Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

10. Juni 2021, Übung 3

Lars Gottesbüren

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

1 – Triangulierung

Triangulierung in $\mathcal{O}(n)$

1. Füge Kanten hinzu so, dass es keine Grad-1 Knoten mehr gibt.
2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.
3. Löse Schleifen und Multikanten durch Kantentausch auf.

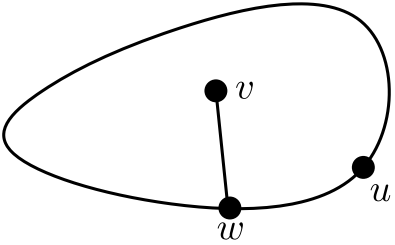
1 – Triangulierung

Triangulierung in $\mathcal{O}(n)$

1. Füge Kanten hinzu so, dass es keine Grad-1 Knoten mehr gibt.
2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.
3. Löse Schleifen und Multikanten durch Kantentausch auf.

1.1 – Triangulierung

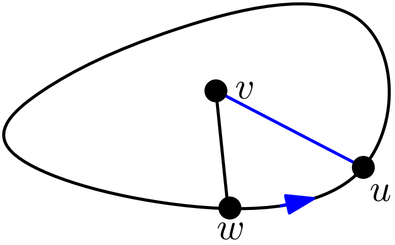
1. Füge Kanten hinzu so, dass es keine Grad-1-Knoten mehr gibt.



- Sei v Knoten mit Grad 1.
- Seine Kante sei $\{v, w\}$ und f die Facette in der er liegt.
- Laufe f von w aus im Gegenuhrzeigersinn ab.
- Verbinde v mit dem zweiten besuchten Knoten u.

1.1 – Triangulierung

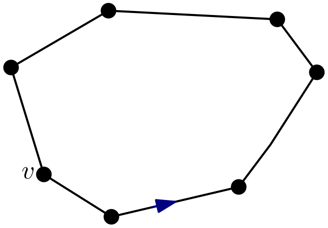
1. Füge Kanten hinzu so, dass es keine Grad-1-Knoten mehr gibt.



- Sei v Knoten mit Grad 1.
- Seine Kante sei $\{v, w\}$ und f die Facette in der er liegt.
- Laufe f von w aus im Gegenuhrzeigersinn ab.
- Verbinde v mit dem zweiten besuchten Knoten u.

1.2 – Triangulierung

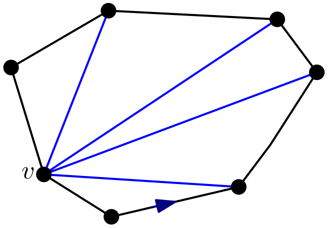
2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.



- Für jede Facette f wähle beliebigen Knoten v.
- Laufe f ab und verbinde v mit allen besuchten Knoten, außer dem Vorgänger und Nachfolger von v auf f.

1.2 – Triangulierung

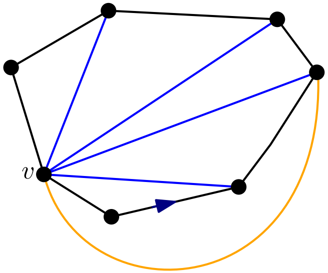
2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.



- Für jede Facette f wähle beliebigen Knoten v.
- Laufe f ab und verbinde v mit allen besuchten Knoten, außer dem Vorgänger und Nachfolger von v auf f.

1.2 – Triangulierung

2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.

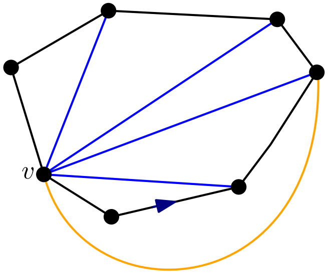


Doppelkanten

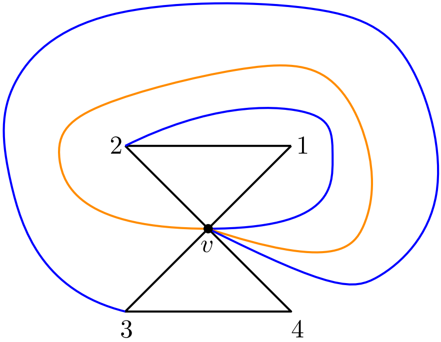
- Für jede Facette f wähle beliebigen Knoten v.
- Laufe f ab und verbinde v mit allen besuchten Knoten, außer dem Vorgänger und Nachfolger von v auf f.

1.2 – Triangulierung

2. Trianguliere Graph ohne auf Schleifen/Multikanten zu achten.



Doppelkanten



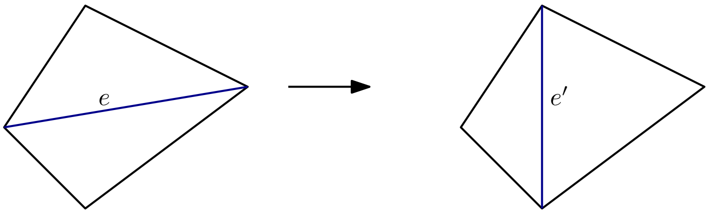
Schleifen

1.3 – Triangulierung

3. Löse Schleifen und Multikanten durch Kantentausch auf.

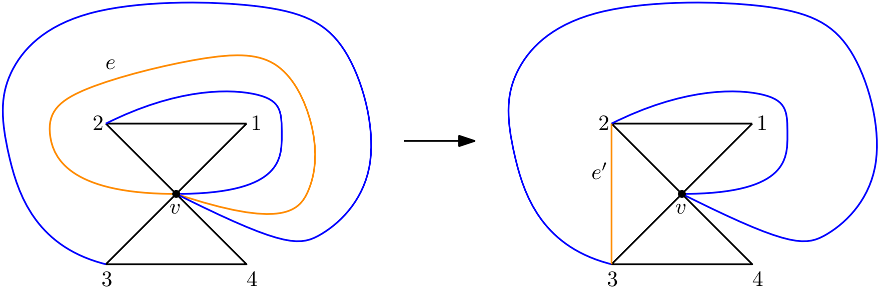
Kantentausch

- Betrachte Kante e eines triangulierten Graphen.
- Das Entfernen von e ergibt eine Facette f mit Grad 4.
- Füge Kante e' in f ein, die nicht die gleichen Knoten wie e verbindet.



