Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
Sommersemester 2021
Torsten Ueckerdt, Lars Gottesbüren

Drittes Übungsblatt

Ausgabe: 26. Mai 2021
Besprechung: 10. Juni 2021

1 Triangulierung

1. Geben Sie einen *Linearzeit-* Algorithmus (in der Anzahl der Knoten n) an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von G mit kombinatorischer Einbettung $\mathcal{G}'$ findet.
   Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten.

2. Führen Sie Ihren Algorithmus an folgenden Beispielgraphen aus und numerieren Sie jeweils die von Ihrem Algorithmus eingefügten Kanten in der Reihenfolge, in der Ihr Algorithmus sie einfügt.
   a) $K_{1,2}$ b) $K_{1,3}$ c) Q_2 d) G_1

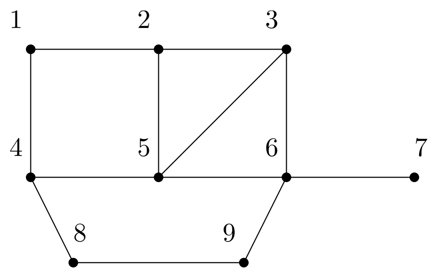

Abbildung 1: Der Graph G_1 zu Aufgabe 1

2 Minoren vs topologische Minoren

1. Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.

2. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

3. Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H einen Graphen G als Minor enthält, dann enthält H auch eine Unterteilung von G als Teilgraph.

Bitte wenden

3 Außenplanare Graphen

Ein planarer Graph G heißt *außenplanar*, falls er eine planare Einbettung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Eine äquivalente Formulierung ist, dass G genau dann außenplanar ist, wenn man zu G noch einen weiteren Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten hinzufügen kann, ohne die Planarität von G zu verletzen.

1. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann außerplanar, wenn er keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$ enthält.
2. Zeigen Sie, dass ein außerplanarer Graph G mit n Knoten höchstens $2n-3$ Kanten enthält.

4 Planare Einbettungen und geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher, zusammenhängender planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

5 Dreiecke zählen in planaren Graphen

Sei G ein einfacher, planarer Graph. Geben Sie einen Linearzeit-Algorithmus an, der für jeden Knoten v die Anzahl (graphentheoretischer) Dreiecke berechnet, in denen v vorkommt. Das Ergebnis soll also ein Array sein, in dem der i-te Eintrag die Anzahl Dreicke des i-ten Knoten angibt. Formal ist die Menge der Dreiecke von v durch die Menge an verbundenen Paaren von Nachbarknoten $\{\{x, y\} \in E | \{v, x\}, \{v, y\} \in E\}$ definiert. Die Einbettung spielt dabei keine Rolle.