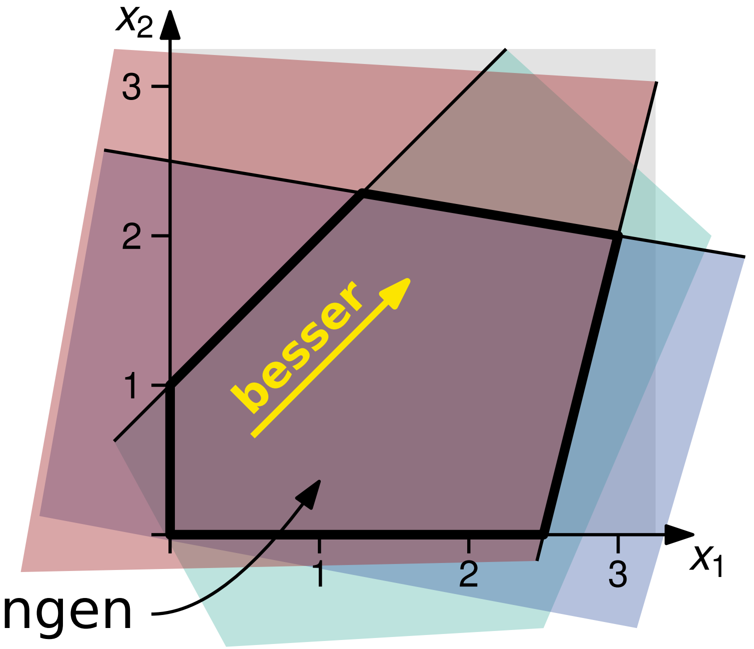
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



Lineare Programme

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \dots, x_n$

- lineare Funktion in $x_1, \dots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

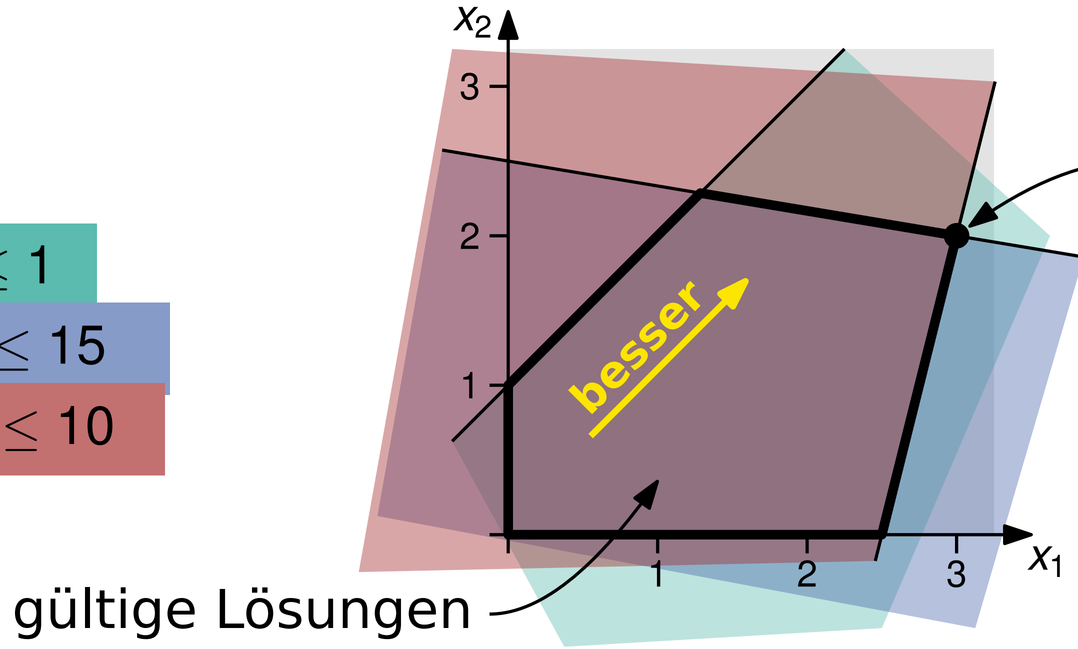
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



Lineare Programme

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \ldots, x_n$

- lineare Funktion in $x_1, \ldots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

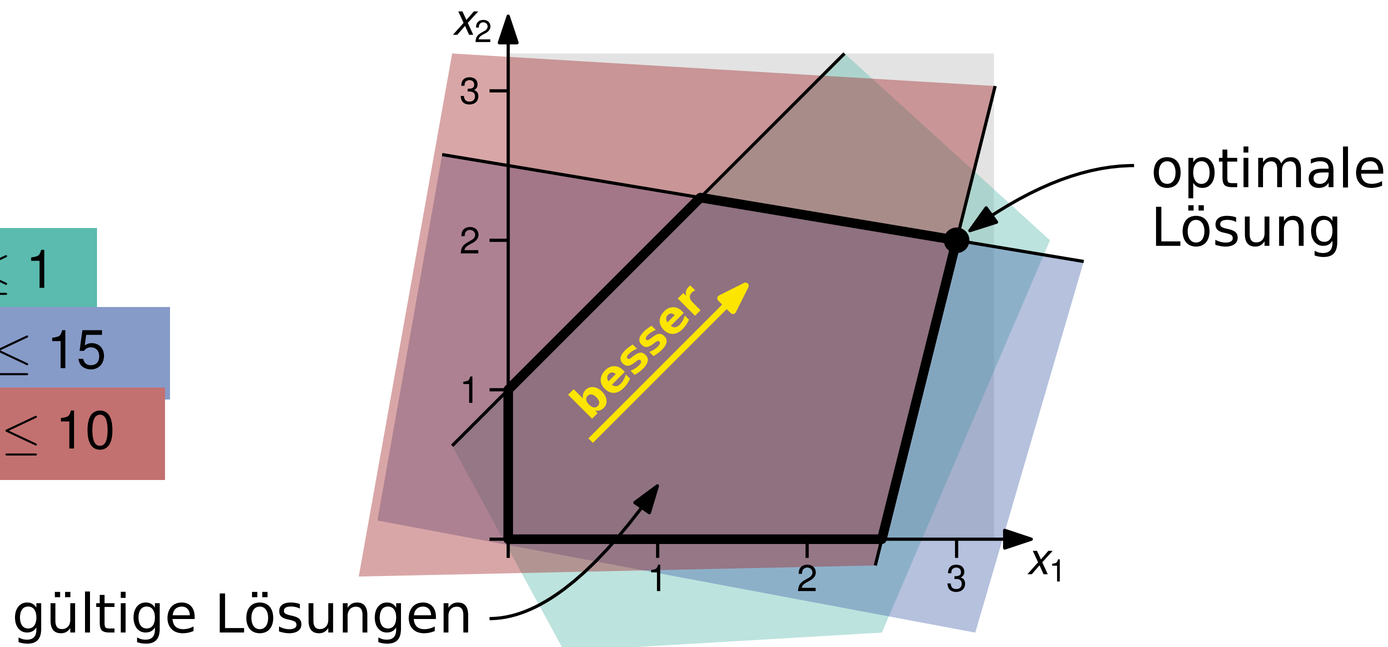
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