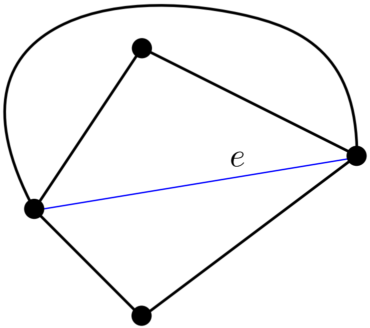
1.3 – Triangulierung

3. Löse **Schleifen** und Multikanten durch Kantentausch auf.



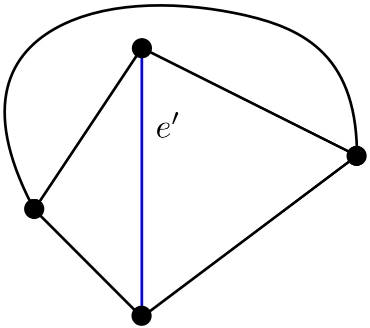
1.3 – Triangulierung

3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.
   - Sei *e* eine Multikanten.
   - Kann e' eine Multikante sein?



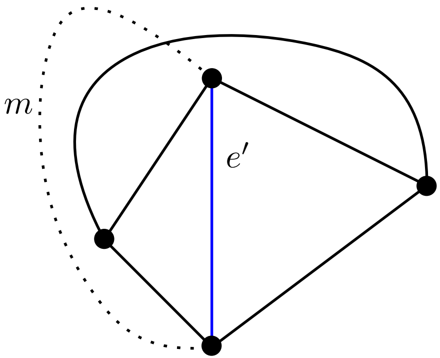
1.3 – Triangulierung

3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.
   - Sei *e* eine Multikanten.
   - Kann e' eine Multikante sein?



1.3 – Triangulierung

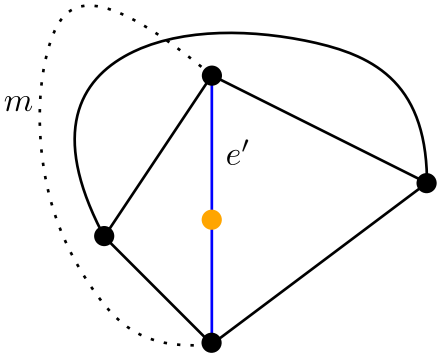
3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.



- Sei *e* eine Multikanten.
- Kann e' eine Multikante sein?
- Angenommen es gibt eine planare Einbettung mit Kante *m*.

1.3 – Triangulierung

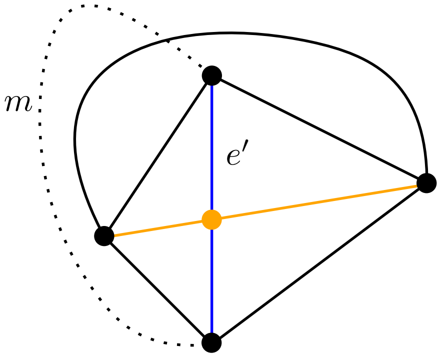
3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.



- Sei e eine Multikanten.
- Kann e' eine Multikante sein?
- Angenommen es gibt eine planare Einbettung mit Kante m.
- Unterteile e'.

1.3 – Triangulierung

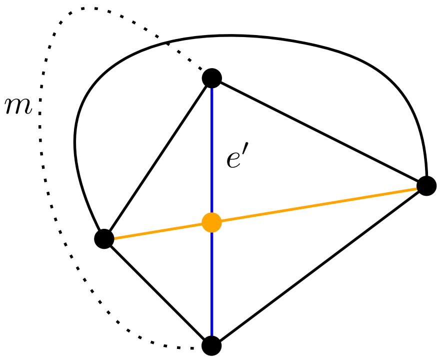
3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.



- Sei *e* eine Multikanten.
- Kann e' eine Multikante sein?
- Angenommen es gibt eine planare Einbettung mit Kante *m*.
- Unterteile e'.
- Füge weitere Kanten ein, die die Planarität nicht verletzen.

1.3 – Triangulierung

3. Löse Schleifen und **Multikanten** durch Kantentausch auf.



- Sei e eine Multikanten.
- Kann e' eine Multikante sein?
- Angenommen es gibt eine planare Einbettung mit Kante m.
- Unterteile e'.
- Füge weitere Kanten ein, die die Planarität nicht verletzen.
- Planare Einbettung für K_5 gefunden. $\lightning$

1 – Triangulierung Laufzeit

Wenn Schleifen und Multikanten bekannt sind, dann braucht Schritt 3 lineare Zeit: $\mathcal{O}(1)$ pro Facette.

Lemma

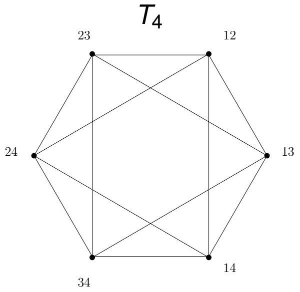
Doppelkanten und Schleifen können in $\mathcal{O}(n)$ Zeit bestimmt werden.

