Algorithmen für Planare Graphen

22. April 2021, Übung 1

Lars Gottesbüren

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Organisatorisches

Übungsleiter

- Fragen per E-Mail an `lars.gottesbueren@kit.edu`

Übungsblätter

- 6 Übungen – 6 Übungsblätter
- Keine Abgabe, nicht verpflichtend
- Themen inklusive der Vorlesung eine Woche vor der Übung
- Veröffentlichung mindestens eine Woche vor der Übung
- Zweck: Einstieg in einfache, anschauliche Beweisführung

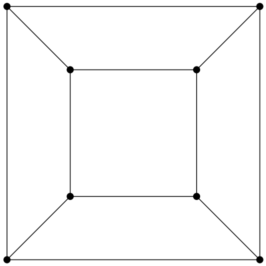
Themen heute

- Fingerübungen
- Induktion
- Widerspruchsbeweise, Kontraposition
- Abzählen
- Euler, Euler, Euler

1 – Hyperkubus

Definition: Der *n-dimensionale Würfel* Q_n ist ein Graph mit folgenden Knoten und Kanten:

- Knoten: Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$. D.h. $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$.
- Kanten: Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden.



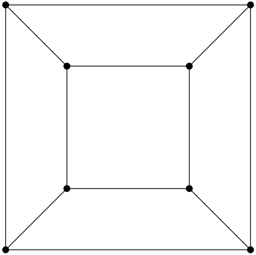
1a/b – Hyperkubus

Anzahl Knoten

- $V(Q_n) = \{0, 1\}^n \Rightarrow |V(Q_n)| = 2^n$

Knotengrad *d*

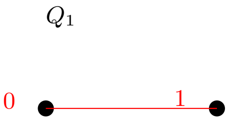
- Knoten sind benachbart, wenn sich die zugehörigen Wörter in genau einer Stelle unterscheiden
- Jedes Wort hat *n* stellen und es gibt alle möglichen Wörter
- $d = n$



Anzahl Kanten

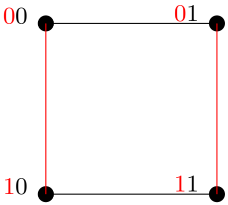
- Knotengrad für alle Knoten gleich
- $|E(Q_n)| = |V(Q_n)| \cdot d \cdot \frac{1}{2} = 2^n \cdot n \cdot \frac{1}{2} = 2^{n-1} \cdot n$