Lösbarkeit

- LP ist **unlösbar (infeasible)**, wenn es keine gültige Lösung gibt

Lineare Programme

Karlsruher Institut für Technologie

Finde Reellwertige Belegung für Variablen $x_1, \dots, x_n$

- lineare Funktion in $x_1, \dots, x_n$ wird maximiert (minimiert)
- eingeschränkt durch lineare Nebenbedingungen (Ungleichungen)

Beispiel

maximiere: $x_1 + x_2$

sodass: $x_1 \geq 0$

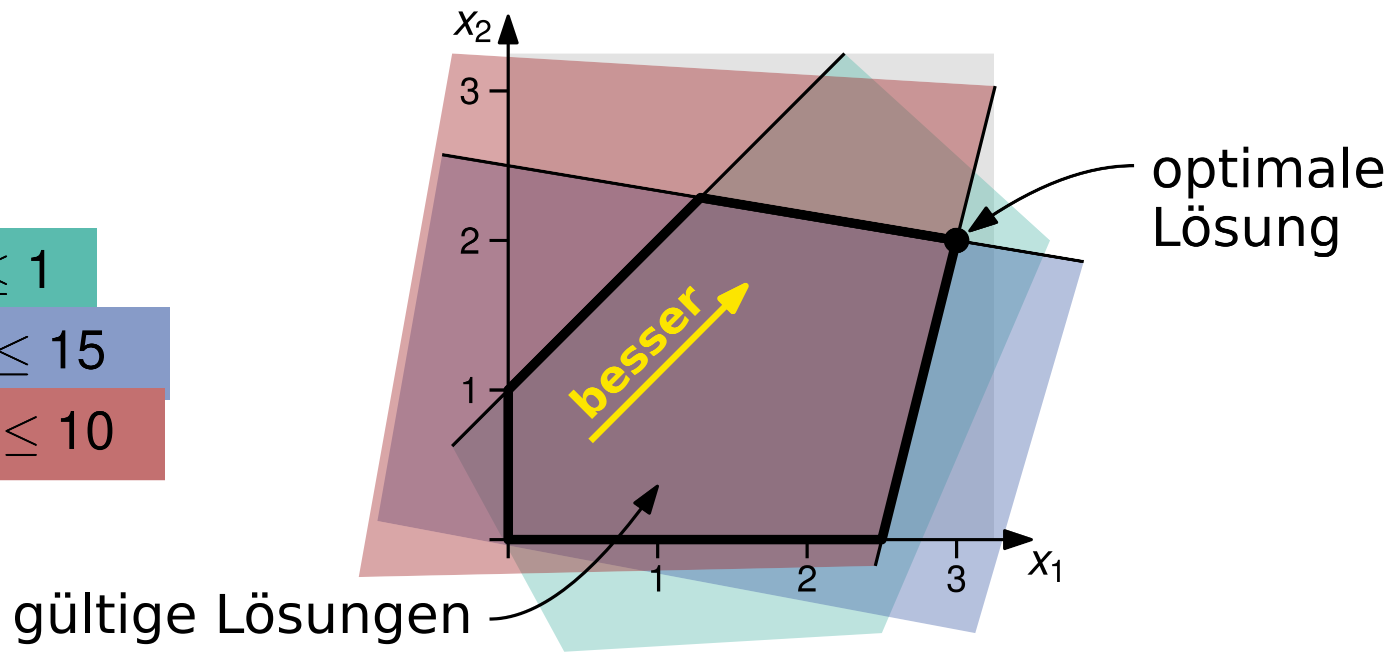
$x_2 \geq 0$

$x_2 - x_1 \leq 1$

$x_1 + 6x_2 \leq 15$

$4x_1 - x_2 \leq 10$

Geometrische Interpretation



Lösbarkeit

- LP ist **unlösbar (infeasible)**, wenn es keine gültige Lösung gibt
- LP ist **unbeschränkt (unbounded)**, wenn es beliebig gute gültige Lösungen gib (Optimierungsfunktion wird beliebig groß)

Matrixschreibweise

$$\begin{aligned} \text{max.:}\ & 2x_1 + x_2 \\ \text{sodass:}\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 10 \end{aligned}$$

