Karlsruher Institut für Technologie

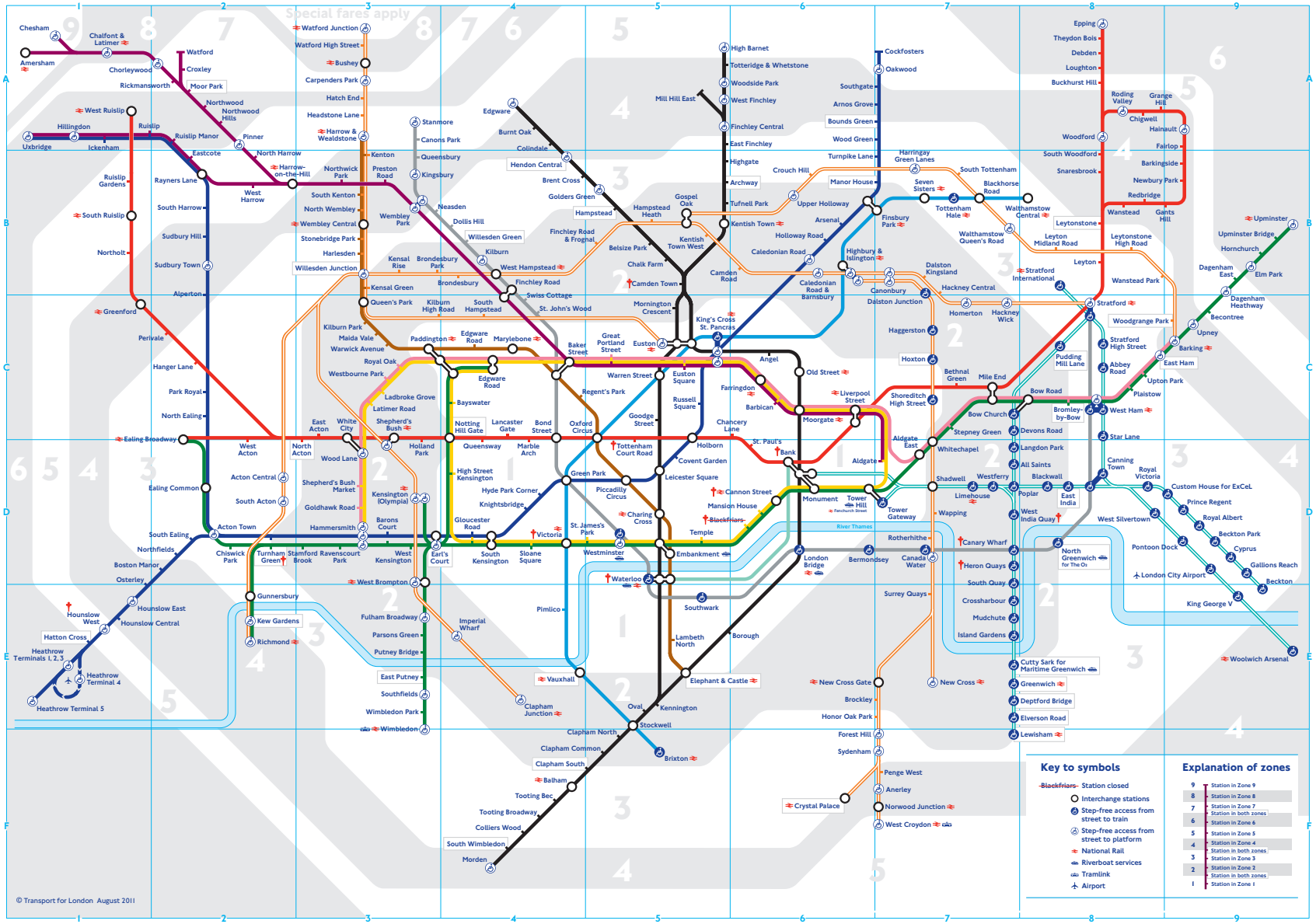
Algorithmen für Routenplanung

18. Vorlesung, Sommersemester 2020

Jonas Sauer | 8. Juli 2020

Institut für Theoretische Informatik · Algorithmik · Prof. Dr. Dorothea Wagner

Fahrplanauskunft



Abgrenzung zu Straßennetzwerken

Eingabe bei Straßennetzen:
Straßenkarte modelliert als Graph, bestehend aus

- Kreuzungen $\hat{=}$ Knoten
- Straßensegmenten $\hat{=}$ Kanten
- Metriken (Reisezeit, Distanz, ...) $\hat{=}$ Kantengewichte

Abgrenzung zu Straßennetzwerken

Eingabe bei Straßennetzen:
Straßenkarte modelliert als Graph, bestehend aus

- Kreuzungen $\hat{=}$ Knoten
- Straßensegmenten $\hat{=}$ Kanten
- Metriken (Reisezeit, Distanz, ...) $\hat{=}$ Kantengewichte

Was ist die Eingabe bei ÖV-Netzwerken?

Fahrpläne

Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...),
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Zur Modellierung von Umstiegen:
  - Mindestumstiegszeiten an Stops: $\tau_{\text{ch}} : \mathcal{S} \to \mathbb{N}_0$
  - Fußwege zwischen (nahen) Stops: $\tau_{\text{walk}} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

Fahrpläne

Fahrplan:

- Menge $\mathcal{S}$ von Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, Haltestellen, ...),
- Menge $\mathcal{T}$ von Trips (Züge, Busse, Trams, ...)
- Menge $\mathcal{C}$ von Connections (elementare Verbindungen)
- Zur Modellierung von Umstiegen:
  - Mindestumstiegszeiten an Stops: $\tau_{\text{ch}} : \mathcal{S} \to \mathbb{N}_0$
  - Fußwege zwischen (nahen) Stops: $\tau_{\text{walk}} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

Connection: 5-Tupel $c = \left(v_{\text{dep}}(c), v_{\text{arr}}(c), \tau_{\text{dep}}(c), \tau_{\text{arr}}(c), \text{trip}(c)\right)$

- Repräsentiert Fahrt des Trips $\text{trip}(c) \in \mathcal{T}$
- ...von Abfahrtsstop $v_{\text{dep}}(c) \in \mathcal{S}$
- ...mit Abfahrtszeit $\tau_{\text{dep}}(c) \in \Pi$
- ...zu Ankunftsstop $v_{\text{arr}}(c) \in \mathcal{S}$
- ...mit Ankunftszeit $\tau_{\text{arr}}(c) \in \Pi$
- ...ohne Zwischenhalt

Fahrpläne II

Trip:

- Folge von Connections $T = (c_1, \ldots, c_k)$
- Fahrt *eines* Zuges (Busses, ...)
- von Endstation zu Endstation
- Abfahrten an den Stops zu bestimmten Zeiten

Fahrpläne II

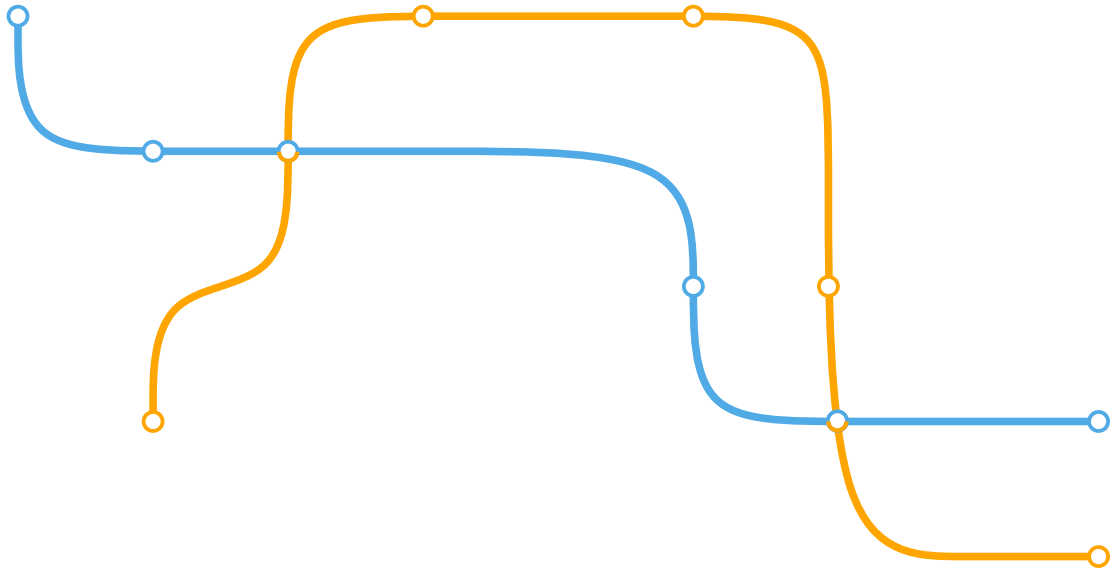
Trip:

- Folge von Connections $T = (c_1, \ldots, c_k)$
- Fahrt *eines* Zuges (Busses, ...)
- von Endstation zu Endstation
- Abfahrten an den Stops zu bestimmten Zeiten

Routen:

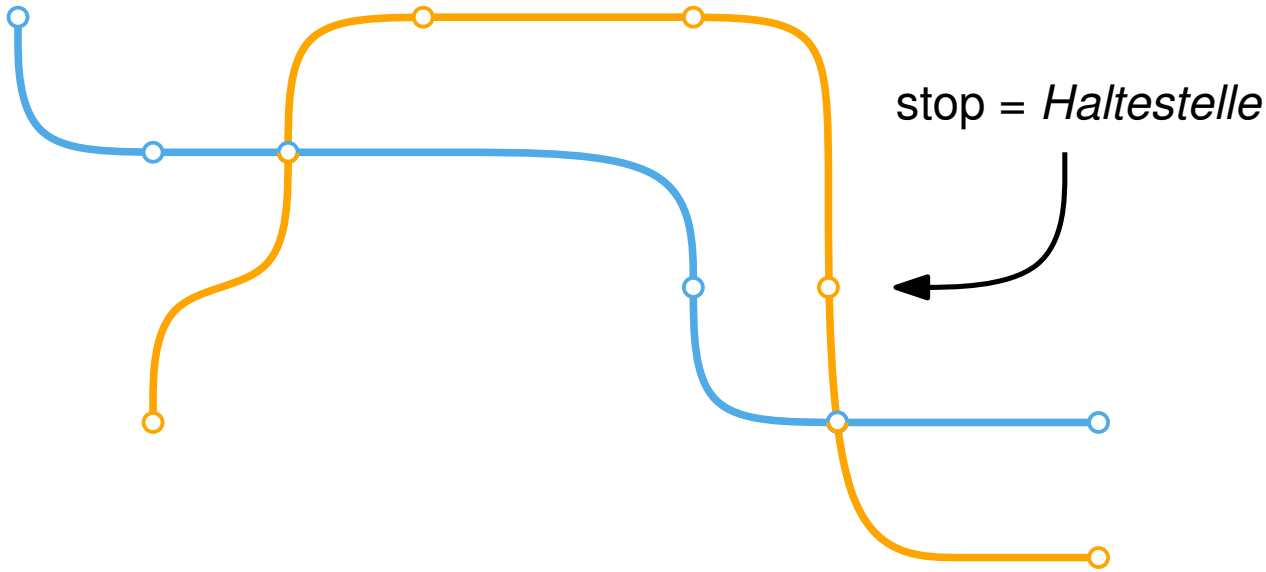
- Partitionierung der Trips
- Route entspricht Zug-/Bahnlinie
- Zwei Trips T_1, T_2 gehören zur gleichen Route
  $\Leftrightarrow$ T_1 und T_2 besuchen genau die gleiche Sequenz von Stops
- Ist bei realen Zug-/Bahnlinien nicht immer der Fall!