Für jeden Konten $v \in V$:

- Iteriere über alle ausgehende Kante von v und markiere benachbarte Knoten.
- Wird ein Knoten mehr als einmal markiert ist eine Multikante gefunden.
- Wird v markiert ist eine Schleife gefunden.

Jede *gerichtete* Kante wird einmal besucht $\Rightarrow \mathcal{O}(n)$

2.1 – Der Petersengraph



Definition: T_n

- Die Knoten sind alle zweielementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$.
- Zwei Knoten sind genau dann verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist.

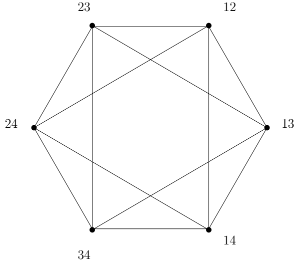
2.1 – Der Petersengraph

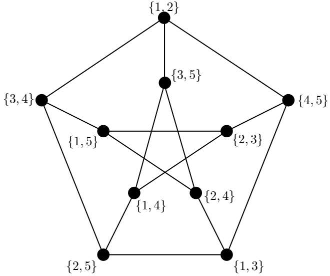
Definition: T_n

- Die Knoten sind alle zweielementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$.
- Zwei Knoten sind genau dann verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist.

Der Komplementgraph P von T_5 heißt Petersengraph.

T_4





Satz von Kuratowski

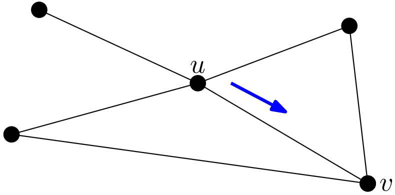
Es gibt zwei Varianten des Satzes von Kuratowski:

- Ein einfacher Graph G ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung von $K_{3,3}$ noch eine Unterteilung von K_5 als Teilgraph enthält. (Topologischer Minor)
- Ein einfacher Graph G ist genau dann planar, wenn er weder $K_{3,3}$ noch K_5 als Minor enthält. (Wagner)

Minor

Kontraktion der Kante $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante e.
- Identifiziere u und v.
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



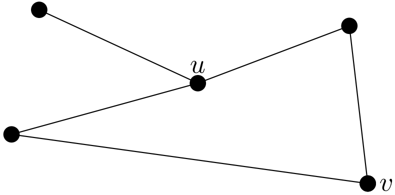
Minor

- G ist Minor von H, wenn H einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion G hervorgeht.

Topologischer Minor

- G ist topologischer Minor von H, wenn H einen Unterteilungsgraphen von G enthält.

Minor



Kontraktion der Kante $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante e.
- Identifiziere u und v.
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.

Minor

- G ist Minor von H, wenn H einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion G hervorgeht.

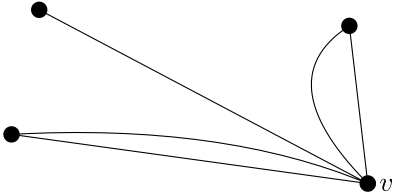
Topologischer Minor

- G ist topologischer Minor von H, wenn H einen Unterteilungsgraphen von G enthält.

Minor

Kontraktion der Kante $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante e.
- Identifiziere u und v.
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



Minor

- G ist Minor von H, wenn H einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion G hervorgeht.

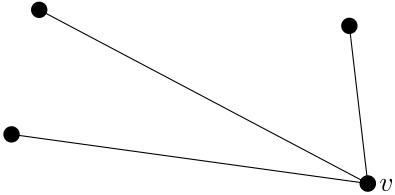
Topologischer Minor

- G ist topologischer Minor von H, wenn H einen Unterteilungsgraphen von G enthält.

Minor

Kontraktion der Kante $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante e.
- Identifiziere u und v.
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



Minor

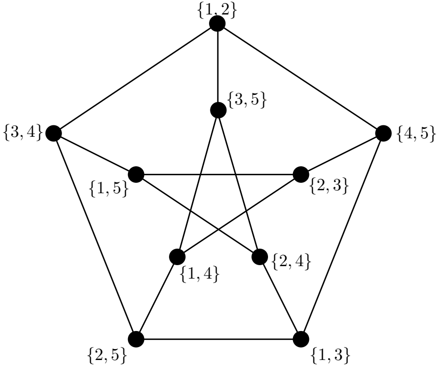
- G ist Minor von H, wenn H einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion G hervorgeht.

Topologischer Minor

- G ist topologischer Minor von H, wenn H einen Unterteilungsgraphen von G enthält.

2.2 – Der Petersengraph

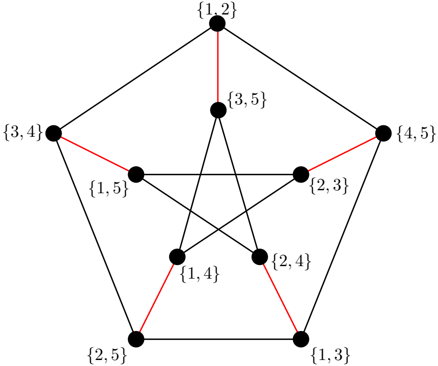
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält K_5 als Minor.

2.2 – Der Petersengraph

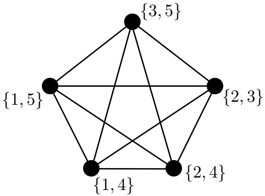
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält K_5 als Minor.