Matrixschreibweise

$$\begin{array}{rl} \text{max.:} & 2x_1 + x_2 \\ \text{sodass:} & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 10 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 1x_2 & & \\ 1x_1 & + & 0x_2 & \geq & 0 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & \geq & 0 \\ -1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\ 1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10 \end{array}$$

Matrixschreibweise

$$
\begin{array}{rl}
\text{max.:} & 2x_1 + x_2 \\
\text{sodass:} & x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_2 - x_1 \leq 1 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 4x_1 - x_2 \leq 10
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
1x_1 & + & 0x_2 & \geq & 0 \\
0x_1 & + & 1x_2 & \geq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
-1x_1 & + & 0x_2 & \leq & 0 \\
0x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
$$

Matrixschreibweise

$$
\begin{array}{rl}
\text{max.:} & 2x_1 + x_2 \\
\text{sodass:} & x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_2 - x_1 \leq 1 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 4x_1 - x_2 \leq 10
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
1x_1 & + & 0x_2 & \geq & 0 \\
0x_1 & + & 1x_2 & \geq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
-1x_1 & + & 0x_2 & \leq & 0 \\
0x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
$$

Matrizen und Vektoren

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise

$$
\begin{array}{rl}
\text{max.:} & 2x_1 + x_2 \\
\text{sodass:} & x_1 \geq 0 \\
 & x_2 \geq 0 \\
 & x_2 - x_1 \leq 1 \\
 & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
 & 4x_1 - x_2 \leq 10
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
1x_1 & + & 0x_2 & \geq & 0 \\
0x_1 & + & 1x_2 & \geq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
-1x_1 & + & 0x_2 & \leq & 0 \\
0x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
$$

Matrizen und Vektoren

$$
c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},
$$

Matrixschreibweise

$$
\begin{array}{rl}
\text{max.:} & 2x_1 + x_2 \\
\text{sodass:} & x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_2 - x_1 \leq 1 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 4x_1 - x_2 \leq 10
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
1x_1 & + & 0x_2 & \geq & 0 \\
0x_1 & + & 1x_2 & \geq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
-1x_1 & + & 0x_2 & \leq & 0 \\
0x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
$$

Matrizen und Vektoren

$$
c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}
$$

Matrixschreibweise

$$\begin{array}{rl} \text{max.:} & 2x_1 + x_2 \\ \text{sodass:} & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & x_2 - x_1 \leq 1 \\ & x_1 + 6x_2 \leq 15 \\ & 4x_1 - x_2 \leq 10 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 1x_2 & & \\ 1x_1 & + & 0x_2 & \geq & 0 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & \geq & 0 \\ -1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\ 1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 1x_2 & & \\ -1x_1 & + & 0x_2 & \leq & 0 \\ 0x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 0 \\ -1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\ 1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\ 4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10 \end{array}$$

Matrizen und Vektoren

$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$ finde $x \in \mathbb{R}^2$ das $c^T x$ maximiert mit $Ax \leq b$

Matrixschreibweise

$$
\begin{array}{rl}
\text{max.:} & 2x_1 + x_2 \\
\text{sodass:} & x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_2 - x_1 \leq 1 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 4x_1 - x_2 \leq 10
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
1x_1 & + & 0x_2 & \geq & 0 \\
0x_1 & + & 1x_2 & \geq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
-1x_1 & + & 0x_2 & \leq & 0 \\
0x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
$$

Matrizen und Vektoren

$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$ finde $x \in \mathbb{R}^2$ das $c^T x$ maximiert mit $Ax \leq b$

- allgemein: $x, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$

Matrixschreibweise

$$
\begin{array}{rl}
\text{max.:} & 2x_1 + x_2 \\
\text{sodass:} & x_1 \geq 0 \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_2 - x_1 \leq 1 \\
& x_1 + 6x_2 \leq 15 \\
& 4x_1 - x_2 \leq 10
\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
1x_1 & + & 0x_2 & \geq & 0 \\
0x_1 & + & 1x_2 & \geq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
\quad\longrightarrow\quad
\begin{array}{rcrcr}
2x_1 & + & 1x_2 & & \\
-1x_1 & + & 0x_2 & \leq & 0 \\
0x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 0 \\
-1x_1 & + & 1x_2 & \leq & 1 \\
1x_1 & + & 6x_2 & \leq & 15 \\
4x_1 & + & (-1x_2) & \leq & 10
\end{array}
$$

Matrizen und Vektoren

$$
c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}
$$

finde $x \in \mathbb{R}^2$ das $c^T x$ maximiert mit $Ax \leq b$

- allgemein: $x, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$
- LPs sind häufig in dieser Form gegeben
- jedes LP lässt sich in diese Form bringen

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab
- schwankende Produktionsmengen verursachen Kosten:
  50€ pro Tonne Veränderung von Monat i zu Monat $i + 1$

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab
- schwankende Produktionsmengen verursachen Kosten: 50€ pro Tonne Veränderung von Monat i zu Monat $i + 1$
- Lagerung kostet Geld: 20€ pro Tonne Überschuss am Ende jeden Monats

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab
- schwankende Produktionsmengen verursachen Kosten: 50€ pro Tonne Veränderung von Monat i zu Monat $i+1$
- Lagerung kostet Geld: 20€ pro Tonne Überschuss am Ende jeden Monats

Formulierung als LP

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Karlsruher Institut für Technologie

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab
- schwankende Produktionsmengen verursachen Kosten: 50€ pro Tonne Veränderung von Monat i zu Monat $i+1$
- Lagerung kostet Geld: 20€ pro Tonne Überschuss am Ende jeden Monats

Formulierung als LP

- x_i repräsentiert die Produktionsmenge im Monat i
- s_i repräsentiert den Überschuss nach Monat i

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab
- schwankende Produktionsmengen verursachen Kosten: 50€ pro Tonne Veränderung von Monat i zu Monat $i+1$
- Lagerung kostet Geld: 20€ pro Tonne Überschuss am Ende jeden Monats