Fahrpläne – Beispiel

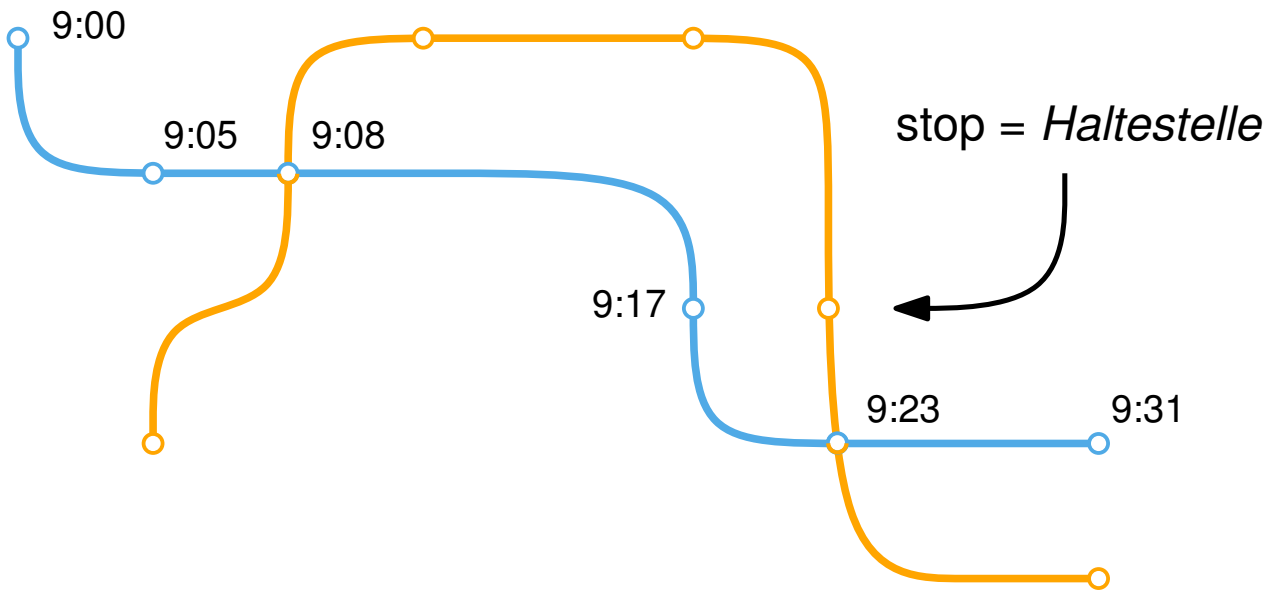


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

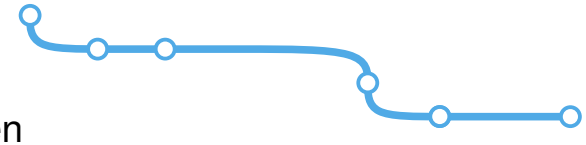
Fahrpläne – Beispiel



Fahrpläne – Beispiel

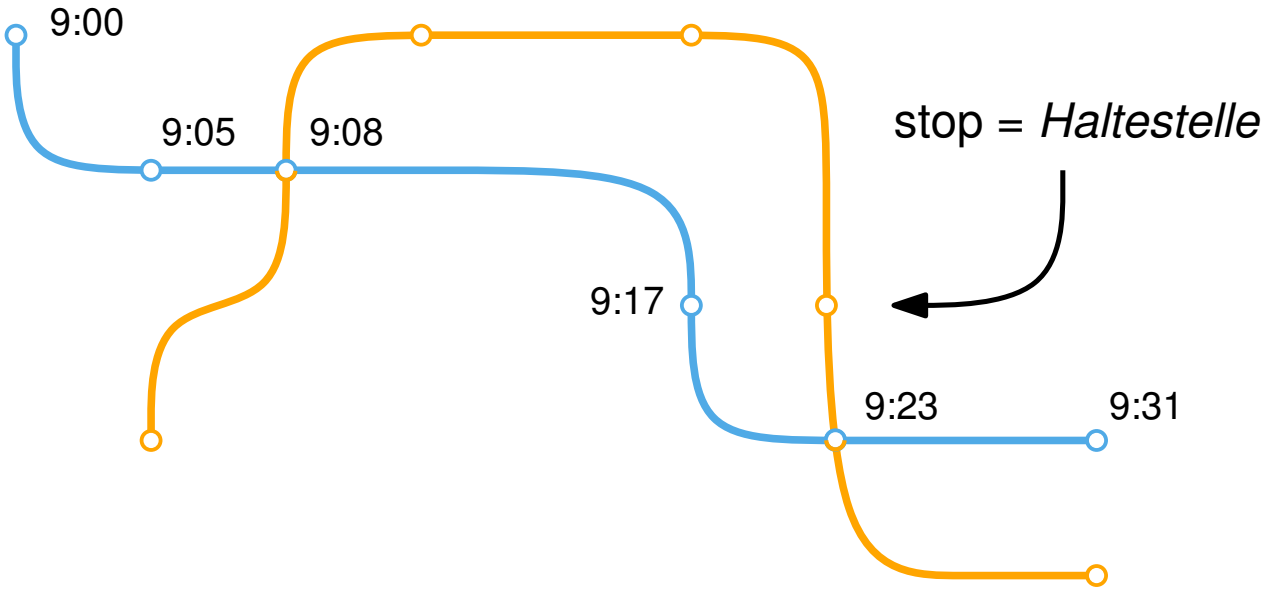


Fahrpläne – Beispiel

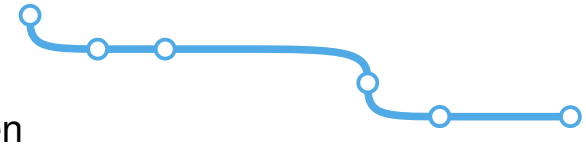


Ankunftszeiten

trip T_1	9:00	9:05	9:08	9:17	9:23	9:31

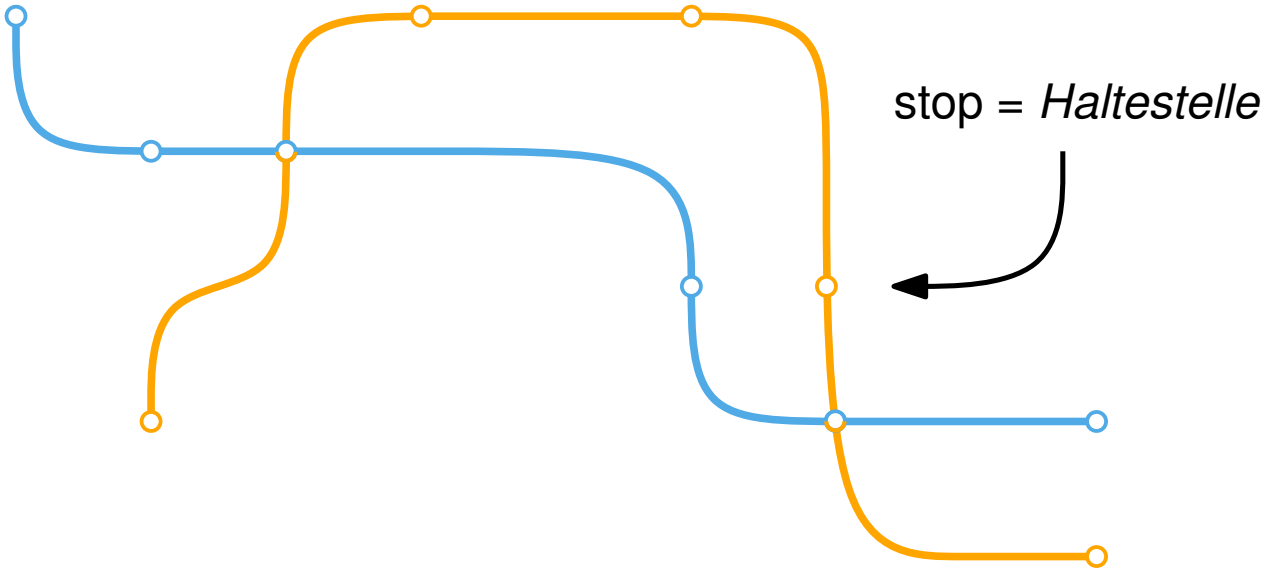


Fahrpläne – Beispiel

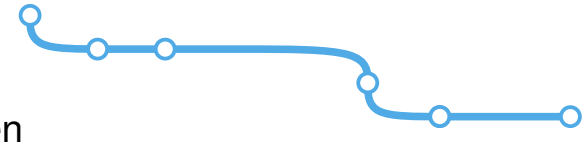


Ankunftszeiten

trip T_1	9:00	9:05	9:08	9:17	9:23	9:31

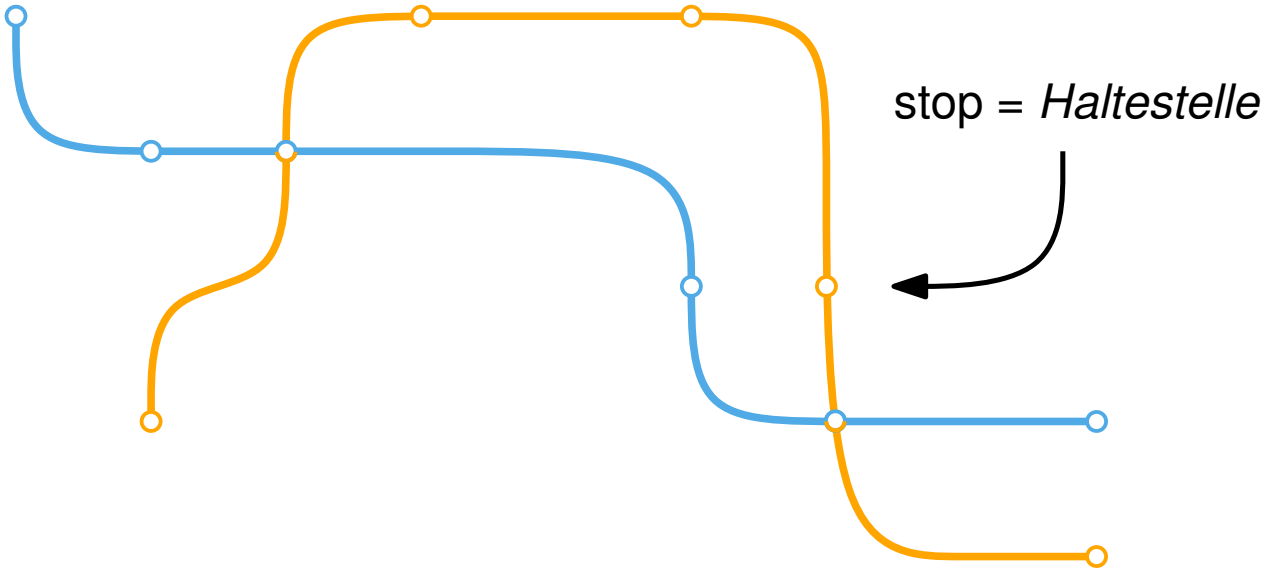


Fahrpläne – Beispiel

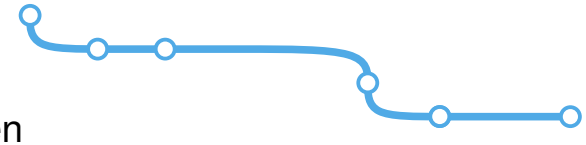


Ankunftszeiten

trip T_1	9:00	9:05	9:08	9:17	9:23	9:31
trip T_2	10:00	10:05	10:08	10:17	10:23	10:31

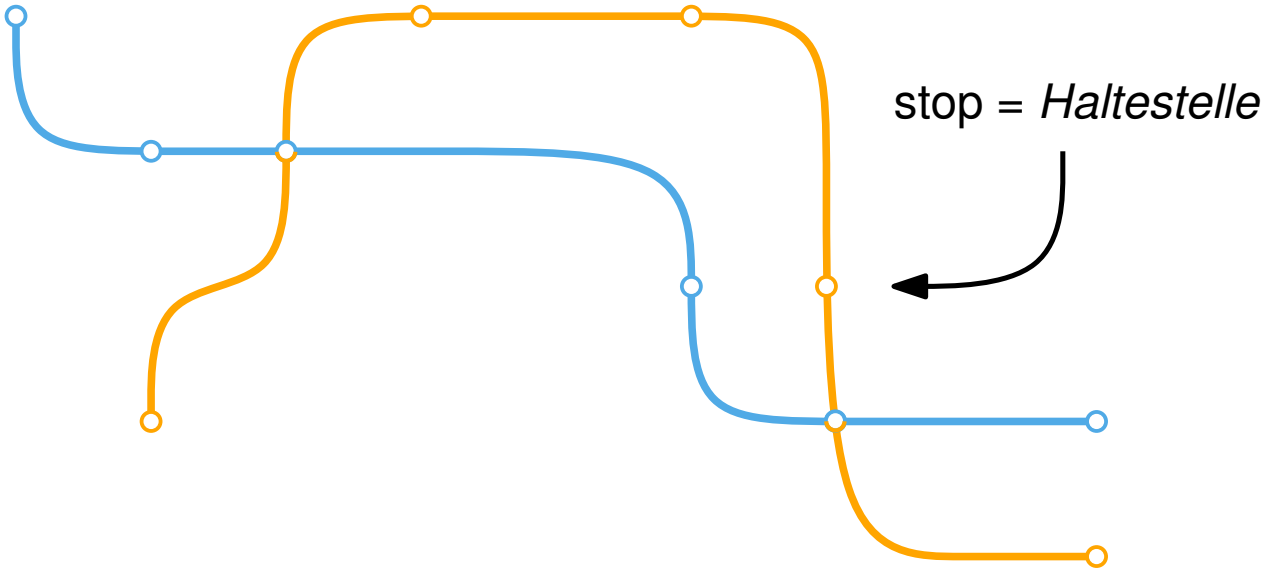


Fahrpläne – Beispiel

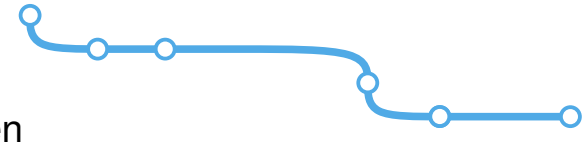


Ankunftszeiten

trip T_1	9:00	9:05	9:08	9:17	9:23	9:31
trip T_2	10:00	10:05	10:08	10:17	10:23	10:31
trip T_3	10:30	10:35	10:38	—	—	10:53