2.2 – Der Petersengraph

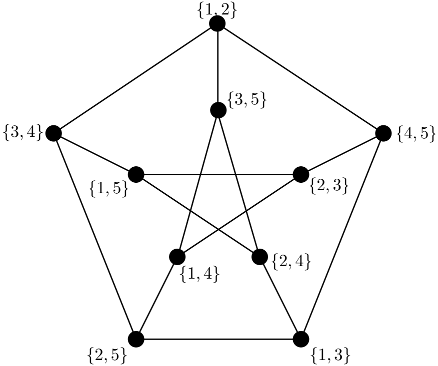
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält K_5 als Minor.

2.2 – Der Petersengraph

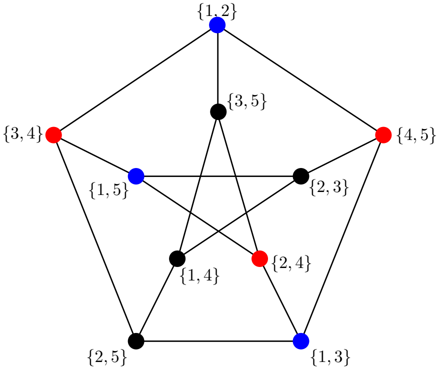
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

2.2 – Der Petersengraph

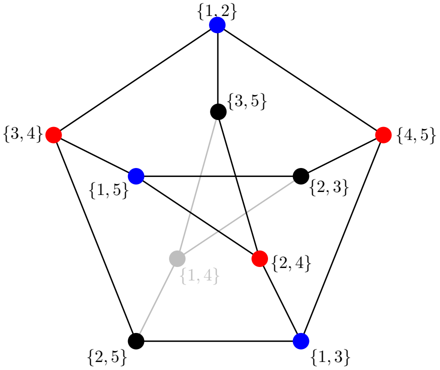
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

2.2 – Der Petersengraph

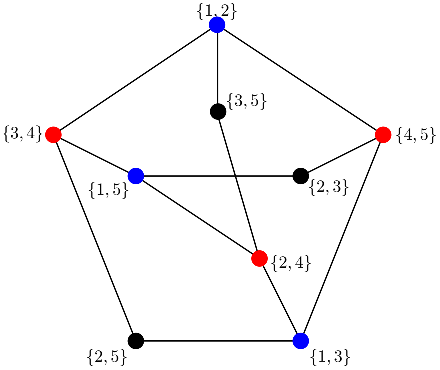
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

2.2 – Der Petersengraph

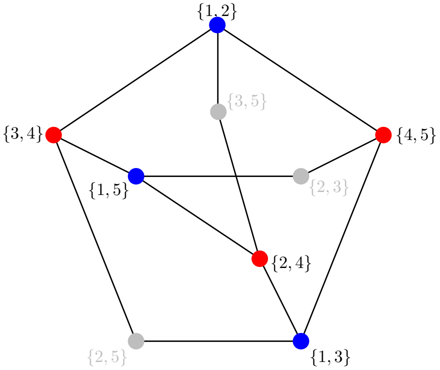
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

2.2 – Der Petersengraph

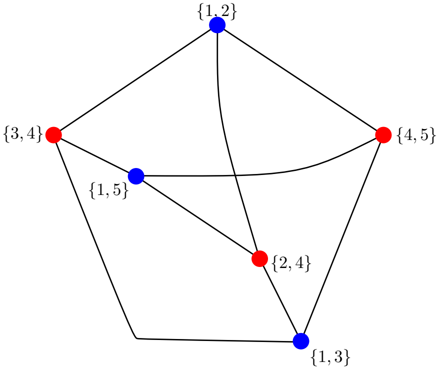
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

2.2 – Der Petersengraph

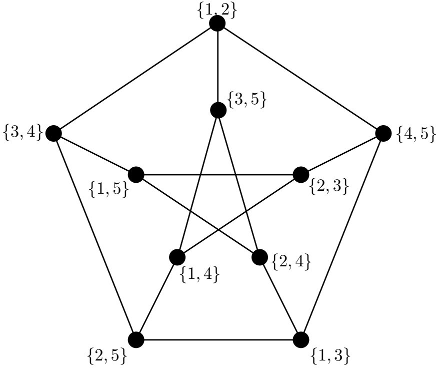
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des $K_{3,3}$.

2.2 – Der Petersengraph

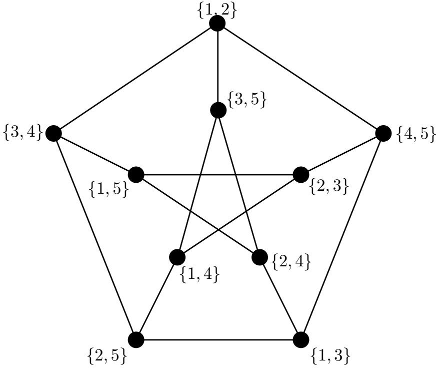
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. ↯

2.2 – Der Petersengraph

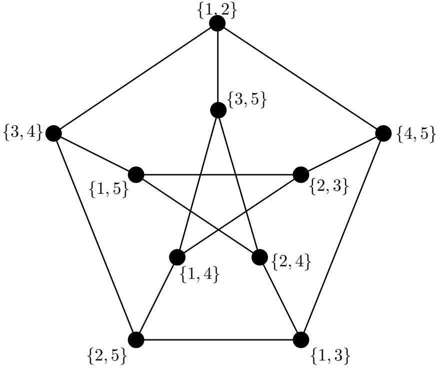
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. $\lightning$