1c – Hyperkubus

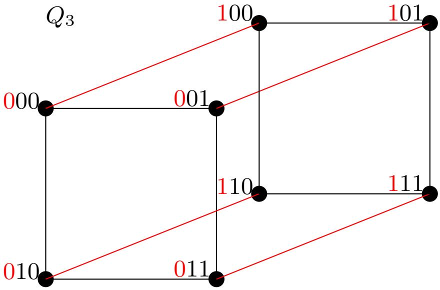


1c – Hyperkubus

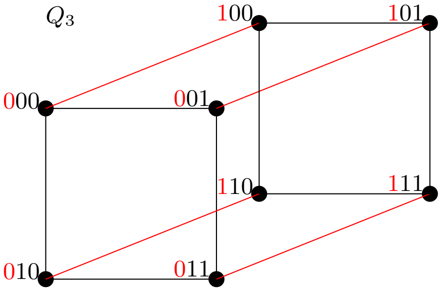
Q_2

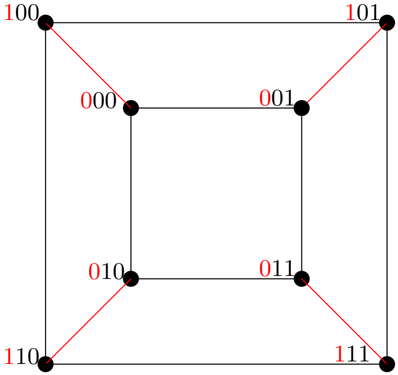


1c – Hyperkubus

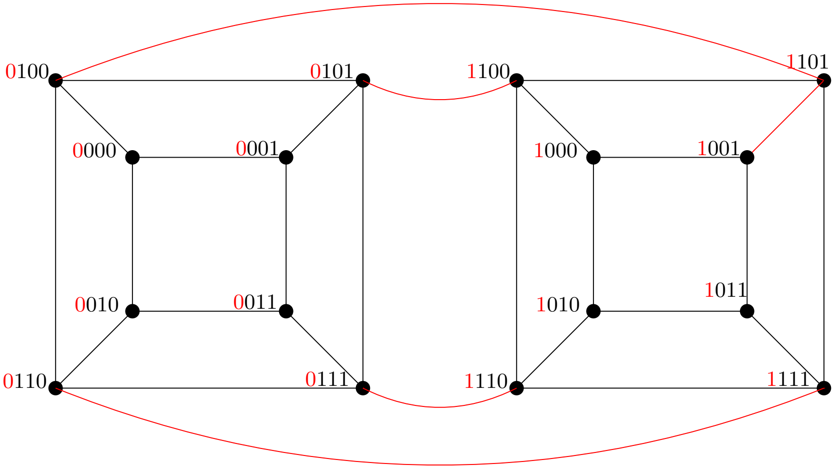


1c – Hyperkubus

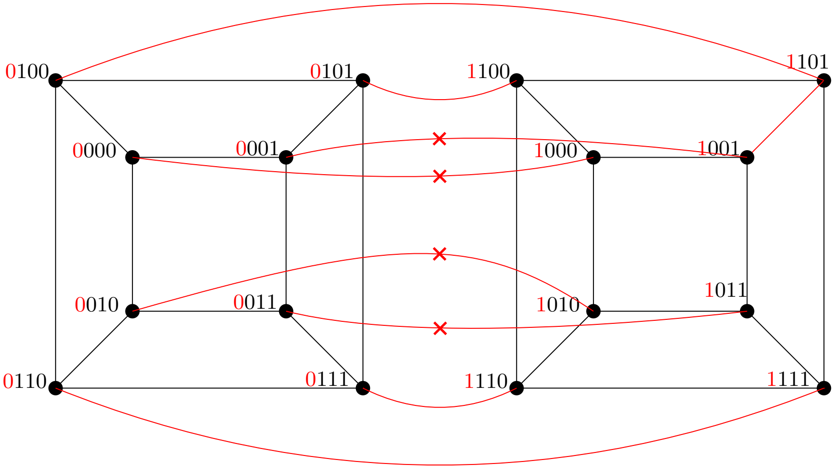




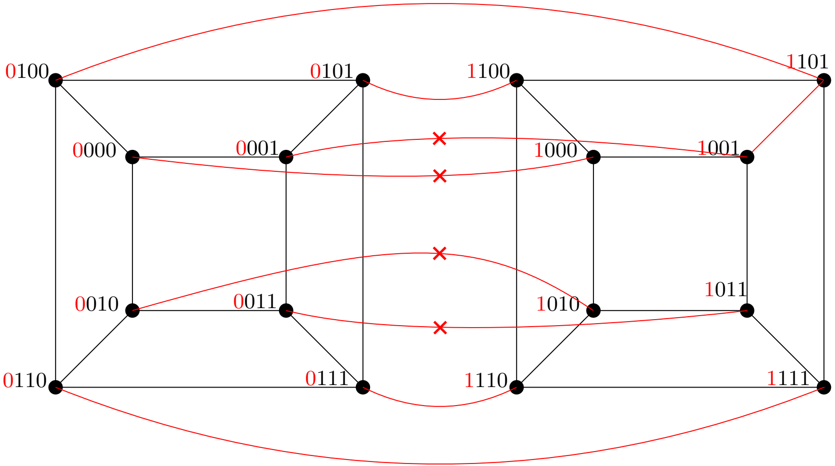
1c – Hyperkubus



1c – Hyperkubus

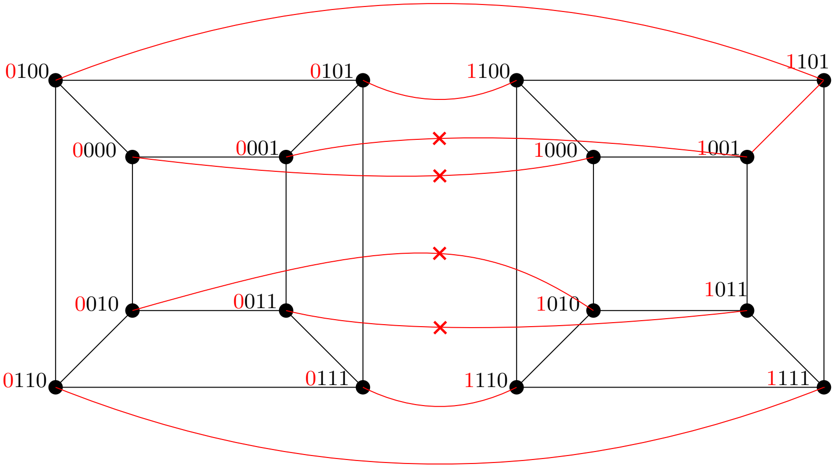


1c – Hyperkubus



Behauptung: Q_4 hat 4 Kanten zu viel, um planar einbettbar zu sein.

