

Erstes Übungsblatt

Ausgabe: 13. April 2021
Besprechung: 22. April 2021

1 Hyperkubus

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ ist der n -dimensionale Würfel Q_n der Graph mit folgenden Knoten und Kanten: Die Knotenmenge besteht aus den Wörtern der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$. D.h. $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$. Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden.

1. Wieviele Knoten hat Q_n ? Wieviele Kanten hat Q_n ?
2. Beschreiben Sie die Knotengrade der Knoten im Q_n .
3. Betten Sie Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 (wenn möglich kreuzungsfrei) in die Ebene ein.
4. Betten Sie Q_4 kreuzungsfrei auf der Oberfläche eines Torus ein.

2 Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei $a_i, 1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G . Nummeriere die Facetten so, dass die Folge (a_1, a_2, \dots, a_f) nichtabsteigend sortiert ist.

Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, sodass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

3 Skewness

Die *Skewness* eines Graphen G ist die minimale Anzahl von Kanten, die aus G gelöscht werden müssen, damit der resultierende Graph planar ist. D.h. die Skewness eines Graphen ist 0 genau dann, wenn der Graph planar ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen einfachen Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt:
$$\text{skewness}(G) \geq m - 3n + 6.$$
2. Berechnen Sie die *Skewness* von $K_3, K_5, K_{3,3}$ und K_6 .

Bitte wenden!

4 Maximal planare Graphen und Triangulierungen

Gegeben sei ein einfacher Graph G mit einer planaren Einbettung und mindestens 3 Knoten. G heißt *maximal-planar*, falls keine Kante zwischen bestehenden Knoten so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt. G heißt *trianguliert*, falls jede Facette einen Kreis der Länge 3 als Rand hat. Zeigen Sie, dass G genau dann maximal-planar ist, wenn G trianguliert ist.

5 Bäume

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen G mit n Knoten:

1. G ist ein Baum, d.h. G ist zusammenhängend und kreisfrei.
2. G ist zusammenhängend und hat $n - 1$ Kanten.
3. G ist kreisfrei und hat $n - 1$ Kanten.

6 Selbstdualität

Definition: G heißt *selbstdual*, wenn G isomorph zum geometrischen Dualgraphen G^* ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen selbstdualen Graph mit n Knoten und m Kanten gilt: $m = 2n - 2$.
2. Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ einen selbstdualen Graphen G mit einer festen Einbettung an.

Hinweis: Für $n = 2$ und $n = 3$ muss der Graph Multikanten enthalten.