Formulierung als LP

- x_i repräsentiert die Produktionsmenge im Monat i
- s_i repräsentiert den Überschuss nach Monat i
- ausreichend Eis im Monat i: $x_i + s_{i-1} \geq d_i$

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab
- schwankende Produktionsmengen verursachen Kosten: 50€ pro Tonne Veränderung von Monat i zu Monat $i+1$
- Lagerung kostet Geld: 20€ pro Tonne Überschuss am Ende jeden Monats

Formulierung als LP

- x_i repräsentiert die Produktionsmenge im Monat i
- s_i repräsentiert den Überschuss nach Monat i
- ausreichend Eis im Monat i: $x_i + s_{i-1} \geq d_i$
- neuer Überschuss nach Monat i: $s_i = x_i + s_{i-1} - d_i \quad \Leftrightarrow \quad x_i + s_{i-1} - s_i = d_i$

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab
- schwankende Produktionsmengen verursachen Kosten: 50€ pro Tonne Veränderung von Monat i zu Monat $i+1$
- Lagerung kostet Geld: 20€ pro Tonne Überschuss am Ende jeden Monats

Formulierung als LP

- x_i repräsentiert die Produktionsmenge im Monat i
- s_i repräsentiert den Überschuss nach Monat i
- ausreichend Eis im Monat i: $x_i + s_{i-1} \geq d_i$
- neuer Überschuss nach Monat i: $s_i = x_i + s_{i-1} - d_i \quad \Leftrightarrow \quad x_i + s_{i-1} - s_i = d_i$
- minimiere Kosten: $\text{min.: } 20\sum_{i=1}^{12} s_i + 50\sum_{i=1}^{12} |x_i - x_{i-1}|$

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab
- schwankende Produktionsmengen verursachen Kosten:
  50€ pro Tonne Veränderung von Monat i zu Monat $i+1$
- Lagerung kostet Geld: 20€ pro Tonne Überschuss am Ende jeden Monats

Formulierung als LP

- x_i repräsentiert die Produktionsmenge im Monat i
- s_i repräsentiert den Überschuss nach Monat i
- ausreichend Eis im Monat i: $x_i + s_{i-1} \geq d_i$
- neuer Überschuss nach Monat i: $s_i = x_i + s_{i-1} - d_i \quad \Leftrightarrow \quad x_i + s_{i-1} - s_i = d_i$
- minimiere Kosten: $\text{min.: } 20 \sum_{i=1}^{12} s_i + 50 \sum_{i=1}^{12} |x_i - x_{i-1}|$

nicht linear!

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab
- schwankende Produktionsmengen verursachen Kosten: 50€ pro Tonne Veränderung von Monat i zu Monat $i+1$
- Lagerung kostet Geld: 20€ pro Tonne Überschuss am Ende jeden Monats

Formulierung als LP

- x_i repräsentiert die Produktionsmenge im Monat i
- s_i repräsentiert den Überschuss nach Monat i
- ausreichend Eis im Monat i: $x_i + s_{i-1} \geq d_i$
- neuer Überschuss nach Monat i: $s_i = x_i + s_{i-1} - d_i \quad \Leftrightarrow \quad x_i + s_{i-1} - s_i = d_i$
- minimiere Kosten: $\text{min.: } 20 \sum_{i=1}^{12} s_i + 50 \sum_{i=1}^{12} \overset{a_i}{\cancel{|x_i - x_{i-1}|}}$
- Lösung mittels Hilfsvariable a_i: $a_i \geq x_i - x_{i-1} \qquad a_i \geq x_{i-1} - x_i$

Beispiel: Eis für ein ganzes Jahr

Probleme bei der Eisproduktion

- der Eisverbrauch d_i hängt stark von dem aktuellen Monat i ab
- schwankende Produktionsmengen verursachen Kosten: 50€ pro Tonne Veränderung von Monat i zu Monat $i+1$
- Lagerung kostet Geld: 20€ pro Tonne Überschuss am Ende jeden Monats

Formulierung als LP

- x_i repräsentiert die Produktionsmenge im Monat i
- s_i repräsentiert den Überschuss nach Monat i
- ausreichend Eis im Monat i: $x_i + s_{i-1} \geq d_i$
- neuer Überschuss nach Monat i: $s_i = x_i + s_{i-1} - d_i \quad \Leftrightarrow \quad x_i + s_{i-1} - s_i = d_i$
- minimiere Kosten: $\text{min.: } 20 \sum_{i=1}^{12} s_i + 50 \sum_{i=1}^{12} \overset{a_i}{\cancel{|x_i - x_{i-1}|}}$
- Lösung mittels Hilfsvariable a_i: $a_i \geq x_i - x_{i-1} \qquad a_i \geq x_{i-1} - x_i$
- in minimaler Lösung ist a_i das Maximum aus $x_i - x_{i-1}$ und $x_{i-1} - x_i$

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

$$
\begin{aligned}
\text{maximiere:}\quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{sodass:}\quad & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 1x_2 \leq 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

$$\begin{aligned} \text{maximiere: } & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sodass: } & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 1x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- einfache Schranke: 12

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$$

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass: $4x_1 + 8x_2 \leq 12$

$2x_1 + 1x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

$\cdot\frac{1}{2}$

- einfache Schranke: 12

  $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

- besser: 6

  $2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

$$
\begin{aligned}
\text{maximiere:}\quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{sodass:}\quad & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 1x_2 \leq 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- einfache Schranke: 12

  $$2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$$

- besser: 6

  $$2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$$

- Kombination mehrere Gleichungen: 5

  $$2x_1 + 3x_2 \leq \tfrac{1}{3}(4x_1 + 8x_2 + 2x_1 + 1x_2) \leq \tfrac{1}{3}(12 + 3)$$