1c – Hyperkubus



Behauptung: Q_4 hat 4 Kanten zu viel, um planar einbettbar zu sein.
Q_4 enthält keine Dreiecke.

1c – Hyperkubus

Behauptung: Ein zusammenhängender planarer Graph G mit $n \geq 4$ Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens $2n - 4$ Kanten.

1c – Hyperkubus

Behauptung: Ein zusammenhängender planarer Graph G mit $n \geq 4$ Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens $2n - 4$ Kanten.

Beweis:

- Keine Dreiecke $\Rightarrow$ Jede Facette ist durch mind. vier Kanten begrenzt $\Rightarrow 4f \leq 2m \Leftrightarrow f \leq m/2$
- G ist zusammenhängend $\Rightarrow n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = 2 - n + m$

1c – Hyperkubus

Behauptung: Ein zusammenhängender planarer Graph G mit $n \geq 4$ Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens $2n - 4$ Kanten.

Beweis:

- Keine Dreiecke $\Rightarrow$ Jede Facette ist durch mind. vier Kanten begrenzt $\Rightarrow 4f \leq 2m \Leftrightarrow f \leq m/2$
- G ist zusammenhängend $\Rightarrow n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = 2 - n + m$

$\Rightarrow 2 - n + m \leq m/2 \Leftrightarrow 4 - 2n + 2m \leq m \Leftrightarrow m \leq 2n - 4$

1c – Hyperkubus

Behauptung: Ein zusammenhängender planarer Graph G mit $n \geq 4$ Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens $2n - 4$ Kanten.

Beweis:

- Keine Dreiecke $\Rightarrow$ Jede Facette ist durch mind. vier Kanten begrenzt $\Rightarrow 4f \leq 2m \Leftrightarrow f \leq m/2$
- G ist zusammenhängend $\Rightarrow n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = 2 - n + m$

$\Rightarrow 2 - n + m \leq m/2 \Leftrightarrow 4 - 2n + 2m \leq m \Leftrightarrow m \leq 2n - 4$

Behauptung: Q_4 hat 4 Kanten zu viel, um planar einbettbar zu sein.

1c – Hyperkubus

Behauptung: Ein zusammenhängender planarer Graph G mit $n \geq 4$ Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens $2n - 4$ Kanten.

Beweis:

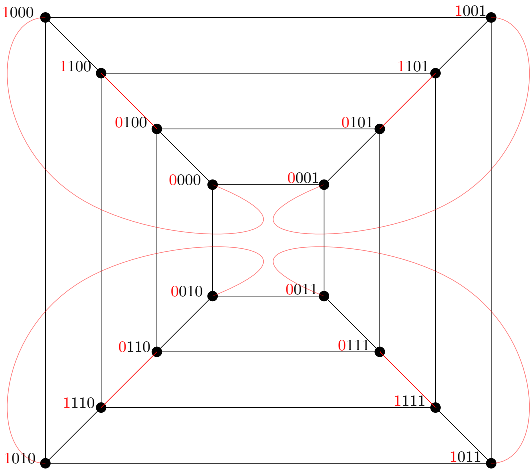
- Keine Dreiecke $\Rightarrow$ Jede Facette ist durch mind. vier Kanten begrenzt $\Rightarrow 4f \leq 2m \Leftrightarrow f \leq m/2$
- G ist zusammenhängend $\Rightarrow n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = 2 - n + m$

$\Rightarrow 2 - n + m \leq m/2 \Leftrightarrow 4 - 2n + 2m \leq m \Leftrightarrow m \leq 2n - 4$

Behauptung: Q_4 hat 4 Kanten zu viel, um planar einbettbar zu sein.