2.2 – Der Petersengraph

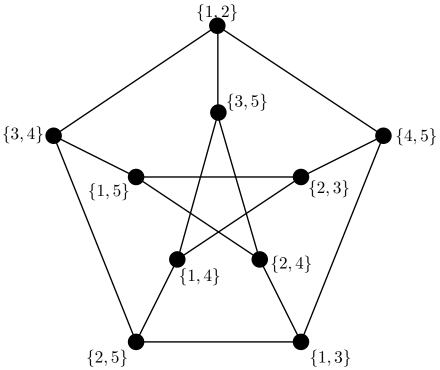
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. $\lightning$

2.2 – Der Petersengraph

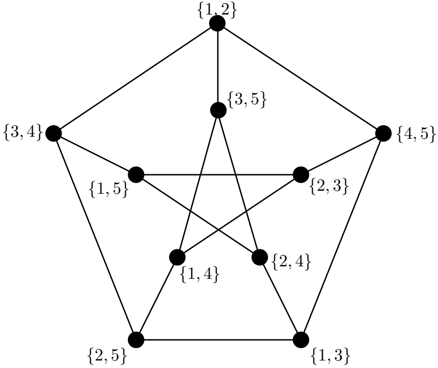
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. ↯

2.2 – Der Petersengraph

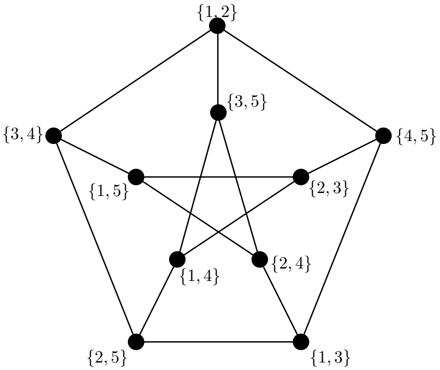
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. ↯

2.2 – Der Petersengraph

Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen P wäre planar.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - P hat mindestens $(5 \cdot 7)/2 = 17$ Kanten.
- P hat aber nur 15 Kanten. $\lightning$

2.3 – Topologischer Minor $\Rightarrow$ Minor

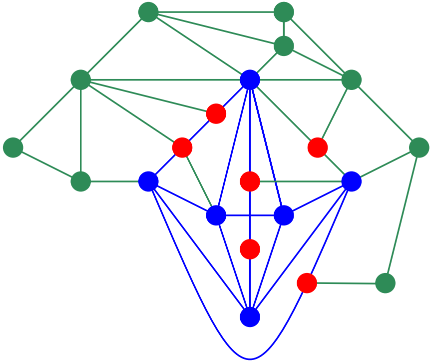
Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

- Angenommen H enthält Unterteilung U von G.
- Lösche alle Kanten aus H die nicht zur Unterteilung von G gehören.
- Es gibt Knoten mit Grad 2, die eingefügt wurden, um U aus G zu erhalten.
- Kontrahiere jeden dieser Knoten mit einem seiner Nachbarn.

2.3 – Topologischer Minor ⇒ Minor

Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

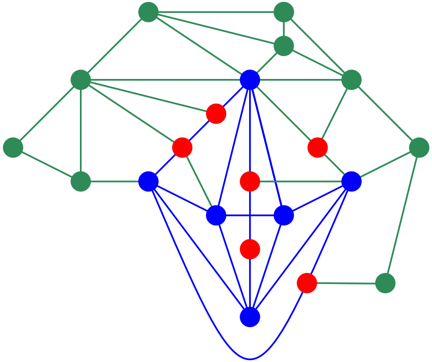
- Angenommen H enthält Unterteilung U von G.
- Lösche alle Kanten aus H die nicht zur Unterteilung von G gehören.
- Es gibt Knoten mit Grad 2, die eingefügt wurden, um U aus G zu erhalten.
- Kontrahiere jeden dieser Knoten mit einem seiner Nachbarn.



2.3 – Topologischer Minor $\Rightarrow$ Minor

Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

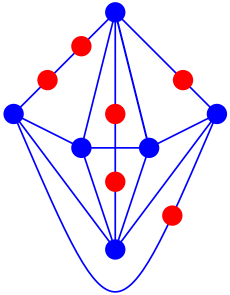
- Angenommen H enthält Unterteilung U von G.
- Lösche alle Kanten aus H die nicht zur Unterteilung von G gehören.
- Es gibt Knoten mit Grad 2, die eingefügt wurden, um U aus G zu erhalten.
- Kontrahiere jeden dieser Knoten mit einem seiner Nachbarn.



2.3 – Topologischer Minor $\Rightarrow$ Minor

Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

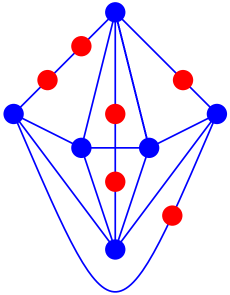
- Angenommen H enthält Unterteilung U von G.
- Lösche alle Kanten aus H die nicht zur Unterteilung von G gehören.
- Es gibt Knoten mit Grad 2, die eingefügt wurden, um U aus G zu erhalten.
- Kontrahiere jeden dieser Knoten mit einem seiner Nachbarn.



2.3 – Topologischer Minor $\Rightarrow$ Minor

Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

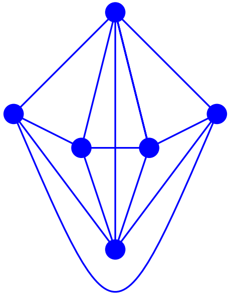
- Angenommen H enthält Unterteilung U von G.
- Lösche alle Kanten aus H die nicht zur Unterteilung von G gehören.
- Es gibt Knoten mit Grad 2, die eingefügt wurden, um U aus G zu erhalten.
- Kontrahiere jeden dieser Knoten mit einem seiner Nachbarn.



