

## Fünftes Übungsblatt

**Ausgabe:** 2. Juli 2021  
**Besprechung:** 13. Juli 2021

### 1 Perfektes Matching

Ein Matching  $M$  zu einem Graphen  $G$  heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von  $G$  zu einer Kante aus  $M$  inzident ist. Für welche  $n \geq 1$  und  $m \geq 1$  besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

1.  $P_n$  (der Graph bestehend aus einem einfachen Weg mit  $n$  Knoten)
2.  $C_n$  (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit  $n$  Knoten). Definiere ausnahmsweise  $C_2$  als  $K_2$ .
3.  $Q_n$  (der Hyperwürfel mit  $n$ -Bit Knoten IDs, siehe Übungsblatt 1)
4.  $K_n$
5.  $K_{n,m}$

### 2 Erhöhende Wege

Sei  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  ein bipartiter Graph (jede Kante hat einen Knoten in  $V_1$  und einen in  $V_2$ ). Weiter sei  $v$  ein Knoten und  $M'$  ein kardinalitätsmaximales Matching für  $G - v$ , wobei  $v$  nicht „gematcht“ ist (d.h.  $v$  ist zu keiner Kante aus  $M'$  inzident). Gesucht ist nun ein kardinalitätsmaximales Matching für  $G$ . Dazu soll Lemma 5.2 aus dem Skript benutzt werden: Falls es keinen erhöhenden Weg bzgl.  $M'$  mit Endknoten  $v$  gibt, ist  $M'$  bereits das gesuchte Matching. Ansonsten müssen wir einen erhöhenden Weg  $P$  bzgl.  $M'$  mit Endknoten  $v$  bestimmen, dann ist  $(M' \cup P) \setminus (M' \cap P)$  das gewünschte Matching.

Geben Sie einen Algorithmus an, der feststellt, ob es einen erhöhenden Weg bzgl.  $M'$  mit Endknoten  $v$  gibt und diesen gegebenenfalls bestimmt. Die Laufzeit soll linear in der Anzahl der Kanten von  $G$  sein.

*Hinweis:* Modifizieren Sie eine Breitensuche mit Startknoten  $v$ .

### 3 Große und kleine Matchings

Geben Sie für jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  einen zusammenhängenden Graphen mit  $n$  Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

1.  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  Kanten
2. eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

### 4 Schnitte, Kreise und Bäume im Dualgraph

Zeigen Sie:

1. Sei  $G = (V, E)$  ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph  $G^*$ . Für eine Teilmenge  $E' \subseteq E$  gilt, dass der Teilgraph  $(V, E')$  von  $G$  genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph  $(V^*, E^* \setminus E'^*)$  von  $G^*$  unzusammenhängend ist.
2. Sei  $G = (V, E)$  ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph  $G^* = (V^*, E^*)$ , und  $E' \subseteq E$ . Dann ist  $(V, E')$  ein aufspannender Baum von  $G$  genau dann, wenn  $(V^*, E^* \setminus E'^*)$  ein aufspannender Baum von  $G^*$  ist.

### 5 Dreiecke zählen in allgemeinen Graphen

Sei  $G$  ein Graph mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten. Der  $k$ -Core von  $G$  ist der maximale Subgraph in dem jeder Knoten mindestens Grad  $k$  hat. Die Core-Zerlegung weist jedem Knoten das maximale  $k$  zu für welches er im  $k$ -Core liegt. Die Entartetheit  $D(G)$  ist das größte  $k$  für welches  $G$  einen nicht-leeren  $k$ -Core hat.

1. Geben Sie einen Algorithmus, der die Core-Zerlegung in  $\mathcal{O}(n + m)$  berechnet.
2. Geben Sie einen Algorithmus an, der die Anzahl Dreiecke in  $G$  in  $\mathcal{O}((n+m)D(G))$  berechnet.  
**Hinweis:** Modifizieren Sie den Algorithmus von Übungsblatt 3.
3. Zeigen Sie dass für planare Graphen  $D(G) \leq 5$  gilt.