

Algorithmen für Routenplanung

9. Vorlesung, Sommersemester 2020

Valentin Buchhold | 25. Mai 2020

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · ALGORITHMIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



POINTS
OF
INTEREST

Punkt-zu-Punkt

- zwei Punkte \rightarrow kürzester Weg
- wird für Routenplanung benutzt
- Beschleunigungstechniken

Punkt-zu-Punkt

- zwei Punkte → kürzester Weg
- wird für Routenplanung benutzt
- Beschleunigungstechniken

All-Pairs

- Distanzen zwischen allen Knotenpaaren
- wird für Vorbereitung benutzt

Punkt-zu-Punkt

- zwei Punkte \rightarrow kürzester Weg
- wird für Routenplanung benutzt
- Beschleunigungstechniken

All-Pairs

- Distanzen zwischen allen Knotenpaaren
- wird für Vorberechnung benutzt

One-to-All

- ein Knoten \rightarrow Distanzen zu allen Knoten
- wird für Vorberechnung benutzt

Punkt-zu-Punkt

- zwei Punkte \rightarrow kürzester Weg
- wird für Routenplanung benutzt
- Beschleunigungstechniken

One-to-Many

- ein (variierender) Knoten und eine (feste) Menge \rightarrow Distanz zu allen Knoten in der Menge
- wichtig für POI

All-Pairs

- Distanzen zwischen allen Knotenpaaren
- wird für Vorberechnung benutzt

One-to-All

- ein Knoten \rightarrow Distanzen zu allen Knoten
- wird für Vorberechnung benutzt

Punkt-zu-Punkt

- zwei Punkte \rightarrow kürzester Weg
- wird für Routenplanung benutzt
- Beschleunigungstechniken

One-to-Many

- ein (variierender) Knoten und eine (feste) Menge \rightarrow Distanz zu allen Knoten in der Menge
- wichtig für POI

All-Pairs

- Distanzen zwischen allen Knotenpaaren
- wird für Vorberechnung benutzt

One-to-All

- ein Knoten \rightarrow Distanzen zu allen Knoten
- wird für Vorberechnung benutzt

Many-to-Many

- zwei Mengen \rightarrow Distanztabelle
- wichtig für Vehicle Routing

Kürzeste Wege von einem Startknoten aus (**single-source**):

- Dijkstras Algorithmus [Dij59, Dan62]
- Bellman-Ford-Algorithmus [Bel58, FF62]

Kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren (**all-pairs**):

- n -mal Dijkstra oder Bellman-Ford
- Floyd-Warshall-Algorithmus [Flo62, War62]
- Johnsons Algorithmus [Joh77]

- Sei $P_{st}^k = (s, v_1, \dots, v_j, t)$ ein kürzester s - t -Pfad, für den alle **Zwischenknoten** v_i in der Menge $\{1, \dots, k\}$ liegen
- Beobachtung:
 - Wenn $k \notin P_{st}^k$, dann ist P_{st}^k auch ein P_{st}^{k-1}
 - Wenn $k \in P_{st}^k$, dann ist P_{st}^k die Konkatination von P_{sk}^{k-1} und P_{kt}^{k-1}
- Sei $d_k(s, t)$ die Länge eines P_{st}^k , dann gilt:

- Sei $P_{st}^k = (s, v_1, \dots, v_j, t)$ ein kürzester s - t -Pfad, für den alle **Zwischenknoten** v_i in der Menge $\{1, \dots, k\}$ liegen
- Beobachtung:
 - Wenn $k \notin P_{st}^k$, dann ist P_{st}^k auch ein P_{st}^{k-1}
 - Wenn $k \in P_{st}^k$, dann ist P_{st}^k die Konkatination von P_{sk}^{k-1} und P_{kt}^{k-1}
- Sei $d_k(s, t)$ die Länge eines P_{st}^k , dann gilt:

$$d_k(s, t) = \begin{cases} \ell(s, t) & \text{wenn } k = 0 \\ \min\{d_{k-1}(s, t), d_{k-1}(s, k) + d_{k-1}(k, t)\} & \text{wenn } k \geq 1 \end{cases}$$