Beweis: $|E(Q_4)| = \underbrace{2^3}_{=8} \cdot 4 = 32 \leq 2 \cdot \underbrace{|V(Q_4)|}_{=2^4=16} - 4 = 28$ ↯

1d – Hyperkubus



2 – Facettengradfolge

- Sei G kreuzungsfrei eingebetteter Graph mit f Facetten
- $a_i = |\{e \in E(G) \mid e \text{ ist inzident zu Facette } i\}|$, für $1 \leq i \leq f$
- $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ sei nichtabsteigend sortiert

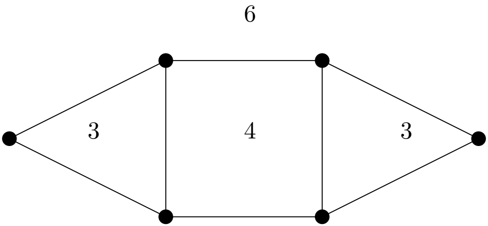
Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, sodass die zugehörigen Facettengradfolgen unterschiedlich sind?

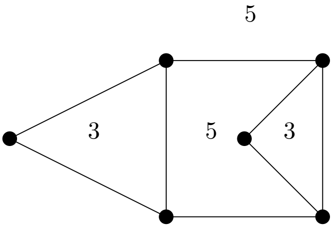
2 – Facettengradfolge

- Sei G kreuzungsfrei eingebetteter Graph mit f Facetten
- $a_i = |\{e \in E(G) \mid e \text{ ist inzident zu Facette } i\}|$, für $1 \leq i \leq f$
- $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ sei nichtabsteigend sortiert

Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, sodass die zugehörigen Facettengradfolgen unterschiedlich sind?

Ja!





3 – Skewness

Definition: Die *Skewness* eines Graphen G ist die minimale Anzahl von Kanten, die aus G gelöscht werden müssen, damit der resultierende Graph planar ist.

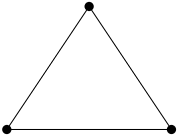
Zu zeigen: $\text{skewness}(G) \geq m - 3n + 6$, mit $n = |V(G)|, m = |E(G)|$

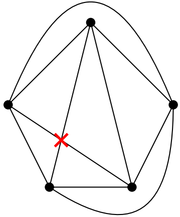
- Sei $S \subset E$ sodass $(V, E \setminus S)$ planar und $|S| = \text{skewness}(G)$
- $|E| - |S| = |E \setminus S| \leq 3n - 6$

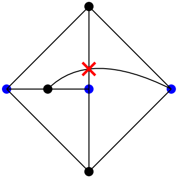
$\Rightarrow skewness(G) \geq m - 3n + 6$

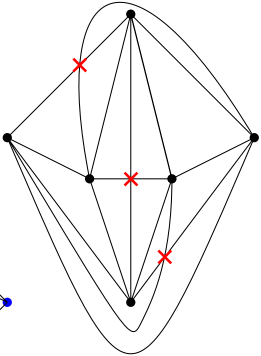
3 – Skewness

G	n	m	$m - 3n + 6$	$skewness(G)$
K_3	3	3	0	0
K_5	5	10	1	1
$K_{3,3}$	6	9	-3	1
K_6	6	15	3	3









4 – Triangulierung

Karlsruher Institut für Technologie

G einfacher Graph mit planarer Einbettung. $|V(G)| \geq 3$.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planarer Einbettung. $|V(G)| \geq 3$.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planarer Einbettung. $|V(G)| \geq 3$.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planarer Einbettung. $|V(G)| \geq 3$.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planarer Einbettung. $|V(G)| \geq 3$.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind
  $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ kann planar eingebettet werden

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planarer Einbettung. $|V(G)| \geq 3$.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind
  $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ kann planar eingebettet werden
  $\Rightarrow$ G nicht maximal planar

4 – Triangulierung

Karlsruher Institut für Technologie

G einfacher Graph mit planarer Einbettung. $|V(G)| \geq 3$.

- G *maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- G *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind
  $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ kann planar eingebettet werden
  $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
- G trianguliert $\Rightarrow$ G maximal planar

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planarer Einbettung. $|V(G)| \geq 3$.

- G *maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- G *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind
  $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ kann planar eingebettet werden
  $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
- G trianguliert $\Rightarrow$ G maximal planar
  - Das Innere einer zusätzlichen Kante liegt in einer Facette, die Enden auf dem Rand der Facette

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planarer Einbettung. $|V(G)| \geq 3$.