Fahrpläne – Beispiel

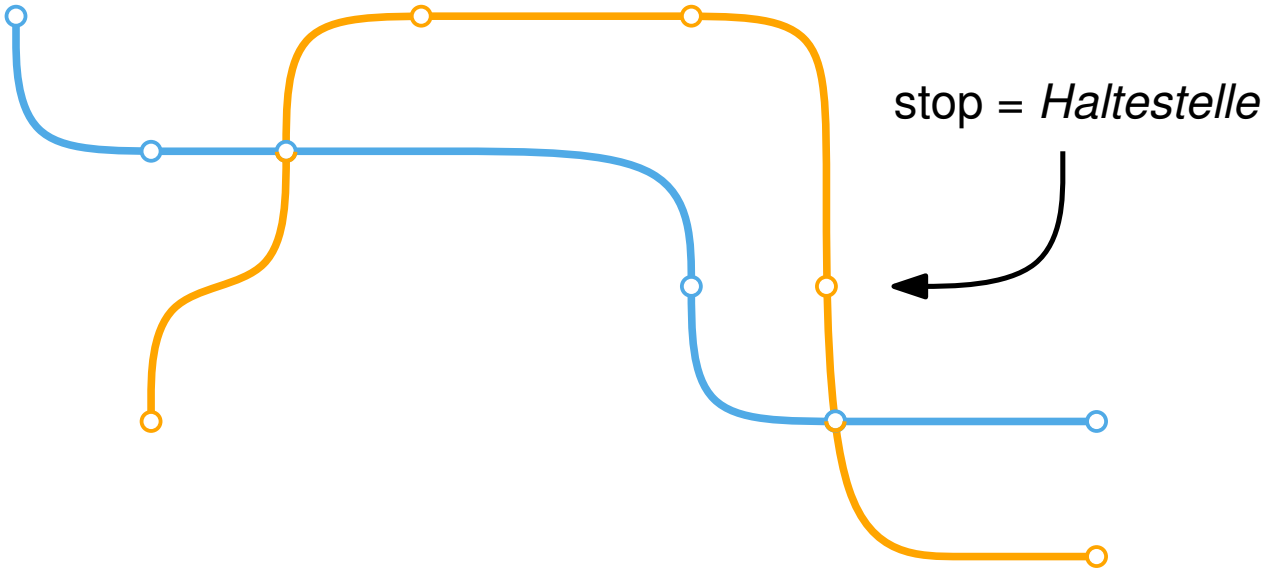


Ankunftszeiten

trip T_1	9:00	9:05	9:08	9:17	9:23	9:31
trip T_2	10:00	10:05	10:08	10:17	10:23	10:31
trip T_3	10:30	10:35	10:38	—	—	10:53

Route R_1

Route R_2



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Journeys

Gegenstück zu einem Pfad in einem Straßennetzwerk?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Journeys

Gegenstück zu einem Pfad in einem Straßennetzwerk?

Journey:

- Modelliert Reise eines Passagiers durch das Netzwerk
- Folge von Legs: Teilsequenzen von Trips aus dem Fahrplan
- (Möglicherweise mit Umstiegen/Fußwegen dazwischen)

Journeys

Gegenstück zu einem Pfad in einem Straßennetzwerk?

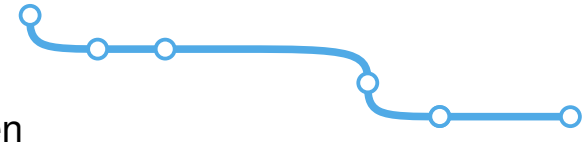
Journey:

- Modelliert Reise eines Passagiers durch das Netzwerk
- Folge von Legs: Teilsequenzen von Trips aus dem Fahrplan
- (Möglicherweise mit Umstiegen/Fußwegen dazwischen)

Journey ist konsistent, wenn . . .

- Erster Stop von Leg T_{i+1} entspricht letztem Stop von Leg T_i
  - (Oder es existiert Fußweg dazwischen)
- Abfahrt von T_{i+1} ist *nach* Ankunft von T_i
  - (+ Zeit für Umstieg/Fußweg)

Journeys – Beispiel

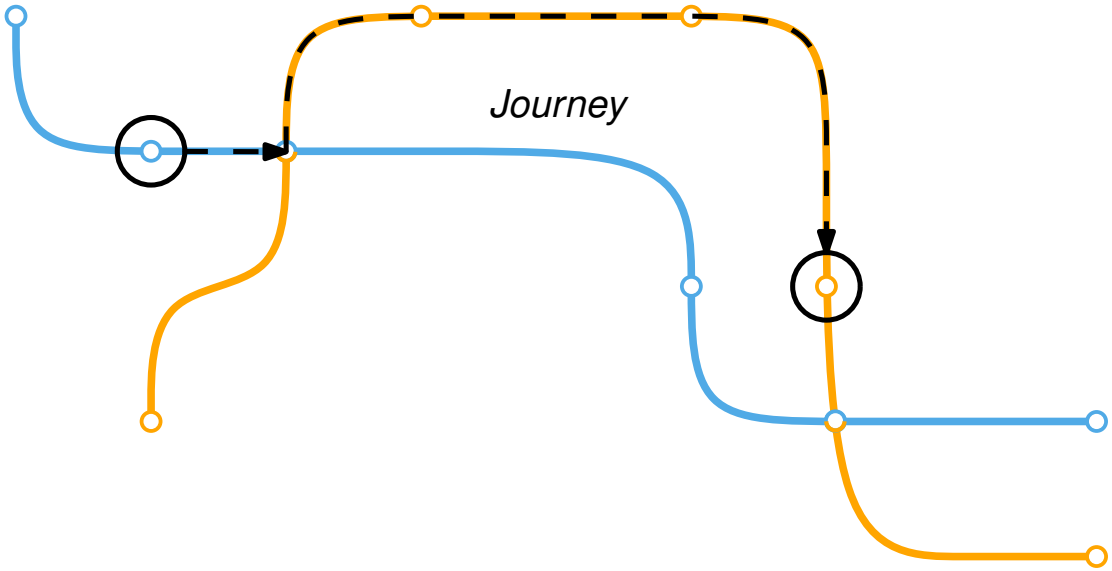


Ankunftszeiten

trip T_1	9:00	9:05	9:08	9:17	9:23	9:31
trip T_2	10:00	10:05	10:08	10:17	10:23	10:31
trip T_3	10:30	10:35	10:38	—	—	10:53

Route R_1

Route R_2



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Modellierung von Fahrplänen

Zwei grundlegende Ansätze:

1. Modellierung als gerichteter Graph $\rightsquigarrow$ Dijkstra
2. Benutze Fahrplan „direkt“ $\rightsquigarrow$ Neue Algorithmen

Modellierung von Fahrplänen

Zwei grundlegende Ansätze:

1. Modellierung als gerichteter Graph $\rightsquigarrow$ Dijkstra
2. Benutze Fahrplan „direkt“ $\rightsquigarrow$ Neue Algorithmen

Jetzt ersteres, später zweiteres.

Modellierung von Fahrplänen

Zwei grundlegende Ansätze:

1. Modellierung als gerichteter Graph $\rightsquigarrow$ Dijkstra
2. Benutze Fahrplan „direkt“ $\rightsquigarrow$ Neue Algorithmen

Jetzt ersteres, später zweiteres.

Modellierung als Graph:

- Reduziere auf (bekanntes) Kürzeste-Wege-Problem
- Optimale Journeys entsprechen kürzesten Wegen
- Frage: Wie die Zeitabhängigkeit (Abfahrten/Ankünfte) kodieren?

Modellierung: Zwei Ansätze

1. Zeitexpandiert

- Zeitabhängigkeiten ausrollen
- Knoten entsprechen Ereignissen im Fahrplan
- Kanten verbinden Ereignisse miteinander
  - Fahrt mit Connection
  - Umstieg
  - Warten

− Großer Graph

\+ Einfacher Anfragealgorithmus (Dijkstra)

2. Zeitabhängig

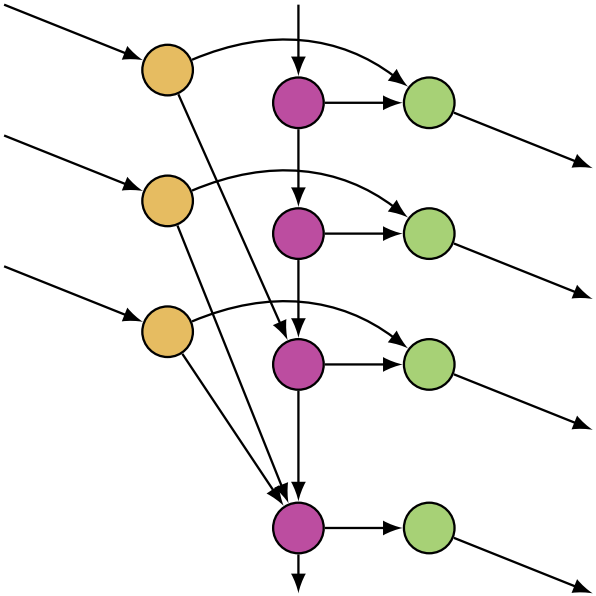
- Zeitabhängigkeit in den Kantengewichten
- Knoten entsprechen Stops
- Kante $\Leftrightarrow$ Connection verbindet Stops
  - Umstiegszeiten?

\+ Kleiner Graph

− Zeitabhängige KW-Algorithmen?

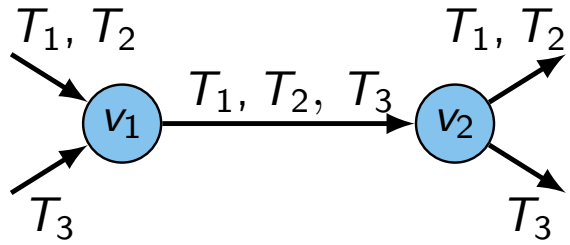
Modellierung: Zwei Ansätze

1. Zeitexpandiert



- Arrival-, Transfer- und Departure-Ereignisse
- Für jeden Trip
- Kantengewicht = Zeitdiff.
  (alternativ: ungewichtet, Knotenlabel = Ereigniszeit)

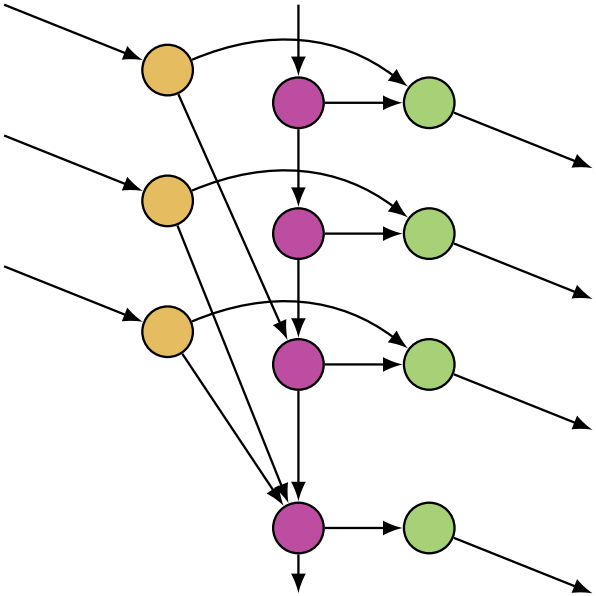
2. Zeitabhängig



- Pro Stop: Stationsknoten
- Kanten: zeitabhängig
- Umstiege?

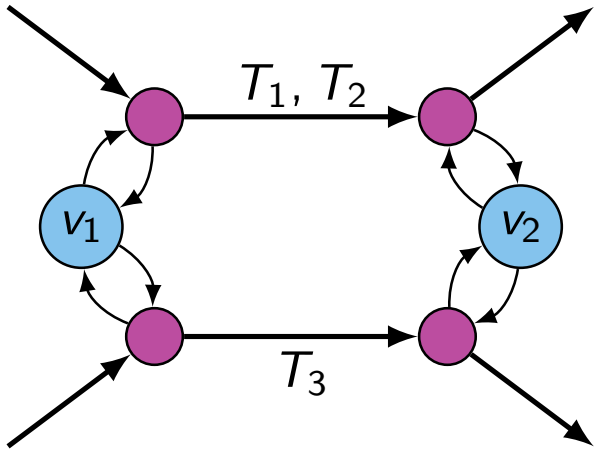
Modellierung: Zwei Ansätze

1. Zeitexpandiert



- Arrival-, Transfer- und Departure-Ereignisse
- Für jeden Trip
- Kantengewicht = Zeitdiff.
  (alternativ: ungewichtet, Knotenlabel = Ereigniszeit)

2. Zeitabhängig



- Pro Stop: Stationsknoten
- Partitioniere Trips in Routen
- Pro Route: Routen-Knoten
- Routenkanten: zeitabhängig
- Stationskanten: Transferzeit

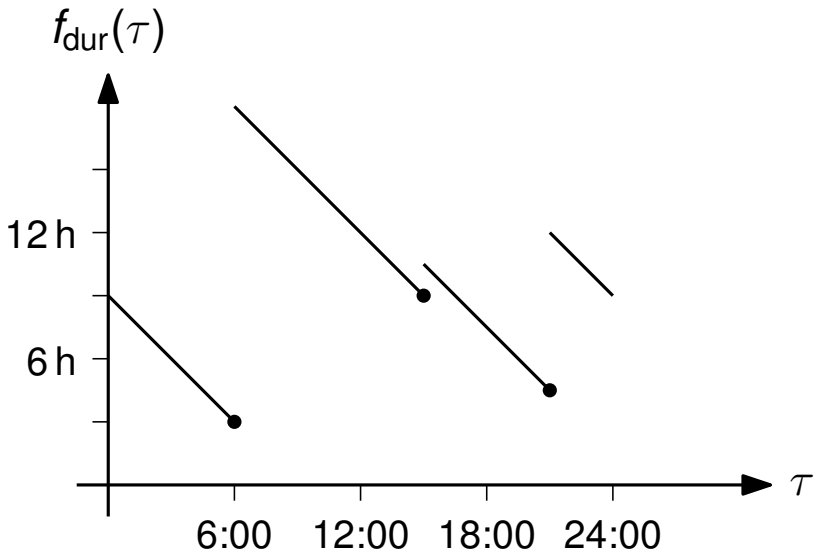
Zeitabhängige Kanten

Connections modelliert durch stückweise lineare Funktionen

Connections zwischen v_i und v_j:

id	dep. time	travel time
1	06:00	3 h 00 min
2	15:00	9 h 00 min
3	21:00	4 h 30 min
⋮	⋮	⋮