2.3 – Topologischer Minor $\Rightarrow$ Minor

Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

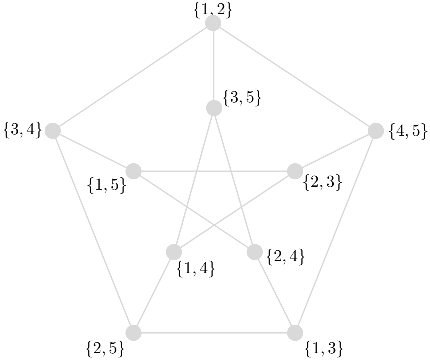
- Angenommen H enthält Unterteilung U von G.
- Lösche alle Kanten aus H die nicht zur Unterteilung von G gehören.
- Es gibt Knoten mit Grad 2, die eingefügt wurden, um U aus G zu erhalten.
- Kontrahiere jeden dieser Knoten mit einem seiner Nachbarn.



2.4 – Minor $\not\Rightarrow$ Topologischer Minor

Wenn ein einfacher Graph *H* einen Graphen *G* als Minor enthält, dann enthält *H* auch eine Unterteilung von *G* als Teilgraph. Stimmt nicht!

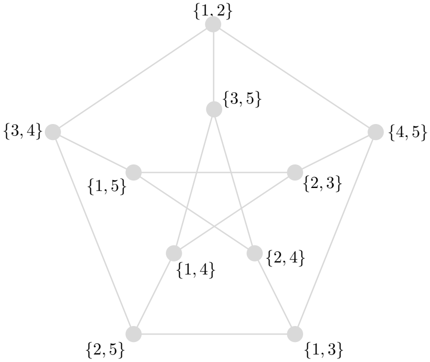
- Der Petersen-Graph *P* enthält K_5 als Minor.
- Unterteilung erhält den Knotengrad der ursprünglichen Knoten.
- Würde *P* den Graph K_5 als Unterteilung enthalten, müsste *P* mindestens 5 Knoten mit Grad 4 haben.



2.4 – Minor $\not\Rightarrow$ Topologischer Minor

Wenn ein einfacher Graph H einen Graphen G als Minor enthält, dann enthält H auch eine Unterteilung von G als Teilgraph. Stimmt nicht!

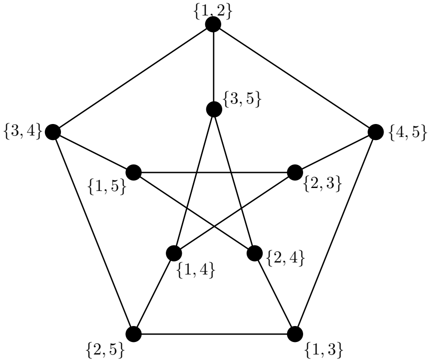
- Der Petersen-Graph P enthält K_5 als Minor.
- Unterteilung erhält den Knotengrad der ursprünglichen Knoten.
- Würde P den Graph K_5 als Unterteilung enthalten, müsste P mindestens 5 Knoten mit Grad 4 haben.



2.4 – Minor $\not\Rightarrow$ Topologischer Minor

Wenn ein einfacher Graph H einen Graphen G als Minor enthält, dann enthält H auch eine Unterteilung von G als Teilgraph. Stimmt nicht!

- Der Petersen-Graph P enthält K_5 als Minor.
- Unterteilung erhält den Knotengrad der ursprünglichen Knoten.
- Würde P den Graph K_5 als Unterteilung enthalten, müsste P mindestens 5 Knoten mit Grad 4 haben.



3 – Außenplanare Graphen

Karlsruher Institut für Technologie

G ist *außenplanar*.

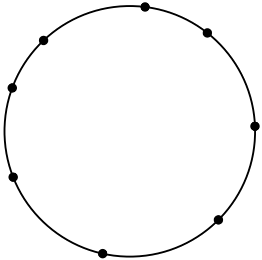
$\Leftrightarrow$ G lässt sich so planar einbetten, dass jeder Knoten auf der äußeren Facette liegt.

$\Leftrightarrow$ Fügt man einen Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten zu G hinzu, ist G immer noch planar.

1. G ist genau dann außenplanar, wenn er keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$ enthält.
2. Ein außenplanarer Graph hat höchstens $2n - 3$ Kanten.

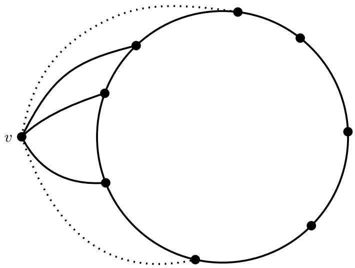
3.1 – Außenplanare Graphen

G ist außenplanar $\Rightarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Betrachte außenplanare Einbettung von G.

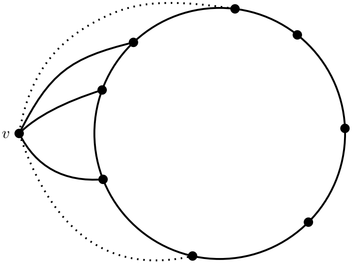
G ist außenplanar $\Rightarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Betrachte außenplanare Einbettung von G.
- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus $G \rightarrow G'$.
- G' ist planar $\Rightarrow$ G' enthält keine Unterteilung des K_5 oder $K_{3,3}$.
  $\Rightarrow$ G enthält keine Unterteilung des K_4 oder $K_{2,3}$.

3.1 – Außenplanare Graphen

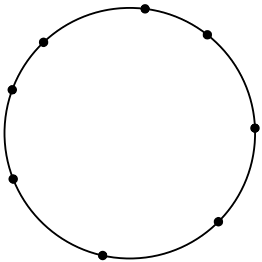
G ist außenplanar $\Leftarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus $G \to G'$.
- G' enthält weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Unterteilung.
- $\Rightarrow$ G' ist planar.
- Betrachte planare Einbettung von G' mit v auf der äußeren Facette.