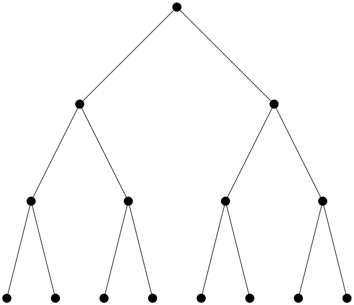
- G *maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- G *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind
  $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ kann planar eingebettet werden
  $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
- G trianguliert $\Rightarrow$ G maximal planar
  - Das Innere einer zusätzlichen Kante liegt in einer Facette, die Enden auf dem Rand der Facette
  - trianguliert $\Rightarrow$ die Enden waren bereits vorher verbunden $\Rightarrow$ Doppelkante
    $\Rightarrow$ G maximal planar

5 – Bäume

1. G ist ein Baum, d.h. G ist zusammenhängend und kreisfrei
2. G ist zusammenhängend und hat $n-1$ Kanten
3. G ist kreisfrei und hat $n-1$ Kanten



Zu zeigen: $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$

Beweisstrategie:

- $1 \Rightarrow 2$
- $2 \Rightarrow 3$
- $3 \Rightarrow 1$

5 – Bäume 1 $\Rightarrow$ 2

G ist zusammenhängend mit n Knoten

- Zu zeigen: G ist *kreisfrei* $\Rightarrow$ G hat $n-1$ Kanten
- Induktion über n
- *IA*: $n = 1 \Rightarrow$ keine Kante ✓
- *IV*: Ein Baum mit $n-1$ Knoten hat $n-2$ Kanten
- $n - 1 \curvearrowright n$
  - $\exists v$ mit $\deg(v) = 1$
    - $\exists$ Pfad zwischen beliebigen Knoten x, y
    - Die Enden des längsten Pfades müssen Grad 1 haben
  - $G - v$ ist zusammenhängend und kreisfrei
  - nach *IV* hat $G - v$ genau $n-2$ Kanten
    $\Rightarrow$ G hat $n-1$ Kanten

5 – Bäume $2 \Rightarrow 3$

G hat $n-1$ Kanten

- Zu zeigen: G ist zusammenhängend $\Rightarrow$ G ist kreisfrei
- Angenommen G sei zusammenhängend aber nicht kreisfrei
- Lösche eine Kante aus einem Kreis $\rightarrow G'$
- G' ist immer noch zusammenhängend hat aber nur noch $n-2$ Kanten $\lightning$

5 – Bäume 3 $\Rightarrow$ 1

Karlsruher Institut für Technologie

G ist kreisfrei

- Zu zeigen: G hat $n-1$ Kanten $\Rightarrow$ G ist zusammenhängend
- Sei k die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G
- $n_i :=$ Anzahl Knoten der $i$ten Komponente
- $m_i :=$ Anzahl Kanten der $i$ten Komponente
- Jede Komponente ist kreisfrei und zusammenhängend
- Mit 1) $\Rightarrow$ 2) gilt: $m_i = n_i - 1$
- $n - 1 = m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = n - k$
  $\Rightarrow k = 1$

6 – Selbstdualität

G heißt selbstdual, wenn G isomorph zu seinem Dualgraphen G^* ist

1. G selbstdual mit n Knoten und m Kanten $\Rightarrow m = 2n - 2$
2. Geben Sie für alle $n \geq 1$ einen selbstdualen Graphen G mit fester Einbettung an

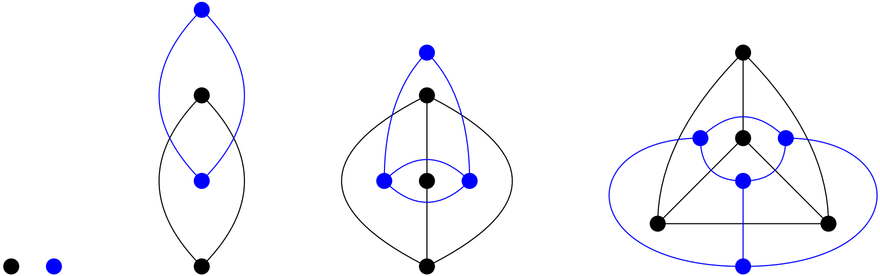
6 – Selbstdualität

G selbstdual $\Rightarrow m = 2n - 2$

- Facetten in G sind Knoten in $G^* \Rightarrow f \to n$
- Da G und G^* isomorph sind folgt $f = n$
- Dualgraphen sind immer zusammenhängend, daher gilt für G und G^* der Satz von Euler
- $n - m + f = 2 \Rightarrow 2n - m = 2 \Rightarrow m = 2n - 2$

6 – Selbstdualität

Selbstdualer Graph für alle $n \geq 1$



6 – Selbstdualität