Entsprechende Funktion:



- Für jede Connection: Connection Point (τ, w)
  $\tau \mathrel{\hat{=}}$ Abfahrtszeit, $w \mathrel{\hat{=}}$ Reisezeit (bzw. Ankunftszeit)
- Zwischen Connections: Lineares Warten

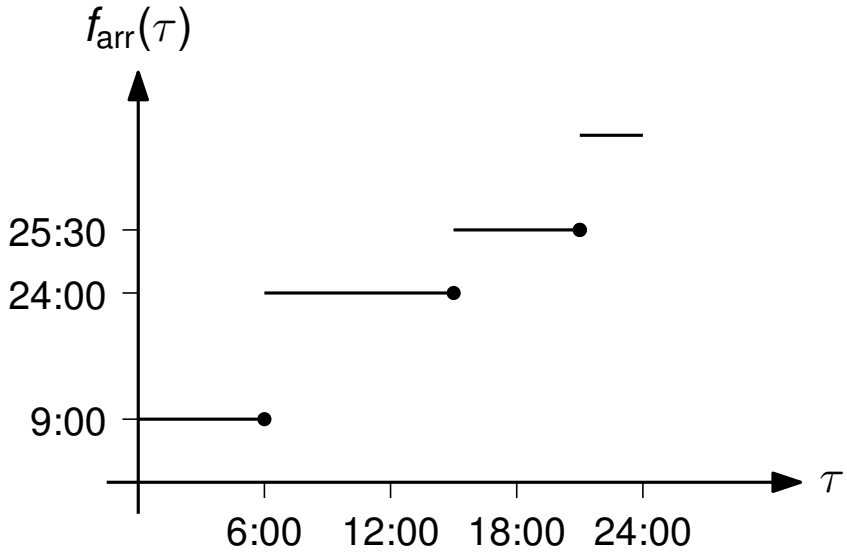
Zeitabhängige Kanten

Connections modelliert durch stückweise lineare Funktionen

Connections zwischen v_i und v_j:

id	dep. time	travel time
1	06:00	3 h 00 min
2	15:00	9 h 00 min
3	21:00	4 h 30 min
⋮	⋮	⋮

Entsprechende Funktion:



- Für jede Connection: Connection Point (τ, w)
  $\tau \mathrel{\hat{=}}$ Abfahrtszeit, $w \mathrel{\hat{=}}$ Reisezeit (bzw. Ankunftszeit)
- Zwischen Connections: Lineares Warten

FIFO-Eigenschaft (Wdh.)

Definition

Sei $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Reisezeit-Funktion. f erfüllt die FIFO-Eigenschaft, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ gilt, dass

$$f(\tau) \leq \varepsilon + f(\tau + \varepsilon).$$

Diskussion:

- Interpretation: “Warten lohnt sich nie”
- Kürzeste Wege auf Graphen mit non-FIFO-Funktionen zu finden ist NP-schwer
  (wenn Warten an Knoten nicht erlaubt ist)

  $\Rightarrow$ Sicherstellen, dass Funktionen FIFO-Eigenschaft erfüllen

FIFO-Eigenschaft (Wdh.)

Definition

Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ eine Ankunftszeit-Funktion. f erfüllt die FIFO-Eigenschaft, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ gilt, dass

$$f(\tau) \leq f(\tau + \varepsilon).$$

Diskussion:

- Interpretation: “Warten lohnt sich nie”
- Kürzeste Wege auf Graphen mit non-FIFO-Funktionen zu finden ist NP-schwer
  (wenn Warten an Knoten nicht erlaubt ist)

  $\Rightarrow$ Sicherstellen, dass Funktionen FIFO-Eigenschaft erfüllen

Fahrplanauskunft mit Dijkstra

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Anfrageszenarien

Gegeben: Startstop s, Zielstop t

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Anfrageszenarien

Gegeben: Startstop s, Zielstop t

Zeit-Anfrage (Earliest Arrival Query):

- Finde schnellste Journey für Abfahrtszeit τ_{dep}
- Analog zu Dijkstra?

Anfrageszenarien

Gegeben: Startstop s, Zielstop t

Zeit-Anfrage (Earliest Arrival Query):

- Finde schnellste Journey für Abfahrtszeit τ_{dep}
- Analog zu Dijkstra?

Profil-Anfrage (Profile Query):

- Finde schnellste Journey für jeden Abfahrtszeitpunkt $\tau \in \Pi$
- Analog zu Dijkstra?

Zeit-Anfragen

Gegeben: Startstop s, Zielstop t und Abfahrtszeit τ_{dep}

Zeit-Anfragen

Gegeben: Startstop s, Zielstop t und Abfahrtszeit τ_{dep}

1. Zeitexpandiert

Startknoten:

- Erstes Transferevent von s mit Zeit $\tau \geq \tau_{\text{dep}}$

Zielknoten:

- Im Voraus unbekannt!
- Stoppkriterium: Erster gesettleter Knoten an t induziert schnellste Verbindung zu t

2. Zeitabhängig

Startknoten:

- Stationsknoten s

Zielknoten:

- Stationsknoten t

Anfrage:

- Time-Dependent Dijkstra mit Zeit τ_{dep}
- Nur Ankunfts*zeit* im Voraus unbekannt

Zeit-Anfragen

Algorithm 1: `Time-Dijkstra`$(G = (V, E), s, \tau_{\text{dep}})$

```
1  d[s] = 0
2  Q.clear(), Q.insert(s, 0)
3  while !Q.empty() do
4      u ← Q.deleteMin()
5      for all edges e = (u, v) ∈ E do
           // len(e, ·) = f^e_dur(·)
6          if d[u] + len(e, τ_dep + d[u]) < d[v] then
7              d[v] ← d[u] + len(e, τ_dep + d[u])
8              p[v] ← u
9              if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
10             else Q.insert(v, d[v])
```

Zeit-Anfragen

Algorithm 2: `Time-Dijkstra`$(G = (V, E), s, \tau_{\text{dep}})$

```
1  d[s] = τ_dep
2  Q.clear(), Q.insert(s, 0)
3  while !Q.empty() do
4      u ← Q.deleteMin()
5      for all edges e = (u, v) ∈ E do
           // len(e, ·) = f^e_arr(·)
6          if len(e, d[u]) < d[v] then
7              d[v] ← len(e, d[u])
8              p[v] ← u
9              if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
10             else Q.insert(v, d[v])
```

Diskussion Zeit-Anfragen

Beobachtung:

- Nur ein Unterschied zu Dijkstra
- Auswertung der Kanten

Diskussion Zeit-Anfragen

Beobachtung:

- Nur ein Unterschied zu Dijkstra
- Auswertung der Kanten

Non-FIFO-Netzwerke:

- Im Kreis fahren kann sich lohnen
- NP-schwer (wenn Warten an Knoten nicht erlaubt ist)
- Transportnetzwerke sind FIFO-modellierbar

Diskussion Zeit-Anfragen

Beobachtung:

- Nur ein Unterschied zu Dijkstra
- Auswertung der Kanten

Non-FIFO-Netzwerke:

- Im Kreis fahren kann sich lohnen
- NP-schwer (wenn Warten an Knoten nicht erlaubt ist)
- Transportnetzwerke sind FIFO-modellierbar

In unserem Szenario:

- Sicherstellen, dass jede Route FIFO-Eigenschaft erfüllt
- Für alle Trips T_i, T_j der Route muss gelten:
- T_i fährt an *jedem* Stop jeweils vor T_j ab (oder andersherum)

Profil-Anfragen

Gegeben: Startstop s, Zielstop t

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Profil-Anfragen

Gegeben: Startstop s, Zielstop t

1. Zeitexpandiert

?

(Geht, aber nicht Teil der VL)

2. Zeitabhängig

Startknoten:

- Stationsknoten s

Zielknoten:

- Stationsknoten t

Anfrage:

- Label-Correcting-Algorithmus von s aus

Profil-Anfragen

Algorithm 3: `Profile-Search`$(G = (V, E), s)$

```
1  d_*[s] = 0
2  Q.clear(), Q.insert(s, 0)
3  while !Q.empty() do
4      u ← Q.deleteMin()
5      for all edges e = (u, v) ∈ E do
6          if d_*[u] ⊕ len(e) ≱ d_*[v] then
7              d_*[v] ← min(d_*[u] ⊕ len(e), d_*[v])
8              if v ∈ Q then Q.decreaseKey(v, d[v])
9              else Q.insert(v, d[v])
```

Diskussion Profil-Anfragen

Beobachtungen:

- Operationen auf Funktionen
- Knotenlabel: Funktion
- Knotenlabel nicht skalar $\Rightarrow$ keine Totalordnung der Knotenlabel
- Wonach Priority Queue ordnen?
- Priorität im Prinzip frei wählbar
  ($\underline{d}[u]$ ist das Minimum der Funktion $d_*[u]$)
- Knoten können mehrfach besucht werden $\Rightarrow$ label-correcting

Operationen

Funktion gegeben durch:

- Menge von Interpolationspunkten
- $I^f := \{(t_1^f, w_1^f), \ldots, (t_k^f, w_k^f)\}$

3 Operationen notwendig:

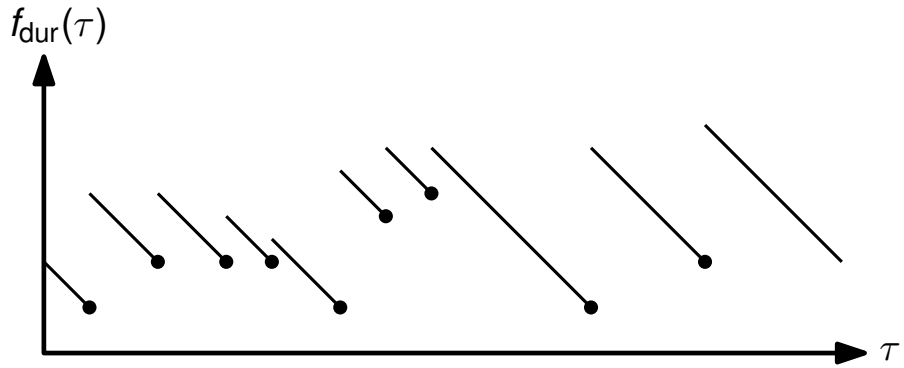
- Auswertung
- Linken $\oplus$
- Minimumsbildung

Public Transport: Auswertung

Auswertung von $f(\tau)$:

- Suche Punkt (t_i, w_i) mit $t_i \geq \tau$ und t_i minimal
- Dann Evaluation durch

$$f(\tau) = w_i + (t_i - \tau)$$

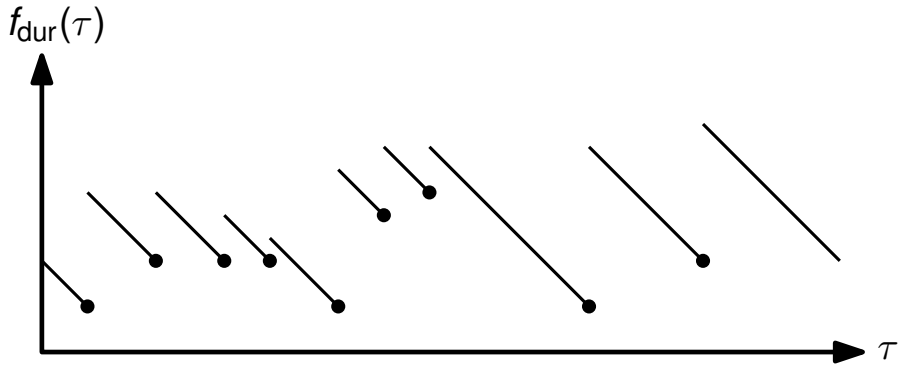


Public Transport: Auswertung

Auswertung von $f(\tau)$:

- Suche Punkt (t_i, w_i) mit $t_i \geq \tau$ und t_i minimal
- Dann Evaluation durch

$$f(\tau) = w_i + (t_i - \tau)$$



Problem:

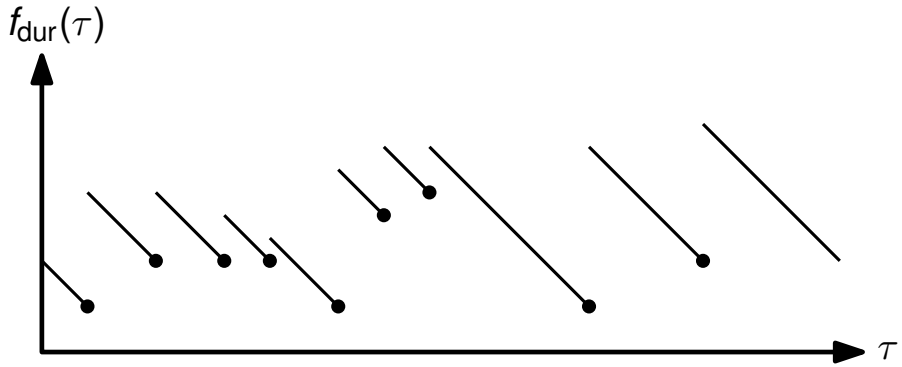
- Finden von t_i
- Theoretisch:
  - Lineare Suche: $\mathcal{O}(|I|)$
  - Binäre Suche: $\mathcal{O}(\log_2 |I|)$

Public Transport: Auswertung

Auswertung von $f(\tau)$:

- Suche Punkt (t_i, w_i) mit $t_i \geq \tau$ und t_i minimal
- Dann Evaluation durch

$$f(\tau) = w_i + (t_i - \tau)$$



Problem:

- Finden von t_i
- Theoretisch:
  - Lineare Suche: $\mathcal{O}(|I|)$
  - Binäre Suche: $\mathcal{O}(\log_2 |I|)$
- Praktisch:
  - $|I| < 30$: Lineare Suche
  - Sonst: Lineare Suche mit Startpunkt $\frac{\tau}{\Pi} \cdot |I|$
  - Benchmarken!