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

$$
\begin{aligned}
\text{maximiere:}\quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{sodass:}\quad & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 1x_2 \leq 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- einfache Schranke: 12

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$$

- besser: 6

$$2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$$

- Kombination mehrere Gleichungen: 5

$$2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{3}(4x_1 + 8x_2 + 2x_1 + 1x_2) \leq \frac{1}{3}(12 + 3)$$

Systematische Kombination mehrerer Gleichungen

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass: $4x_1 + 8x_2 \leq 12$

$2x_1 + 1x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

- einfache Schranke: 12

  $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$

- besser: 6

  $2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$

- Kombination mehrere Gleichungen: 5

  $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{3}(4x_1 + 8x_2 + 2x_1 + 1x_2) \leq \frac{1}{3}(12 + 3)$

Systematische Kombination mehrerer Gleichungen

- bestimme möglichst gute Faktoren y_1, y_2 und y_3 für die Gleichungen

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass: $4x_1 + 8x_2 \leq 12$

$2x_1 + 1x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

- einfache Schranke: 12

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$$

- besser: 6 ($\cdot \frac{1}{2}$)

$$2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$$

- Kombination mehrere Gleichungen: 5 ($\cdot \frac{1}{3}$, $\cdot \frac{1}{3}$)

$$2x_1 + 3x_2 \leq \tfrac{1}{3}(4x_1 + 8x_2 + 2x_1 + 1x_2) \leq \tfrac{1}{3}(12 + 3)$$

Systematische Kombination mehrerer Gleichungen

- bestimme möglichst gute Faktoren y_1, y_2 und y_3 für die Gleichungen
- wir erhalten: $y_1(4x_1 + 8x_2) + y_2(2x_1 + 1x_2) + y_3(3x_1 + 2x_2) \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass:
$$4x_1 + 8x_2 \leq 12$$
$$2x_1 + 1x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- einfache Schranke: 12
  $$2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$$
- besser: 6 ($\cdot\frac{1}{2}$)
  $$2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$$
- Kombination mehrere Gleichungen: 5 ($\cdot\frac{1}{3}$, $\cdot\frac{1}{3}$)
  $$2x_1 + 3x_2 \leq \tfrac{1}{3}(4x_1 + 8x_2 + 2x_1 + 1x_2) \leq \tfrac{1}{3}(12 + 3)$$

Systematische Kombination mehrerer Gleichungen

- bestimme möglichst gute Faktoren y_1, y_2 und y_3 für die Gleichungen
- wir erhalten: $y_1(4x_1 + 8x_2) + y_2(2x_1 + 1x_2) + y_3(3x_1 + 2x_2) \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$
- umgestellt: $(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)x_1 + (8y_1 + 1y_2 + 2y_3)x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

$$
\begin{aligned}
\text{maximiere:}\quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{sodass:}\quad & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\
& 2x_1 + 1x_2 \leq 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- einfache Schranke: 12

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$$

$\cdot\frac{1}{2}$

- besser: 6

$$2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$\cdot\frac{1}{3}$ $\cdot\frac{1}{3}$

- Kombination mehrere Gleichungen: 5

$$2x_1 + 3x_2 \leq \tfrac{1}{3}(4x_1 + 8x_2 + 2x_1 + 1x_2) \leq \tfrac{1}{3}(12 + 3)$$

Systematische Kombination mehrerer Gleichungen

- bestimme möglichst gute Faktoren y_1, y_2 und y_3 für die Gleichungen
- wir erhalten: $y_1(4x_1 + 8x_2) + y_2(2x_1 + 1x_2) + y_3(3x_1 + 2x_2) \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$
- umgestellt: $\underbrace{(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)}_{\geq 2}x_1 + \underbrace{(8y_1 + 1y_2 + 2y_3)}_{\geq 3}x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

(damit es eine Schranke liefert)

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

maximiere: $2x_1 + 3x_2$
sodass: $4x_1 + 8x_2 \leq 12$
$2x_1 + 1x_2 \leq 3$
$3x_1 + 2x_2 \leq 4$
$x_1, x_2 \geq 0$

- einfache Schranke: 12
  $2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$
- besser: 6 ($\cdot \frac{1}{2}$)
  $2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$
- Kombination mehrere Gleichungen: 5 ($\cdot \frac{1}{3}$, $\cdot \frac{1}{3}$)
  $2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{3}(4x_1 + 8x_2 + 2x_1 + 1x_2) \leq \frac{1}{3}(12 + 3)$

Systematische Kombination mehrerer Gleichungen

- bestimme möglichst gute Faktoren y_1, y_2 und y_3 für die Gleichungen
- wir erhalten: $y_1(4x_1 + 8x_2) + y_2(2x_1 + 1x_2) + y_3(3x_1 + 2x_2) \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$
- umgestellt: $\underbrace{(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)}_{\geq 2}x_1 + \underbrace{(8y_1 + 1y_2 + 2y_3)}_{\geq 3}x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

  (damit es eine Schranke liefert)
- also:

minimiere: $12y_1 + 3y_2 + 4y_3$
sodass: $4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$
$8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3$
$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

$$\begin{aligned} \text{maximiere:} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sodass:} \quad & 4x_1 + 8x_2 \le 12 \\ & 2x_1 + 1x_2 \le 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- einfache Schranke: 12

$$2x_1 + 3x_2 \le 4x_1 + 8x_2 \le 12$$

- besser: 6 ($\cdot \frac{1}{2}$)

$$2x_1 + 3x_2 \le 2x_1 + 4x_2 \le 6$$

- Kombination mehrere Gleichungen: 5 ($\cdot \frac{1}{3}$, $\cdot \frac{1}{3}$)

$$2x_1 + 3x_2 \le \tfrac{1}{3}(4x_1 + 8x_2 + 2x_1 + 1x_2) \le \tfrac{1}{3}(12 + 3)$$