3.1 – Außenplanare Graphen

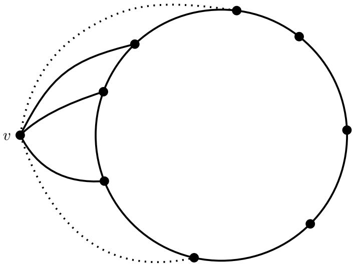
G ist außenplanar $\Leftarrow$ G enthält keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$.



- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus $G \to G'$.
- G' enthält weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Unterteilung.
- $\Rightarrow$ G' ist planar.
- Betrachte planare Einbettung von G' mit v auf der äußeren Facette.
- Lösche v $\Rightarrow$ alle Knoten von G liegen auf der äußeren Facette.

3.2 – Außenplanare Graphen

Ein außenplanarer Graph G enthält höchstens $2n - 3$ Kanten.



- Füge Knoten v hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten von $G \rightarrow G'$.
- G' hat $m' = m + n$ Kanten und $n' = n + 1$ Knoten.
- Da G' planar ist gilt: $m' \leq 3n' - 6$
- Also: $n + m \leq 3(n + 1) - 6$
  $\Rightarrow m \leq 2n - 3$

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

- Wir führen den Beweis für alle zusammenhängenden maximal planaren Graphen.

Induktion über n:

- **IA:** $n = 3$
- **IV:** Jeder einfache, eingebettete, maximal planare Graph mit $n - 1$ Knoten lässt sich geradlinig zeichnen.

Geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

- Wir führen den Beweis für alle zusammenhängenden maximal planaren Graphen.

Induktion über n:

- **IA:** $n = 3$
- **IV:** Jeder einfache, eingebettete, maximal planare Graph mit $n - 1$ Knoten lässt sich geradlinig zeichnen.

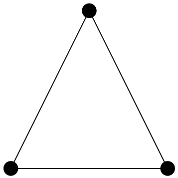
Geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

- Wir führen den Beweis für alle zusammenhängenden maximal planaren Graphen.

Induktion über n:

- **IA:** $n = 3$
- **IV:** Jeder einfache, eingebettete, maximal planare Graph mit $n - 1$ Knoten lässt sich geradlinig zeichnen.



Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

- Sei G ein maximal planarer Graph mit n Knoten.
- $\Rightarrow m = 3n - 6$
- Defizit $def(v) := 6 - deg(v)$
- $\Sigma_{v \in V} def(v) = 12$
  - $\Sigma def(v) = \Sigma(6 - deg(v)) = 6n - \Sigma deg(v) = 6n - 2m = 6n - 2(3n - 6) = 12$
- Jeder Knoten hat maximal Defizit 3.
  - Offensichtlich hat G keinen Grad 0 oder 1 Knoten.
  - Angenommen Knoten v in G hat Grad 2.
  - $G - v$ hat $n - 1$ Knoten und $m - 2$ Kanten.
  - $m = 3n - 6$
  - $m - 2 = 3n - 8 = 3(n - 1) - 5 > 3(n - 1) - 6 \lightning$

Geradlinige Zeichnungen

Karlsruher Institut für Technologie

$n - 1 \curvearrowright n$

- Sei G ein maximal planarer Graph mit $n \geq 4$ Knoten.

Lemma

Es gibt mindestens 4 Knoten mit $\deg(v) \leq 5$.

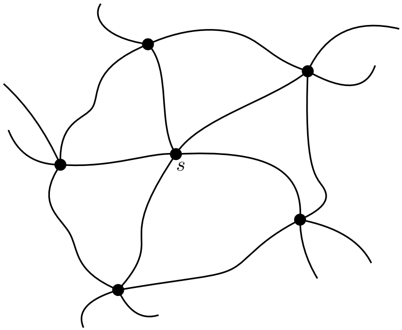
- $6 - deg(v) \leq 3$
- $\sum_{v \in V}(6 - deg(v)) = 12$

$\Rightarrow$ Es gibt mindestens $\frac{12}{3} = 4$ Knoten mit $def(v) > 0$.
$\Rightarrow$ Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.

Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

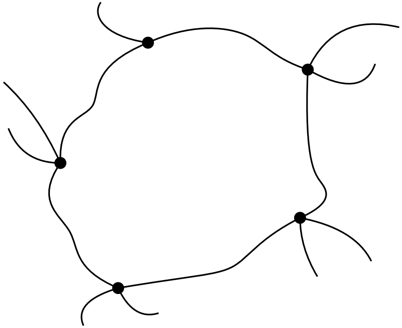
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

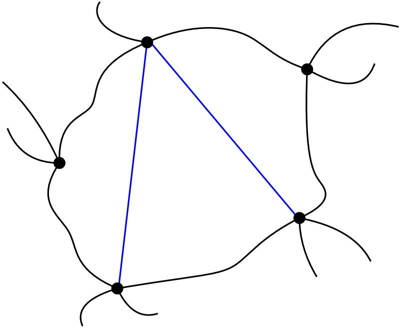
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

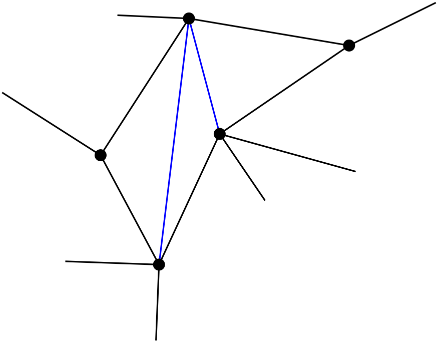
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