Linken

Definition

Seien $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ und $g\colon \mathbb{R}_0^+$ zwei Reisezeit-Funktionen, die die FIFO-Eigenschaft erfüllen. Die Linkoperation $f \oplus g$ ist dann definiert durch

$$f \oplus g := f + g \circ (\mathrm{id} + f)$$

Oder

$$(f \oplus g)(\tau) := f(\tau) + g(\tau + f(\tau))$$

Linken

Definition

Seien $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ und $g\colon \mathbb{R}_0^+$ zwei Ankunftszeit-Funktionen, die die FIFO-Eigenschaft erfüllen. Die Linkoperation $f \oplus g$ ist dann definiert durch

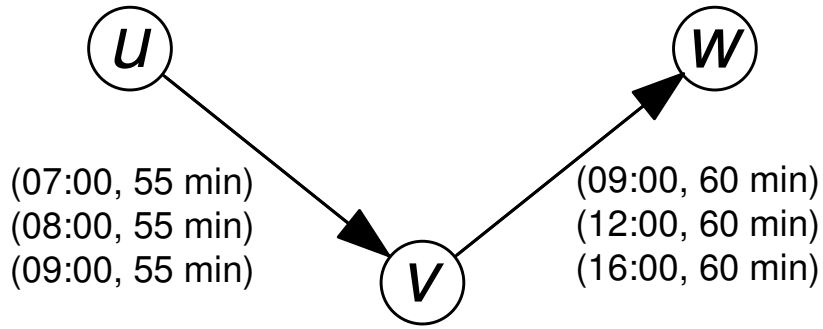
$$f \oplus g := g \circ f$$

Oder

$$(f \oplus g)(\tau) := g(f(\tau))$$

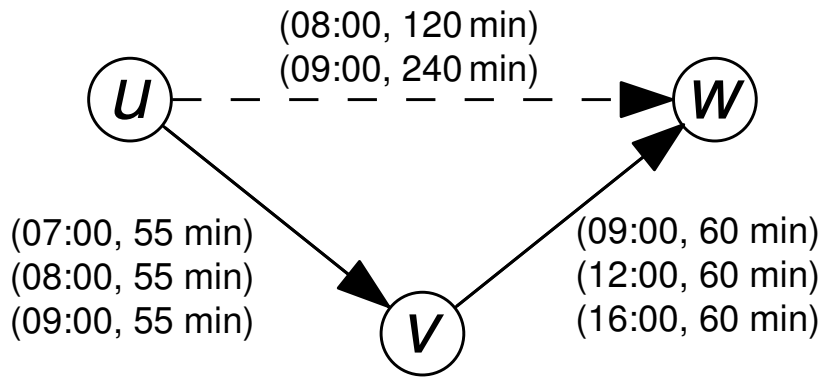
Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:



Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:

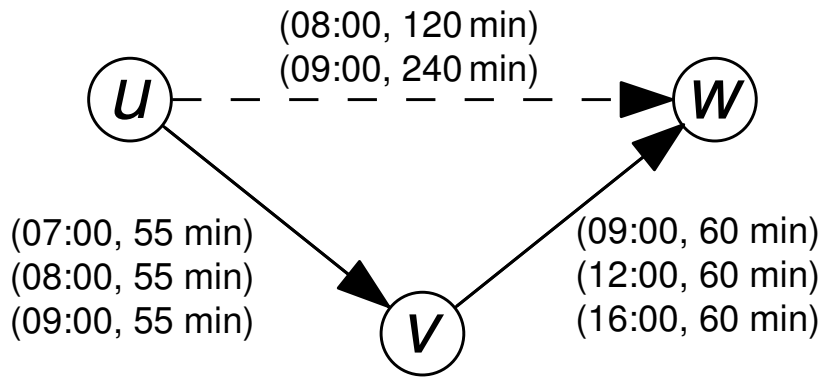


Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:

- Für jeden Punkt (t_i^f, w_i^f) bestimme den Verbindungspunkt (t_j^g, w_j^g) mit $t_j^g \geq t_i^f + w_i^f$ minimal

= Erste Verbindung, die man auf g erreichen kann



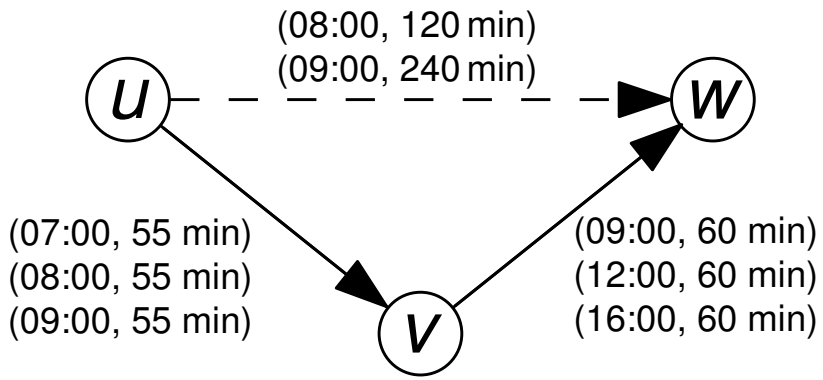
Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:

- Für jeden Punkt (t_i^f, w_i^f) bestimme den Verbindungspunkt (t_j^g, w_j^g) mit $t_j^g \geq t_i^f + w_i^f$ minimal

  = Erste Verbindung, die man auf g erreichen kann

- Füge $(t_i^f, t_j^g - t_i^f + w_j^g)$ hinzu



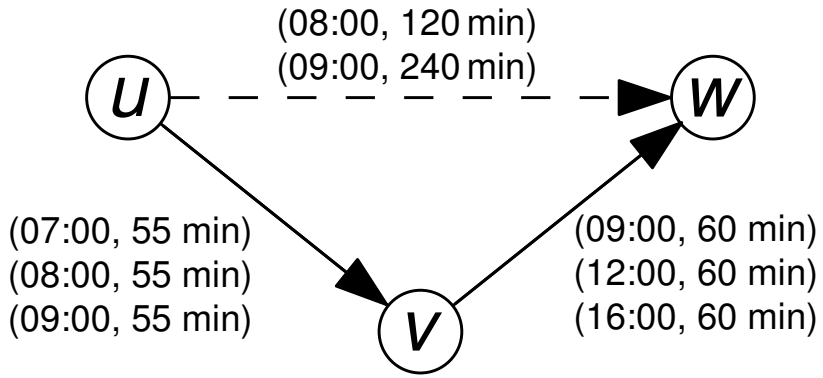
Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:

- Für jeden Punkt (t_i^f, w_i^f) bestimme den Verbindungspunkt (t_j^g, w_j^g) mit $t_j^g \geq t_i^f + w_i^f$ minimal

  = Erste Verbindung, die man auf g erreichen kann

- Füge $(t_i^f, t_j^g - t_i^f + w_j^g)$ hinzu
- Wenn zwei Punkte den gleichen Verbindungspunkt haben, behalte nur den mit größerem t_i^f



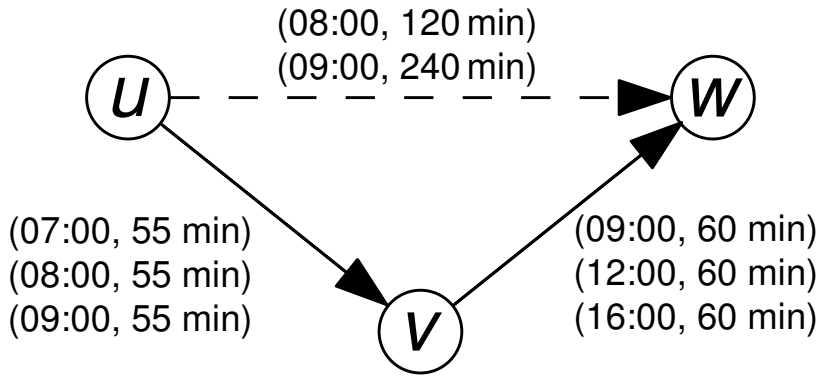
Public Transport: Link

Linken zweier Funktionen f und g:

- Für jeden Punkt (t_i^f, w_i^f) bestimme den Verbindungspunkt (t_j^g, w_j^g) mit $t_j^g \geq t_i^f + w_i^f$ minimal

  = Erste Verbindung, die man auf g erreichen kann

- Füge $(t_i^f, t_j^g - t_i^f + w_j^g)$ hinzu
- Wenn zwei Punkte den gleichen Verbindungspunkt haben, behalte nur den mit größerem t_i^f
- Sweep-Algorithmus



Public Transport: Diskussion Link

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Public Transport: Diskussion Link

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Speicherverbrauch:

- Gelinkte Funktion hat $\leq \min\{|I^f|, |I^g|\}$ Interpolationspunkte

Public Transport: Diskussion Link

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Speicherverbrauch:

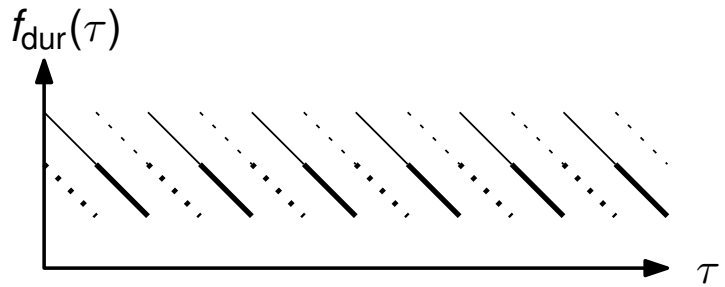
- Gelinkte Funktion hat $\leq \min\{|I^f|, |I^g|\}$ Interpolationspunkte

Auf Straßengraphen (zum Vergleich):

- Laufzeit auch $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Aber $\approx |I^f| + |I^g|$ Interpolationspunkte

Public Transport: Merge

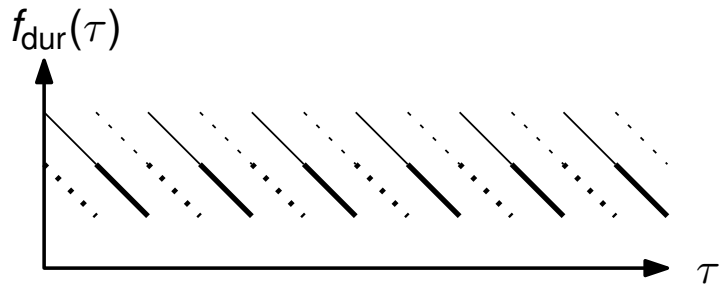
Minimum zweier Funktionen f und g:



Public Transport: Merge

Minimum zweier Funktionen f und g:

- Für alle (t_i^f, w_i^f): Behalte Punkt, wenn $w_i^f < g(t_i^f)$
- Für alle (t_j^g, w_j^g): Behalte Punkt, wenn $w_j^g < f(t_j^g)$
- Keine Schnittpunkte möglich!



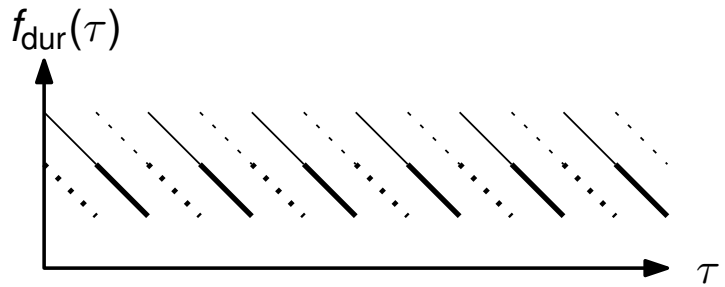
Public Transport: Merge

Minimum zweier Funktionen f und g:

- Für alle (t_i^f, w_i^f): Behalte Punkt, wenn $w_i^f < g(t_i^f)$
- Für alle (t_j^g, w_j^g): Behalte Punkt, wenn $w_j^g < f(t_j^g)$
- Keine Schnittpunkte möglich!

Vorgehen:

- Linearer Sweep



Public Transport: Diskussion Merge

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Public Transport: Diskussion Merge

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Speicherverbrauch:

- Keine Schnittpunkte

$\Rightarrow$ Minimum-Funktion hat maximal $|I^f| + |I^g|$ Interpolationspunkte

Public Transport: Diskussion Merge

Laufzeit:

- Sweep-Algorithmus
- $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$

Speicherverbrauch:

- Keine Schnittpunkte

$\Rightarrow$ Minimum-Funktion hat maximal $|I^f| + |I^g|$ Interpolationspunkte

Auf Straßengraphen (zum Vergleich):

- Laufzeit auch $\mathcal{O}(|I^f| + |I^g|)$
- Aber mehr als $|I^f| + |I^g|$ Interpolationspunkte (Schnittpunkte!)