Systematische Kombination mehrerer Gleichungen

- bestimme möglichst gute Faktoren y_1, y_2 und y_3 für die Gleichungen
- wir erhalten: $y_1(4x_1 + 8x_2) + y_2(2x_1 + 1x_2) + y_3(3x_1 + 2x_2) \le 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$
- umgestellt: $\underbrace{(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)}_{\ge 2}x_1 + \underbrace{(8y_1 + 1y_2 + 2y_3)}_{\ge 3}x_2 \le 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

(damit es eine Schranke liefert)

- also:

$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ \text{sodass:} \quad & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ge 2 \\ & 8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \ge 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

warum $y_1, y_2, y_3 \ge 0$?

Oberer Schranken

Ziel: finde obere Schranken für die optimale Lösung

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass: $4x_1 + 8x_2 \leq 12$

$2x_1 + 1x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

- einfache Schranke: 12

$$2x_1 + 3x_2 \leq 4x_1 + 8x_2 \leq 12$$

$\cdot\frac{1}{2}$

- besser: 6

$$2x_1 + 3x_2 \leq 2x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$\cdot\frac{1}{3}$ $\cdot\frac{1}{3}$

- Kombination mehrere Gleichungen: 5

$$2x_1 + 3x_2 \leq \frac{1}{3}(4x_1 + 8x_2 + 2x_1 + 1x_2) \leq \frac{1}{3}(12 + 3)$$

Systematische Kombination mehrerer Gleichungen

- bestimme möglichst gute Faktoren y_1, y_2 und y_3 für die Gleichungen
- wir erhalten: $y_1(4x_1 + 8x_2) + y_2(2x_1 + 1x_2) + y_3(3x_1 + 2x_2) \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$
- umgestellt: $\underbrace{(4y_1 + 2y_2 + 3y_3)}_{\geq 2}x_1 + \underbrace{(8y_1 + 1y_2 + 2y_3)}_{\geq 3}x_2 \leq 12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

(damit es eine Schranke liefert)

- also:

minimiere: $12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

sodass: $4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$

$8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

warum $y_1, y_2, y_3 \geq 0$?

Duales Programm

- findet kleinste obere Schranke, die man so erhalten kann

Matrixschreibweise

Karlsruher Institut für Technologie

Primales Programm

$$\begin{aligned} \text{maximiere:} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sodass:} \quad & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 1x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Duales Programm

$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ \text{sodass:} \quad & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ & 8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Matrixschreibweise

Primales Programm

$$\begin{aligned} \text{maximiere:} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sodass:} \quad & 4x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 1x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{maximiere } \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Duales Programm

$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & 12y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ \text{sodass:} \quad & 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ & 8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Matrixschreibweise

Primales Programm

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass:
$$4x_1 + 8x_2 \leq 12$$
$$2x_1 + 1x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

maximiere $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

mit $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Duales Programm

minimiere: $12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

sodass:
$$4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$$
$$8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

minimiere $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

mit $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Matrixschreibweise

Primales Programm

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass: $4x_1 + 8x_2 \leq 12$

$2x_1 + 1x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$\text{maximiere } \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Duales Programm

minimiere: $12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

sodass: $4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$

$8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$$\text{minimiere } \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise

Primales Programm

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass:
$$4x_1 + 8x_2 \leq 12$$
$$2x_1 + 1x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

maximiere $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

mit $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

allg.: maximiere $c^T x$ mit $Ax \leq b$ und $x \geq 0$

Duales Programm

minimiere: $12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

sodass:
$$4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$$
$$8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

minimiere $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

mit $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

allg.: minimiere $b^T y$ mit $A^T y \geq c$ und $y \geq 0$

Matrixschreibweise

Primales Programm

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass: $4x_1 + 8x_2 \leq 12$

$2x_1 + 1x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$\text{maximiere } \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allg.: maximiere $c^T x$ mit $Ax \leq b$ und $x \geq 0$

Duales Programm

minimiere: $12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

sodass: $4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$

$8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$$\text{minimiere } \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allg.: minimiere $b^T y$ mit $A^T y \geq c$ und $y \geq 0$

Beachte

- das duale vom dualen ist das primale Programm

Matrixschreibweise

Primales Programm

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass:
$$4x_1 + 8x_2 \leq 12$$
$$2x_1 + 1x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

maximiere $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

mit $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

allg.: maximiere $c^T x$ mit $Ax \leq b$ und $x \geq 0$

Duales Programm

minimiere: $12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

sodass:
$$4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$$
$$8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

minimiere $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

mit $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

allg.: minimiere $b^T y$ mit $A^T y \geq c$ und $y \geq 0$

Beachte

- das duale vom dualen ist das primale Programm
- die Forderung $x \geq 0$ ist keine echte Einschränkung

Matrixschreibweise

Karlsruher Institut für Technologie

Primales Programm

maximiere: $2x_1 + 3x_2$

sodass: $4x_1 + 8x_2 \leq 12$

$2x_1 + 1x_2 \leq 3$

$3x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2 \geq 0$

$$\text{maximiere } \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allg.: maximiere $c^T x$ mit $Ax \leq b$ und $x \geq 0$

Duales Programm

minimiere: $12y_1 + 3y_2 + 4y_3$

sodass: $4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2$

$8y_1 + 1y_2 + 2y_3 \geq 3$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

$$\text{minimiere } \begin{pmatrix} 12 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

allg.: minimiere $b^T y$ mit $A^T y \geq c$ und $y \geq 0$

Beachte

- das duale vom dualen ist das primale Programm
- die Forderung $x \geq 0$ ist keine echte Einschränkung
- duales Programm liefert eine obere Schranke (untere bei Minimierung)

Dualitätssatz

Theorem
Für die linearen Programme

$$\text{maximiere } c^T x \text{ mit } Ax \leq b \text{ und } x \geq 0 \text{ und} \tag{P}$$

$$\text{minimiere } b^T y \text{ mit } A^T y \geq c \text{ und } y \geq 0 \tag{D}$$

gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- Weder (P) noch (D) hat eine gültige Lösung.
- (P) ist unbeschränkt und (D) hat keine gültige Lösung.
- (P) hat keine gültige Lösung und (D) ist unbeschränkt.
- (P) und (D) sind gültig und beschränkt. Das Maximum von (P) ist dann gleich dem Minimum von (D).