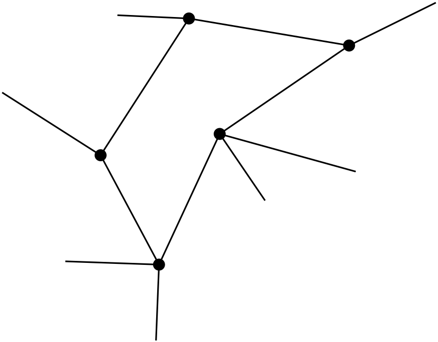
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

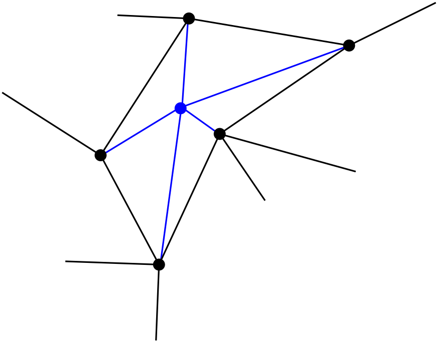
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



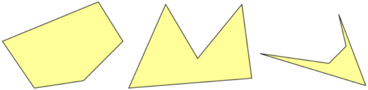
Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



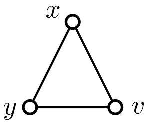
- *Problem der Museumswächter*
- Zur Bewachung eines überschneidungsfreien, geschlossenen, planaren Polygons mit n Ecken sind maximal $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter nötig.



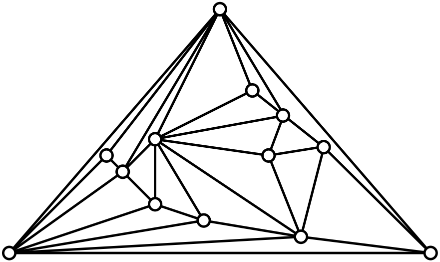
Dreiecke Zählen

Für alle $v \in V$: bestimme Zahl der *Dreiecke* in denen v vorkommt.
Laufzeit: $\mathcal{O}(n)$

- Gegeben: $G = (V, E)$ ungerichteter, planarer Graph.
- Dreiecke in denen v vorkommt: $\{\{x, y\} \in E | \{v, x\}, \{v, y\} \in E\}$



Dreiecke Zählen

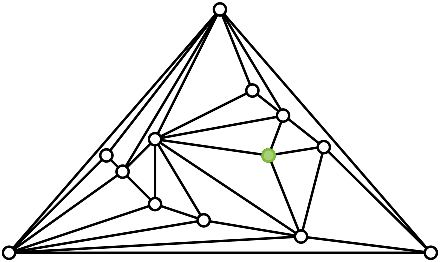


Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**
  $D_v = 0$
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**
    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**
      if ADJAZENT(v, w)
      then
        $D_v = D_v + 1$
      end if
    end for
  end for
end for

Dreiecke Zählen

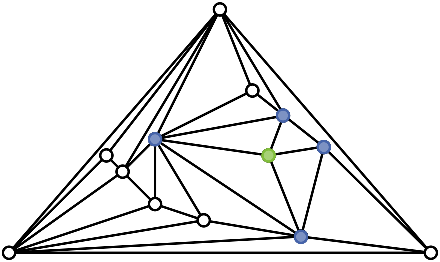


Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**
  $D_v = 0$
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**
    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**
      if ADJAZENT(v, w) **then**
        $D_v = D_v + 1$
      end if
    end for
  end for
end for

Dreiecke Zählen

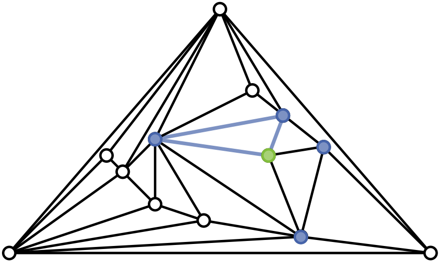


Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**
  $D_v = 0$
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**
    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**
      if ADJAZENT(v, w)
      then
        $D_v = D_v + 1$
      end if
    end for
  end for
end for

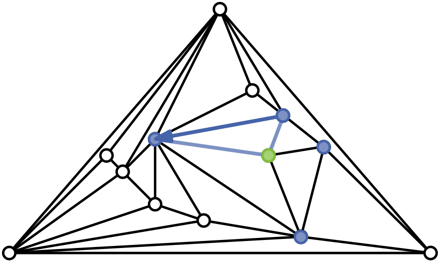
Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

```
VORBERECHNUNG()
for v ∈ V do
    D_v = 0
    for u ∈ N(v) do
        for w ∈ N⁺(u) do
            if ADJAZENT(v, w)
            then
                D_v = D_v + 1
            end if
        end for
    end for
end for
```

Dreiecke Zählen

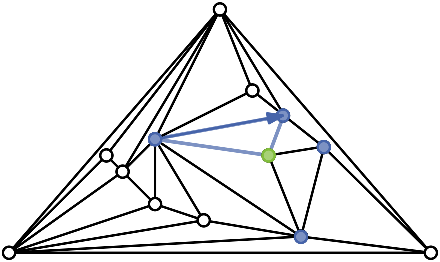


Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**
  $D_v = 0$
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**
    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**
      if ADJAZENT(v, w)
      then
        $D_v = D_v + 1$
      end if
    end for
  end for
end for

Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**
  $D_v = 0$
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**
    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**
      if ADJAZENT(v, w) **then**
        $D_v = D_v + 1$
      end if
    end for
  end for
end for