Self-Pruning Connection-Setting (SPCS)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Profil-Anfragen

Gegeben:
Zeitabhängiges Netzwerk $G = (V, E)$ und Startstop s.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Profil-Anfragen

Gegeben:
Zeitabhängiges Netzwerk $G = (V, E)$ und Startstop s.

Problem (Profil-Anfrage):
Berechne die Reisezeitfunktion $\text{dist}_s(v, \tau)$, sodass für alle $\tau \in \Pi$ und $v \in V$ gilt: $\text{dist}_s(v, \tau)$ ist die Länge des kürzesten Weges von s nach v in G zur Abfahrtszeit τ an s.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Profil-Anfragen

Gegeben:
Zeitabhängiges Netzwerk $G = (V, E)$ und Startstop s.

Problem (Profil-Anfrage):
Berechne die Reisezeitfunktion $\text{dist}_s(v, \tau)$, sodass für alle $\tau \in \Pi$ und $v \in V$ gilt: $\text{dist}_s(v, \tau)$ ist die Länge des kürzesten Weges von s nach v in G zur Abfahrtszeit τ an s.

Bisheriger Ansatz:
Erweitere Dijkstras Algorithmus zu Label-Correcting-Algorithmus

- Benutze Funktionen statt Konstanten
- Verliert Label-Setting-Eigenschaft von Dijkstra
- Deutlich langsamer als Dijkstra ($\approx$ Faktor 50)

Hauptidee

Beobachtung: Jede Journey ab s (irgendwohin) beginnt mit einer initialen Connection an s.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Hauptidee

Beobachtung: Jede Journey ab s (irgendwohin) beginnt mit einer initialen Connection an s.

Naiver Ansatz

Für jede ausgehende Connection c_i an s:
Separate Zeitanfrage mit Abfahrtszeit $\tau_{\text{dep}}(c_i)$.

Hauptidee

Beobachtung: Jede Journey ab s (irgendwohin) beginnt mit einer initialen Connection an s.

Naiver Ansatz

Für jede ausgehende Connection c_i an s:
Separate Zeitanfrage mit Abfahrtszeit $\tau_{\text{dep}}(c_i)$.

Nachteile:

- Zu viele redundante Berechnungen
- Nicht jede initiale Connection an s trägt zu $\text{dist}_s(v, \cdot)$ bei
  Langsame Züge für weite Reisen machen wenig Sinn

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6:30 8:30	7:04 8:30	9:26 14:28	10:34 14:28	11:08 14:28	12:42 14:28	13:01 16:46	13:58 16:46	16:46 23:30	18:24 23:30	19:20 23:30	21:08 23:30

Hauptidee

Beobachtung: Jede Journey ab s (irgendwohin) beginnt mit einer initialen Connection an s.

Naiver Ansatz

Für jede ausgehende Connection c_i an s:
Separate Zeitanfrage mit Abfahrtszeit $\tau_{\text{dep}}(c_i)$.

Nachteile:

- Zu viele redundante Berechnungen
- Nicht jede initiale Connection an s trägt zu $\text{dist}_s(v, \cdot)$ bei
  Langsame Züge für weite Reisen machen wenig Sinn

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6:30 8:30	7:04 8:30	9:26 14:28	10:34 14:28	11:08 14:28	12:42 14:28	13:01 16:46	13:58 16:46	16:46 23:30	18:24 23:30	19:20 23:30	21:08 23:30

Hauptidee

Beobachtung: Jede Journey ab s (irgendwohin) beginnt mit einer initialen Connection an s.

Naiver Ansatz

Für jede ausgehende Connection c_i an s:
Separate Zeitanfrage mit Abfahrtszeit $\tau_{\text{dep}}(c_i)$.

Nachteile:

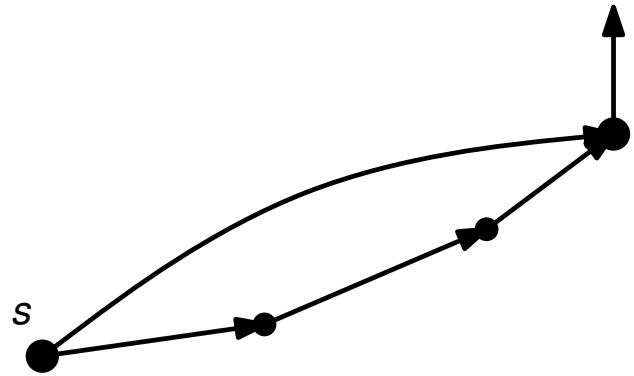
- Zu viele redundante Berechnungen
- Nicht jede initiale Connection an s trägt zu $\text{dist}_s(v, \cdot)$ bei
  Langsame Züge für weite Reisen machen wenig Sinn

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
6:30 8:30	7:04 8:30	9:26 14:28	10:34 14:28	11:08 14:28	12:42 14:28	13:01 16:46	13:58 16:46	16:46 23:30	18:24 23:30	19:20 23:30	21:08 23:30

(“Connection reduction”)

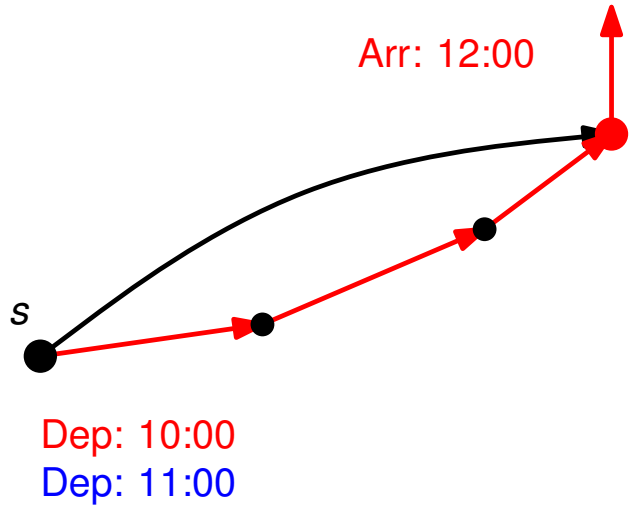
Self-Pruning

Beobachtung:
Initiale Connections können sich dominieren.



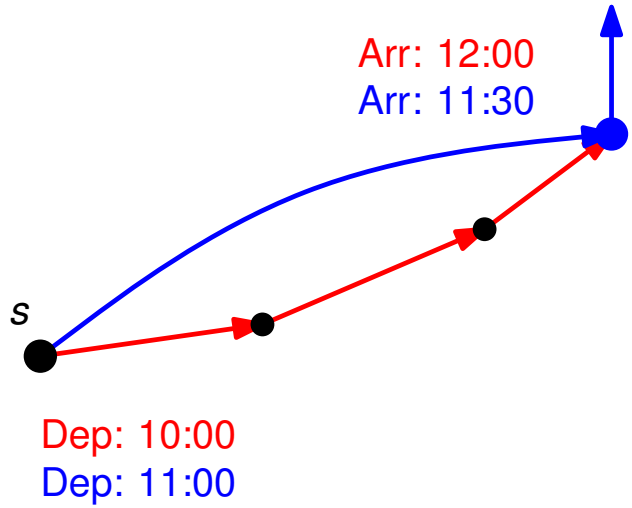
Self-Pruning

Beobachtung:
Initiale Connections können sich dominieren.



Self-Pruning

Beobachtung:
Initiale Connections können sich dominieren.

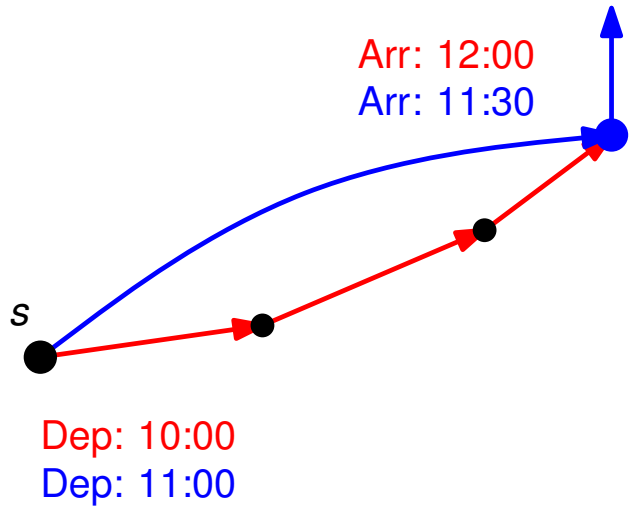


Self-Pruning

Beobachtung:
Initiale Connections können sich dominieren.

Self-Pruning (SP):

- Benutze eine gemeinsame Queue
- Sortiere initiale Connections c_i aufsteigend nach Abfahrtszeit
- Speichere an erreichten Knoten Index der initialen Connection
- Keys sind Ankunftszeiten



Beim Settlen von Knoten v und Conn.-Index i:
Falls v bereits gesettled mit initialer Connection $j > i$, **prune** i an v

Self-Pruning II

Integration von Self-Pruning:

- Verwalte Label $\text{maxconn}(v)$ an jedem Knoten v
  Gibt maximale initiale Connection an, mit der v gesettled wurde
- Update $\text{maxconn}(v)$ beim Settlen von v

Self-Pruning II

Integration von Self-Pruning:

- Verwalte Label $\text{maxconn}(v)$ an jedem Knoten v
  Gibt maximale initiale Connection an, mit der v gesettled wurde
- Update $\text{maxconn}(v)$ beim Settlen von v

Beim Settlen von Knoten v und Conn.-Index i:
Falls v bereits gesettled mit initialer Connection $j > i$, **prune** i an v

Self-Pruning II

Integration von Self-Pruning:

- Verwalte Label $\text{maxconn}(v)$ an jedem Knoten v
  Gibt maximale initiale Connection an, mit der v gesettled wurde
- Update $\text{maxconn}(v)$ beim Settlen von v

Beim Settlen von Knoten v und Conn.-Index i:
Falls $\text{maxconn}(v) > i$, **prune** i an v

Self-Pruning II

Integration von Self-Pruning:

- Verwalte Label $\text{maxconn}(v)$ an jedem Knoten v
  Gibt maximale initiale Connection an, mit der v gesettled wurde
- Update $\text{maxconn}(v)$ beim Settlen von v

Beim Settlen von Knoten v und Conn.-Index i:
Falls $\text{maxconn}(v) > i$, **prune** i an v

Dijkstras Label-Setting-Eigenschaft pro initialer Connection wiederhergestellt

Self-Pruning II

Integration von Self-Pruning:

- Verwalte Label $\text{maxconn}(v)$ an jedem Knoten v
  Gibt maximale initiale Connection an, mit der v gesettled wurde
- Update $\text{maxconn}(v)$ beim Settlen von v

Beim Settlen von Knoten v und Conn.-Index i:
Falls $\text{maxconn}(v) > i$, **prune** i an v

Dijkstras Label-Setting-Eigenschaft pro initialer Connection wiederhergestellt

$\Rightarrow$ Self-Pruning Connection-Setting Algorithmus (SPCS)

Stoppkriterium

Dijkstras Algorithmus:
Breche die Suche ab, sobald t abgearbeitet wurde.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Stoppkriterium

Dijkstras Algorithmus:
Breche die Suche ab, sobald t abgearbeitet wurde.

kann adaptiert werden durch

Self-Pruning Connection-Setting:

- Verwalte Label $T_m := -\infty$

Stoppkriterium

Dijkstras Algorithmus:
Breche die Suche ab, sobald t abgearbeitet wurde.

kann adaptiert werden durch

Self-Pruning Connection-Setting:

- Verwalte Label $T_m := -\infty$
- Wenn t mit initialer Connection i erreicht wird, setze $T_m := \max\{T_m, i\}$

Stoppkriterium

Dijkstras Algorithmus:
Breche die Suche ab, sobald t abgearbeitet wurde.

kann adaptiert werden durch

Self-Pruning Connection-Setting:

- Verwalte Label $T_m := -\infty$
- Wenn t mit initialer Connection i erreicht wird, setze $T_m := \max\{T_m, i\}$
- Prune alle Labels mit init. Connection $j < T_m$ (an jedem Knoten)

Stoppkriterium

Dijkstras Algorithmus:
Breche die Suche ab, sobald t abgearbeitet wurde.

kann adaptiert werden durch

Self-Pruning Connection-Setting:

- Verwalte Label $T_m := -\infty$
- Wenn t mit initialer Connection i erreicht wird, setze $T_m := \max\{T_m, i\}$
- Prune alle Labels mit init. Connection $j < T_m$ (an jedem Knoten)
- Halte an, wenn Priority-Queue leer läuft

Parallelisierung: Idee

Gegeben:

Shared-Memory-Parallelisierung mit p Cores

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Parallelisierung: Idee

Gegeben:
Shared-Memory-Parallelisierung mit p Cores

Idee:
Verteile initiale Connections c_i von s auf verschiedene Threads

0 6:30	**1** 7:04	**2** 9:26	**3** 10:34	**4** 11:08	**5** 12:42	**6** 13:01	**7** 13:58	**8** 16:46	**9** 18:24	**10** 19:20	**11** 21:08
Thread 0			Thread 1			Thread 2			Thread 3		

- Jeder Thread führt SPCS auf seiner Teilmenge der Connections aus
- Ergebnisse werden im Anschluss zu $\text{dist}_s(v, \cdot)$ zusammengeführt
- Führe Connection Reduction auf gemergtem Ergebnis durch