Dualitätssatz

Theorem

Für die linearen Programme

$$\text{maximiere } c^T x \text{ mit } Ax \leq b \text{ und } x \geq 0 \text{ und} \tag{P}$$

$$\text{minimiere } b^T y \text{ mit } A^T y \geq c \text{ und } y \geq 0 \tag{D}$$

gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- Weder (P) noch (D) hat eine gültige Lösung.
- (P) ist unbeschränkt und (D) hat keine gültige Lösung.
- (P) hat keine gültige Lösung und (D) ist unbeschränkt.
- (P) und (D) sind gültig und beschränkt. Das Maximum von (P) ist dann gleich dem Minimum von (D).

Beachte

- das duale Programm liefert also eine perfekte obere Schranke

Dualitätssatz

Theorem
Für die linearen Programme

$$\text{maximiere } c^T x \text{ mit } Ax \leq b \text{ und } x \geq 0 \text{ und} \qquad \text{(P)}$$

$$\text{minimiere } b^T y \text{ mit } A^T y \geq c \text{ und } y \geq 0 \qquad \text{(D)}$$

gilt genau eine der folgenden Aussagen:

- Weder (P) noch (D) hat eine gültige Lösung.
- (P) ist unbeschränkt und (D) hat keine gültige Lösung.
- (P) hat keine gültige Lösung und (D) ist unbeschränkt.
- (P) und (D) sind gültig und beschränkt. Das Maximum von (P) ist dann gleich dem Minimum von (D).

Beachte
- das duale Programm liefert also eine perfekte obere Schranke
- das LP muss nicht in der obigen Form vorliegen

ILPs

Ganzzahliges lineares Programm (ILP)

- genauso, wie LP, nur dass $x \in \mathbb{Z}^n$ gesucht wird, statt $x \in \mathbb{R}^n$

ILPs

Ganzzahliges lineares Programm (ILP)

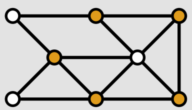
- genauso, wie LP, nur dass $x \in \mathbb{Z}^n$ gesucht wird, statt $x \in \mathbb{R}^n$
- macht das Problem NP-schwer

ILPs

Ganzzahliges lineares Programm (ILP)

- genauso, wie LP, nur dass $x \in \mathbb{Z}^n$ gesucht wird, statt $x \in \mathbb{R}^n$
- macht das Problem NP-schwer

Problem: Vertex Cover
Finde ein minimales Vertex Cover in einem Graphen $G = (V, E)$. (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



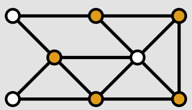
Beispiel: Vertex Cover

ILPs

Ganzzahliges lineares Programm (ILP)

- genauso, wie LP, nur dass $x \in \mathbb{Z}^n$ gesucht wird, statt $x \in \mathbb{R}^n$
- macht das Problem NP-schwer

Problem: Vertex Cover
Finde ein minimales Vertex Cover in einem Graphen $G = (V, E)$. (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Beispiel: Vertex Cover

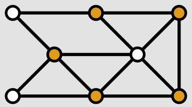
- Variablen: x_v für jeden Knoten $v \in V$
- Bedeutung: $x_v = 1 \Leftrightarrow v \in V'$ (und $x_v = 0$ sonst)

ILPs

Ganzzahliges lineares Programm (ILP)

- genauso, wie LP, nur dass $x \in \mathbb{Z}^n$ gesucht wird, statt $x \in \mathbb{R}^n$
- macht das Problem NP-schwer

Problem: Vertex Cover
Finde ein minimales Vertex Cover in einem Graphen $G = (V, E)$. (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Beispiel: Vertex Cover

- Variablen: x_v für jeden Knoten $v \in V$
- Bedeutung: $x_v = 1 \Leftrightarrow v \in V'$ (und $x_v = 0$ sonst)
- ILP:

$$
\begin{aligned}
\text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\text{sodass:} \quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \qquad (\Leftrightarrow x_v \in \{0, 1\}) \\
& x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E
\end{aligned}
$$

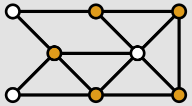
ILPs

Karlsruher Institut für Technologie

Ganzzahliges lineares Programm (ILP)

- genauso, wie LP, nur dass $x \in \mathbb{Z}^n$ gesucht wird, statt $x \in \mathbb{R}^n$
- macht das Problem NP-schwer

Problem: Vertex Cover
Finde ein minimales Vertex Cover in einem Graphen $G = (V, E)$. (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Beispiel: Vertex Cover

- Variablen: x_v für jeden Knoten $v \in V$
- Bedeutung: $x_v = 1 \Leftrightarrow v \in V'$ (und $x_v = 0$ sonst)
- ILP:

$$\begin{aligned} \text{minimiere:}\quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:}\quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \qquad (\Leftrightarrow x_v \in \{0, 1\}) \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