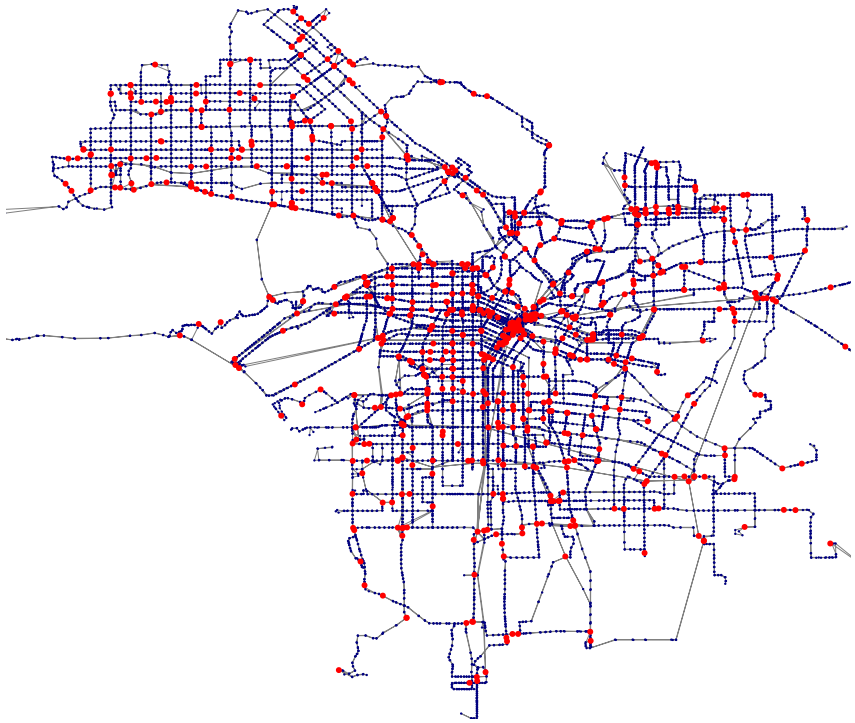
Eingabe

Netzwerk von **Los Angeles**:

- 15 581 Stops
- 1 046 580 Connections

Zugnetz von **Europa**:

- 30 517 Stops
- 1 775 533 Connections



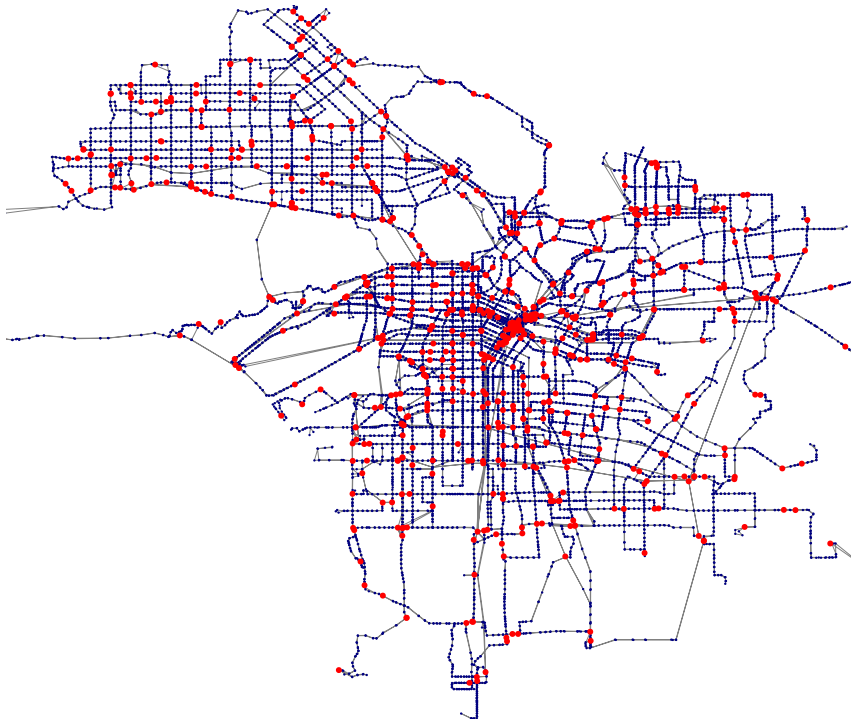
Eingabe

Netzwerk von **Los Angeles**:

- 15 581 Stops
- 1 046 580 Connections

Zugnetz von **Europa**:

- 30 517 Stops
- 1 775 533 Connections



Auswertung von 1 000 Anfragen
Wähle Start- und Zielstops zufällig gleichverteilt

One-to-All-Anfragen

		Los Angeles				Europe			
	p	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev
PSPCS	1	2.5 M	1209.0	1.0	—	3.3 M	2152.0	1.0	—
	2	2.5 M	690.0	1.8	14.7 %	3.1 M	1054.2	2.0	16.1 %
	4	2.5 M	417.4	2.9	18.2 %	3.4 M	673.8	3.2	24.4 %
	8	2.5 M	267.7	4.5	20.0 %	4.2 M	510.9	4.2	23.8 %
LC	1	18.9 M	1482.1	—	—	17.4 M	2497.1	—	—

One-to-All-Anfragen

		Los Angeles				Europe			
	p	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev
PSPCS	1	2.5 M	1209.0	1.0	—	3.3 M	2152.0	1.0	—
	2	2.5 M	690.0	1.8	14.7 %	3.1 M	1054.2	2.0	16.1 %
	4	2.5 M	417.4	2.9	18.2 %	3.4 M	673.8	3.2	24.4 %
	8	2.5 M	267.7	4.5	20.0 %	4.2 M	510.9	4.2	23.8 %
LC	1	18.9 M	1482.1	—	—	17.4 M	2497.1	—	—

- PSPCS betrachtet deutlich weniger Connections als LC

One-to-All-Anfragen

		Los Angeles				Europe			
	p	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev
PSPCS	1	2.5 M	1209.0	1.0	—	3.3 M	2152.0	1.0	—
	2	2.5 M	690.0	1.8	14.7 %	3.1 M	1054.2	2.0	16.1 %
	4	2.5 M	417.4	2.9	18.2 %	3.4 M	673.8	3.2	24.4 %
	8	2.5 M	267.7	4.5	20.0 %	4.2 M	510.9	4.2	23.8 %
LC	1	18.9 M	1482.1	—	—	17.4 M	2497.1	—	—

- PSPCS betrachtet deutlich weniger Connections als LC
- PSPCS skaliert sehr gut mit zunehmender Anzahl Cores

One-to-All-Anfragen

		Los Angeles				Europe			
	p	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev	Settled Conns	Time [ms]	Spd Up	Std-Dev
PSPCS	1	2.5 M	1209.0	1.0	—	3.3 M	2152.0	1.0	—
	2	2.5 M	690.0	1.8	14.7 %	3.1 M	1054.2	2.0	16.1 %
	4	2.5 M	417.4	2.9	18.2 %	3.4 M	673.8	3.2	24.4 %
	8	2.5 M	267.7	4.5	20.0 %	4.2 M	510.9	4.2	23.8 %
LC	1	18.9 M	1482.1	—	—	17.4 M	2497.1	—	—

- PSPCS betrachtet deutlich weniger Connections als LC
- PSPCS skaliert sehr gut mit zunehmender Anzahl Cores

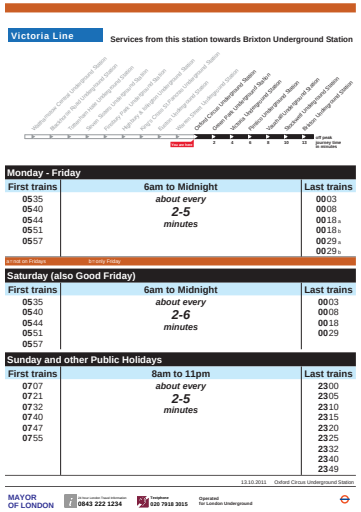
Multi-Label-Correcting
(MLC)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bis jetzt. . .

Erinnerung: Ein Fahrplan besteht aus

- Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, . . .),
- Routen (Bus-, U-Bahn-Linien, . . .),
- Trips mit Abfahrt-/Ankunftszeiten,
- und Fußwegen zum Umsteigen.



Victoria Line — Services from this station towards Brixton Underground Station

Monday - Friday

First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-5	0008
0544	minutes	0018 a
0551		0018 b
0557		0029 a
		0029 b

Saturday (also Good Friday)

First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-6	0008
0544	minutes	0018
0551		0029
0557		

Sunday and other Public Holidays

First trains	8am to 11pm	Last trains
0707	about every	2300
0721	2-5	2305
0732	minutes	2310
0740		2315
0747		2320
0755		2325
		2332
		2340
		2349

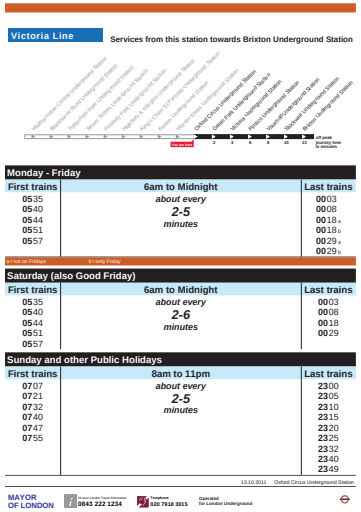
13.10.2011 Oxford Circus Underground Station

MAYOR OF LONDON — 0843 222 1234 — 020 7918 3015 — Operated for London Underground

Bis jetzt. . .

Erinnerung: Ein Fahrplan besteht aus

- Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, . . .),
- Routen (Bus-, U-Bahn-Linien, . . .),
- Trips mit Abfahrt-/Ankunftszeiten,
- und Fußwegen zum Umsteigen.



Victoria Line — Services from this station towards Brixton Underground Station

Monday - Friday

First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-5	0008
0544	minutes	0018 a
0551		0018 b
0557		0029 a
		0029 b

a Not on Fridays b Fridays Only

Saturday (also Good Friday)

First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-6	0008
0544	minutes	0018
0551		0029
0557		

Sunday and other Public Holidays

First trains	8am to 11pm	Last trains
0707	about every	2300
0721	2-5	2305
0732	minutes	2310
0740		2315
0747		2320
0755		2325
		2332
		2340
		2349

13.10.2011 Oxford Circus Underground Station

MAYOR OF LONDON 0843 222 1234 Telephone 020 7918 3015 Operated for London Underground

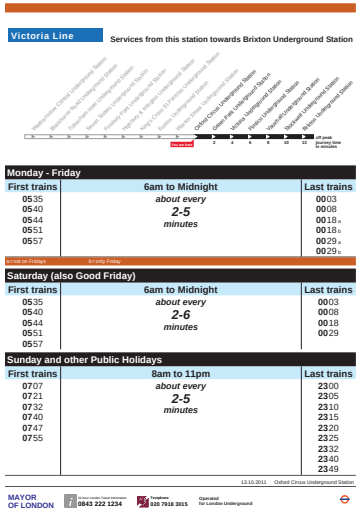
Earliest Arrival Problem:
Gegeben Stops s, t und Abfahrtszeit τ, berechne

- Route zu t, die an s nicht früher als τ abfährt
- und an t frühestmöglich ankommt.

Bis jetzt. . .

Erinnerung: Ein Fahrplan besteht aus

- Stops (Bahnhöfe, Bahnsteige, . . .),
- Routen (Bus-, U-Bahn-Linien, . . .),
- Trips mit Abfahrt-/Ankunftszeiten,
- und Fußwegen zum Umsteigen.



Victoria Line — Services from this station towards Brixton Underground Station

Monday - Friday		
First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-5	0008
0544	minutes	0018 a
0551		0018 b
0557		0029 a
		0029 b

Saturday (also Good Friday)		
First trains	6am to Midnight	Last trains
0535	about every	0003
0540	2-6	0008
0544	minutes	0018
0551		0029
0557		

Sunday and other Public Holidays		
First trains	8am to 11pm	Last trains
0707	about every	2300
0721	2-5	2305
0732	minutes	2310
0740		2315
0747		2320
0755		2325
		2332
		2340
		2349

13.10.2011 Oxford Circus Underground Station

MAYOR OF LONDON — 0843 222 1234 — 020 7918 3015 — Operated for London Underground

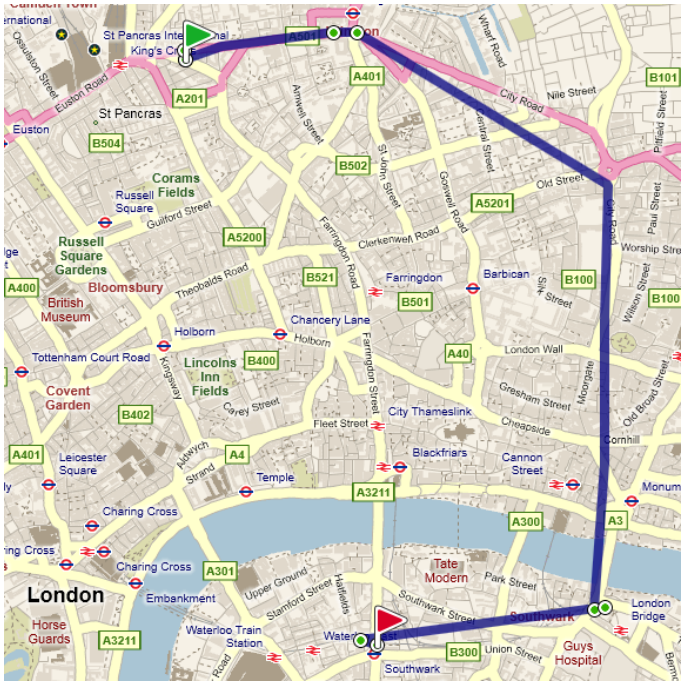
Earliest Arrival Problem:
Gegeben Stops s, t und Abfahrtszeit τ, berechne

- Route zu t, die an s nicht früher als τ abfährt
- und an t frühestmöglich ankommt.