LP-Relaxierung

- fasst man ein ILP als LP auf, so spricht man von der LP-Relaxierung

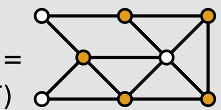
ILPs

Karlsruher Institut für Technologie

Ganzzahliges lineares Programm (ILP)

- genauso, wie LP, nur dass $x \in \mathbb{Z}^n$ gesucht wird, statt $x \in \mathbb{R}^n$
- macht das Problem NP-schwer

Problem: Vertex Cover
Finde ein minimales Vertex Cover in einem Graphen $G = (V, E)$. (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Beispiel: Vertex Cover

- Variablen: x_v für jeden Knoten $v \in V$
- Bedeutung: $x_v = 1 \Leftrightarrow v \in V'$ (und $x_v = 0$ sonst)
- ILP:

$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \quad (\Leftrightarrow x_v \in \{0, 1\}) \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

LP-Relaxierung

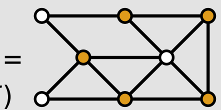
- fasst man ein ILP als LP auf, so spricht man von der LP-Relaxierung
- die LP-Lösung (und auch zug. duale Lösung) liefert Schranke für ILP (insbesondere nützlich bei Approximation)

ILPs

Ganzzahliges lineares Programm (ILP)

- genauso, wie LP, nur dass $x \in \mathbb{Z}^n$ gesucht wird, statt $x \in \mathbb{R}^n$
- macht das Problem NP-schwer

Problem: Vertex Cover
Finde ein minimales Vertex Cover in einem Graphen $G = (V, E)$. (Knotenmenge $V' \subseteq V$ mit $e \cap V' \neq \emptyset$ für alle $e \in E$)



Beispiel: Vertex Cover

- Variablen: x_v für jeden Knoten $v \in V$
- Bedeutung: $x_v = 1 \Leftrightarrow v \in V'$ (und $x_v = 0$ sonst)
- ILP:

$$\begin{aligned} \text{minimiere:} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\ \text{sodass:} \quad & 0 \leq x_v \leq 1 \text{ für } v \in V \quad (\Leftrightarrow x_v \in \{0, 1\}) \\ & x_u + x_v \geq 1 \text{ für } uv \in E \end{aligned}$$

LP-Relaxierung

- fasst man ein ILP als LP auf, so spricht man von der LP-Relaxierung
- die LP-Lösung (und auch zug. duale Lösung) liefert Schranke für ILP (insbesondere nützlich bei Approximation)
- manchmal liefert die LP-Relaxierung sogar die optimale Lösung

Zusammenfassung

Lineare Programme

- einfache Modellierung anderer Probleme

Zusammenfassung

Lineare Programme

- einfache Modellierung anderer Probleme
- verschiedene Arten der Normalisierung möglich

Zusammenfassung

Lineare Programme

- einfache Modellierung anderer Probleme
- verschiedene Arten der Normalisierung möglich
- manchmal helfen zusätzliche Variablen

Zusammenfassung

Lineare Programme

- einfache Modellierung anderer Probleme
- verschiedene Arten der Normalisierung möglich
- manchmal helfen zusätzliche Variablen
- geometrische Interpretation

Zusammenfassung

Lineare Programme

- einfache Modellierung anderer Probleme
- verschiedene Arten der Normalisierung möglich
- manchmal helfen zusätzliche Variablen
- geometrische Interpretation

Dualität

- systematische Berechnung oberer Schranken
- Dualitätssatz (ohne Beweis)

Zusammenfassung

Lineare Programme

- einfache Modellierung anderer Probleme
- verschiedene Arten der Normalisierung möglich
- manchmal helfen zusätzliche Variablen
- geometrische Interpretation

Dualität

- systematische Berechnung oberer Schranken
- Dualitätssatz (ohne Beweis)

ILP

- kann viele NP-harte Probleme modellieren

Zusammenfassung

Lineare Programme

- einfache Modellierung anderer Probleme
- verschiedene Arten der Normalisierung möglich
- manchmal helfen zusätzliche Variablen
- geometrische Interpretation

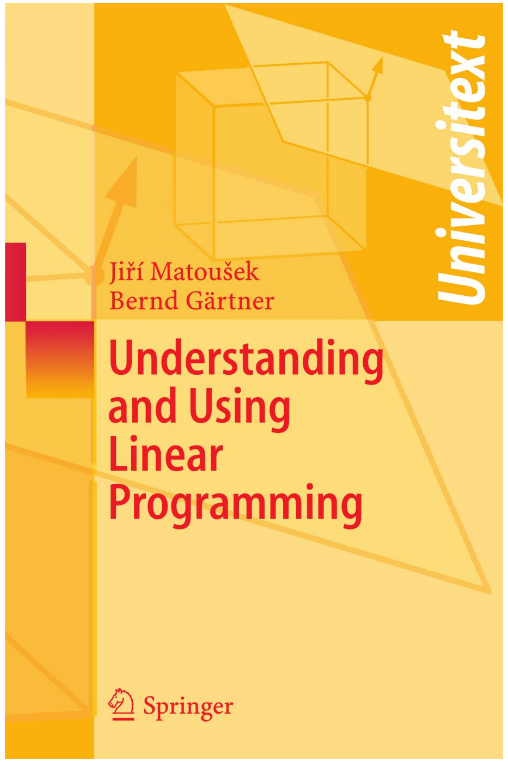
Dualität

- systematische Berechnung oberer Schranken
- Dualitätssatz (ohne Beweis)

ILP

- kann viele NP-harte Probleme modellieren
- LP-Relaxierung nützlich für Approximation

Literaturhinweise



Anmerkungen

- hervorragend geschrieben und schön kompakt
- aus dem Uninetz kostenlos abrufbar

  `link.springer.com/book/10.1007/978-3-540-30717-4`