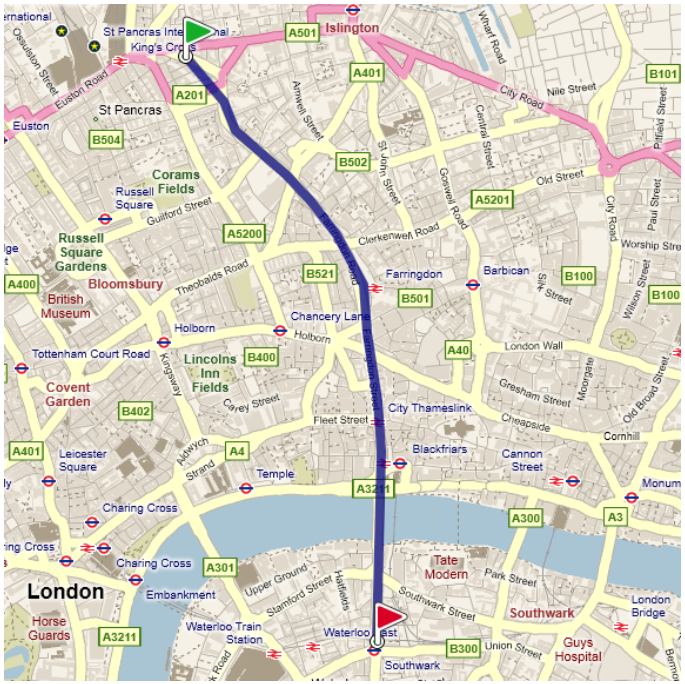
Reicht uns das?

Einbeziehen von Umstiegen

Umstiege zu betrachten ist wichtig!



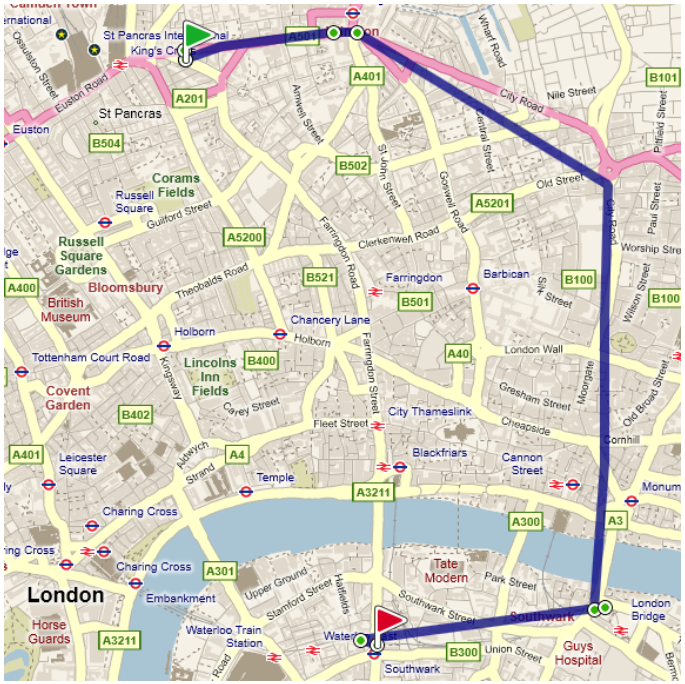
Ankunft 11:08 Uhr, 2 Umstiege



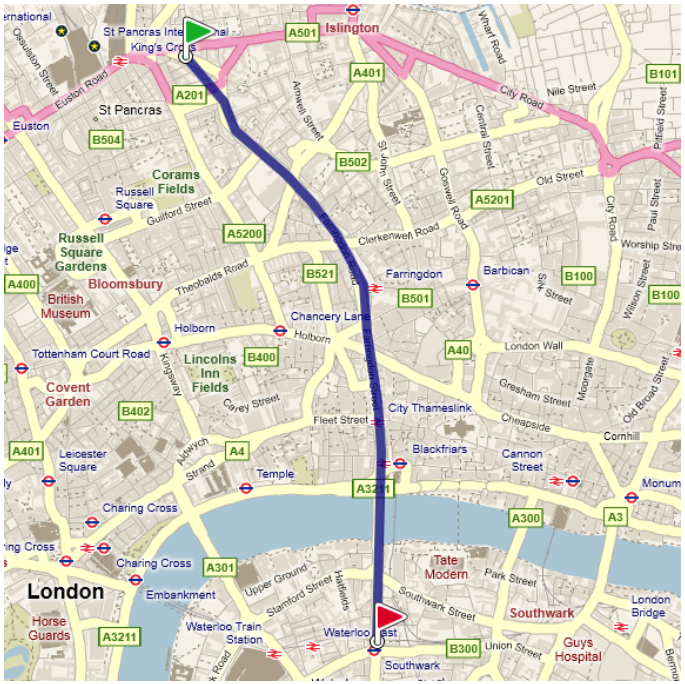
Ankunft 11:09 Uhr, 0 Umstiege

Einbeziehen von Umstiegen

Umstiege zu betrachten ist wichtig!



Ankunft 11:08 Uhr, 2 Umstiege



Ankunft 11:09 Uhr, 0 Umstiege

Idee: Berechne „gute“ Routen für Ankunftszeit *und* Anzahl Umstiege.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Wiederholung – Pareto-Menge

Definition (Pareto-Optimum)

Zu einer Menge M von n-Tupeln heißt ein Tupel $m_i = (x_1, \ldots, x_n) \in M$ Pareto-Optimum, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, so dass m_j in *allen* Werten besser als m_i ist (m_j dominiert m_i).

Wiederholung – Pareto-Menge

Definition (Pareto-Optimum)

Zu einer Menge M von n-Tupeln heißt ein Tupel $m_i = (x_1, \ldots, x_n) \in M$ Pareto-Optimum, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, so dass m_j in *allen* Werten besser als m_i ist (m_j dominiert m_i).

Die Menge M heißt Pareto-Menge, wenn alle $m \in M$ Pareto-optimal.

Wiederholung – Pareto-Menge

Definition (Pareto-Optimum)

Zu einer Menge M von n-Tupeln heißt ein Tupel $m_i = (x_1, \ldots, x_n) \in M$ Pareto-Optimum, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, so dass m_j in *allen* Werten besser als m_i ist (m_j dominiert m_i).

Die Menge M heißt Pareto-Menge, wenn alle $m \in M$ Pareto-optimal.

Beispiel: Betrachte Tupel aus Ankunftszeit und # Umstiege.

$M = \{(14{:}00 \text{ Uhr}, 5), (15{:}13 \text{ Uhr}, 3), (13{:}45 \text{ Uhr}, 4), (15{:}15 \text{ Uhr}, 0)\}$

Wiederholung – Pareto-Menge

Definition (Pareto-Optimum)

Zu einer Menge M von n-Tupeln heißt ein Tupel $m_i = (x_1, \ldots, x_n) \in M$ Pareto-Optimum, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, so dass m_j in *allen* Werten besser als m_i ist (m_j dominiert m_i).

Die Menge M heißt Pareto-Menge, wenn alle $m \in M$ Pareto-optimal.

Beispiel: Betrachte Tupel aus Ankunftszeit und # Umstiege.

$M = \{(14{:}00 \text{ Uhr}, 5), (15{:}13 \text{ Uhr}, 3), (13{:}45 \text{ Uhr}, 4), (15{:}15 \text{ Uhr}, 0)\}$

Wiederholung – Pareto-Menge

Definition (Pareto-Optimum)

Zu einer Menge M von n-Tupeln heißt ein Tupel $m_i = (x_1, \ldots, x_n) \in M$ Pareto-Optimum, wenn es kein anderes $m_j \in M$ gibt, so dass m_j in *allen* Werten besser als m_i ist (m_j dominiert m_i).

Die Menge M heißt Pareto-Menge, wenn alle $m \in M$ Pareto-optimal.

Beispiel: Betrachte Tupel aus Ankunftszeit und # Umstiege.

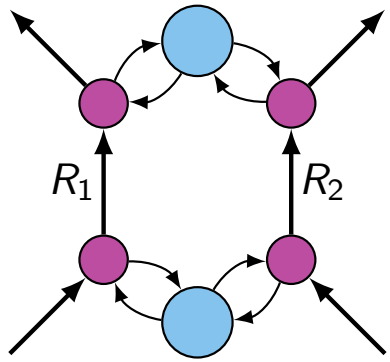
$M = \{(14{:}00 \text{ Uhr}, 5), (15{:}13 \text{ Uhr}, 3), (13{:}45 \text{ Uhr}, 4), (15{:}15 \text{ Uhr}, 0)\}$

Wie effizient berechnen?

Multi-Label-Correcting – Ansatz

Idee:

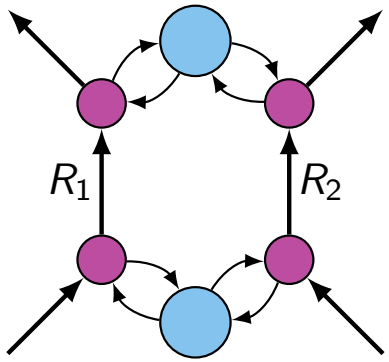
- Benutze (zeitabhängiges) Graphmodell
- Grundlage: Dijkstras Algorithmus



Multi-Label-Correcting – Ansatz

Idee:

- Benutze (zeitabhängiges) Graphmodell
- Grundlage: Dijkstras Algorithmus



Aber:

- Label ℓ sind 2-Tupel aus Ankunftszeit und # Umstiege
- An jedem Knoten $v \in V$: Pareto-Menge B_v von Labeln
- Priority Queue verwaltet Label statt Knoten
- Priorität ist Ankunftszeit
  (Wieder: keine Totalordnung der Label $\Rightarrow$ label-correcting)
- Dominanz von Labeln in B_v on-the-fly

Multi-Label-Correcting (MLC)

MLC($G = (V, E), s, \tau_{\text{dep}}$)

1 $B_v \leftarrow \{\}$ for each $v \in V$; $B_s \leftarrow \{(\tau_{\text{dep}}, 0)\}$
2 $Q.clear()$, $Q.insert(s, (\tau_{\text{dep}}, 0))$
3 **while** $!Q.empty()$ **do**
4 u and $\ell = (\tau, tr) \leftarrow Q.deleteMin()$
5 **for** *all edges* $e = (u, v) \in E$ **do**
6 **if** *e is a transfer edge* **then** $tr' \leftarrow tr + 1$
7 **else** $tr' \leftarrow tr$
8 $\ell' \leftarrow (\tau + \text{len}(e, \tau), tr')$
9 **if** ℓ' *is not dominated by any* $\ell'' \in B_v$ **then**
10 $B_v.insert(\ell')$
11 Remove non-Pareto-optimal labels from B_v
12 $Q.insert(v, \ell')$

MLC – Diskussion

Diskussion:

- Pareto-Mengen B_v sind *dynamische* Datenstrukturen $\rightsquigarrow$ teuer!
- Sehr viele Queue-Operationen
- Testen der Dominanz in $\mathcal{O}(|B_v|)$ möglich
- Stoppkriterium?

MLC – Diskussion

Diskussion:

- Pareto-Mengen B_v sind *dynamische* Datenstrukturen $\rightsquigarrow$ teuer!
- Sehr viele Queue-Operationen
- Testen der Dominanz in $\mathcal{O}(|B_v|)$ möglich
- Stoppkriterium?

Verbesserungen für MLC:

- Jedes B_v verwaltet bestes ungesettletes Label selbst
  $\Rightarrow$ Priority Queue auf Knoten statt Labeln
- Label-Forwarding:
  Wenn Kante keine Kosten hat, überspringe Queue
- Target-Pruning:
  Verwerfe Label ℓ' an Knoten v, wenn es von B_t dominiert wird

Literatur I

Daniel Delling, Bastian Katz, and Thomas Pajor.
Parallel Computation of Best Connections in Public Transportation Networks.
ACM Journal of Experimental Algorithmics, 17(4):4.1–4.26, July 2012.

Yann Disser, Matthias Müller–Hannemann, and Mathias Schnee.
Multi-Criteria Shortest Paths in Time-Dependent Train Networks.
In Catherine C. McGeoch, editor, *Proceedings of the 7th Workshop on Experimental Algorithms (WEA'08)*, volume 5038 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 347–361. Springer, June 2008.

Daniel Delling, Thomas Pajor, and Dorothea Wagner.
Engineering Time-Expanded Graphs for Faster Timetable Information.
In Ravindra K. Ahuja, Rolf H. Möhring, and Christos Zaroliagis, editors, *Robust and Online Large-Scale Optimization*, volume 5868 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 182–206. Springer, 2009.

Evangelia Pyrga, Frank Schulz, Dorothea Wagner, and Christos Zaroliagis.
Efficient Models for Timetable Information in Public Transportation Systems.
ACM Journal of Experimental Algorithmics, 12(2.4):1–39, 2008.