Floyd-Warshall-Algorithmus

FLOYDWARSHALL($G = (V, E), \ell : E \rightarrow \mathbb{R}$)

```
1 set  $d[s][t] \leftarrow \infty$  for all  $s, t \in V$ 
2 set  $parent[s][t] \leftarrow \perp$  for all  $s, t \in V$ 
3 foreach vertex  $u \in V$  do  $d[u][u] \leftarrow 0$ 
4 foreach edge  $e = (u, v) \in E$  do  $d[u][v] \leftarrow \ell(e)$ 
    $parent[u][v] \leftarrow u$ 

5 for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
6   foreach vertex  $s \in V$  do
7     foreach vertex  $t \in V$  do
8       if  $d[s][k] + d[k][t] < d[s][t]$  then
9          $d[s][t] \leftarrow d[s][k] + d[k][t]$ 
10         $parent[s][t] \leftarrow parent[k][t]$ 
```

Floyd-Warshall-Algorithmus

FLOYDWARSHALL($G = (V, E), \ell : E \rightarrow \mathbb{R}$)

```
1 set  $d[s][t] \leftarrow \infty$  for all  $s, t \in V$ 
2 set  $parent[s][t] \leftarrow \perp$  for all  $s, t \in V$ 
3 foreach vertex  $u \in V$  do  $d[u][u] \leftarrow 0$ 
4 foreach edge  $e = (u, v) \in E$  do  $d[u][v] \leftarrow \ell(e)$ 
    $parent[u][v] \leftarrow u$ 

5 for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
6   foreach vertex  $s \in V$  do
7     foreach vertex  $t \in V$  do
8       if  $d[s][k] + d[k][t] < d[s][t]$  then
9          $d[s][t] \leftarrow d[s][k] + d[k][t]$ 
10         $parent[s][t] \leftarrow parent[k][t]$ 
```

Zeit: $O(n^3)$ (aber kleiner konstanter Faktor) Platz: $O(n^2)$

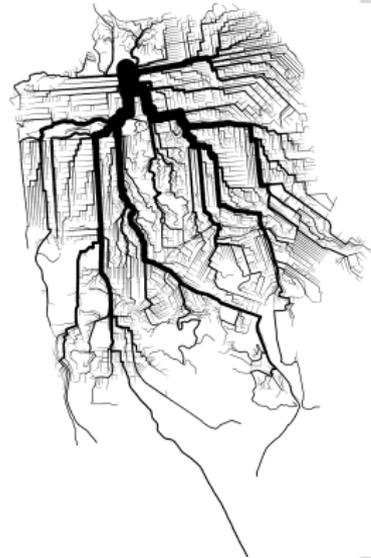
PHAST



Kürzeste-Wege Bäume

Anfrage:

- gegeben ein nichtnegativ gewichteter gerichteter Graph und Knoten s
- berechne Distanzen von s zu *allen* anderen



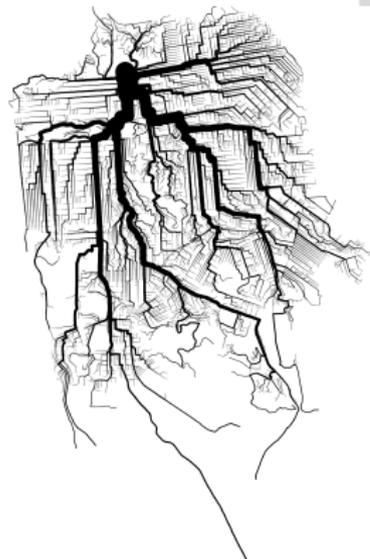
Kürzeste-Wege Bäume

Anfrage:

- gegeben ein nichtnegativ gewichteter gerichteter Graph und Knoten s
- berechne Distanzen von s zu *allen* anderen

Lösung:

- Dijkstra [Dij59]



Anfrage:

- gegeben ein nichtnegativ gewichteter gerichteter Graph und Knoten s
- berechne Distanzen von s zu *allen* anderen

Lösung:

- Dijkstra [Dij59]

Fakten:

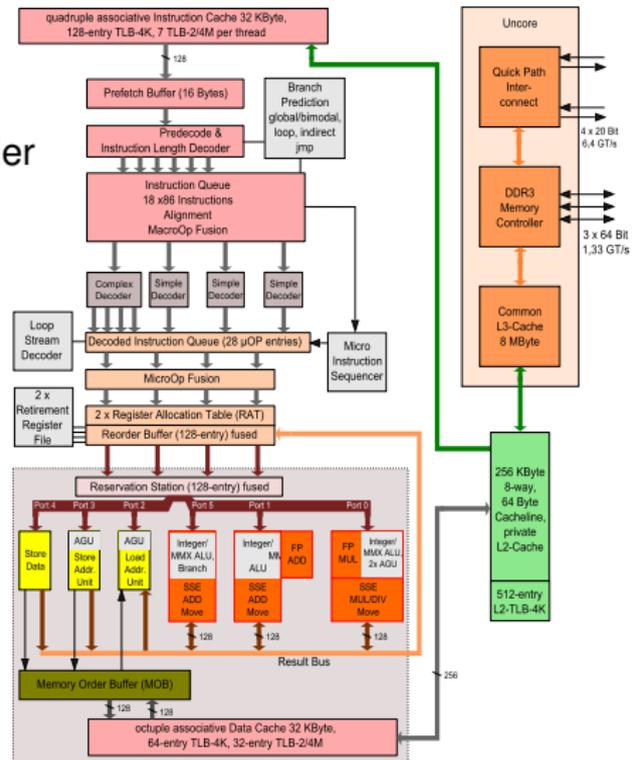
- $O(m + n \log n)$ mit Fibonacci Heaps [FT87]
- **linear** (mit kleinen Konstanten) in Praxis [Gol01]
- Ausnutzung von moderner Hardware schwierig



Einige Fakten:

- viele Kerne
- mehr Kerne als Speichercontroller
- Hyperthreading
- Multi-Sockel-Systeme
- steile Speicherhierarchie
- Cache coherency

Intel Nehalem microarchitecture



GT/s: gigatransfers per second

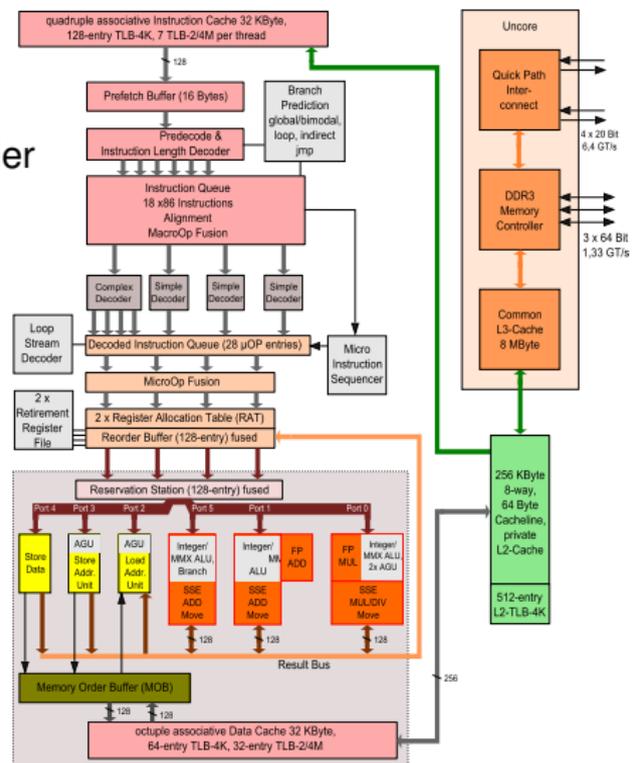
Einige Fakten:

- viele Kerne
- mehr Kerne als Speichercontroller
- Hyperthreading
- Multi-Sockel-Systeme
- steile Speicherhierarchie
- Cache coherency

Haupt Herausforderungen:

- Parallelisierung
- Speicherzugriff

Intel Nehalem microarchitecture



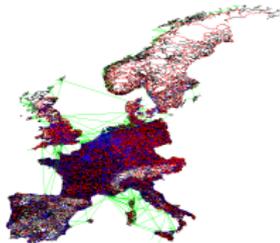
GT/s: gigatransfers per second

Ausnutzen von moderner Hardware

Datenlokalität

- Eingabe: West Europa
- 18M Knoten, 23M Straßen

Dijkstra: ≈ 3.0 s \Rightarrow nicht real-time



Core-i7 workstation (2.66 GHz)

Ausnutzen von moderner Hardware

Datenlokalität

- Eingabe: West Europa
- 18M Knoten, 23M Straßen

Dijkstra: ≈ 3.0 s \Rightarrow nicht real-time

$n + m$ clock cycles: ≈ 15 ms \Rightarrow viel schneller



Core-i7 workstation (2.66 GHz)

Ausnutzen von moderner Hardware

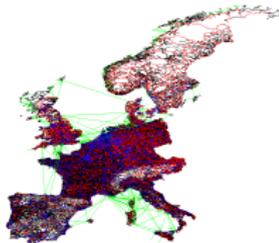
Datenlokalität

- Eingabe: West Europa
- 18M Knoten, 23M Straßen

Dijkstra: ≈ 3.0 s \Rightarrow nicht real-time

$n + m$ clock cycles: ≈ 15 ms \Rightarrow viel schneller

BFS: ≈ 2.0 s



- Verlangsamung kommt nicht durch Priorityqueue allein

Core-i7 workstation (2.66 GHz)

Datenlokalität

- Eingabe: West Europa
- 18M Knoten, 23M Straßen

Dijkstra: ≈ 3.0 s \Rightarrow nicht real-time

$n + m$ clock cycles: ≈ 15 ms \Rightarrow viel schneller

BFS: ≈ 2.0 s



- Verlangsamung kommt nicht durch Priorityqueue allein

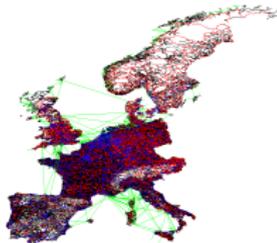
Core-i7 workstation (2.66 GHz)

Parallelisierung:

- Spekulation
- Δ -stepping [MS03]
- mehr Operationen als Dijkstra
- keine große Beschleunigung auf dünnen Graphen

Datenlokalität

- Eingabe: West Europa
- 18M Knoten, 23M Straßen
 - Dijkstra: ≈ 3.0 s \Rightarrow nicht real-time
 - $n + m$ clock cycles: ≈ 15 ms \Rightarrow viel schneller
 - BFS: ≈ 2.0 s
- Verlangsamung kommt nicht durch Priorityqueue allein



Core-i7 workstation (2.66 GHz)

Parallelisierung:

- Spekulation
- Δ -stepping [MS03]
- mehr Operationen als Dijkstra
- keine große Beschleunigung auf dünnen Graphen
- Berechnen von mehreren Bäumen ist einfach

Ansatz 1

Idee:

- Umordnen der Knoten im Graphen

Idee:

- Umordnen der Knoten im Graphen

algorithm	details	time per tree [ms]		
		random	input	DFS
Dijkstra	binary heap	11159	5859	5180
	Dial	7767	3538	2908
	smart queue	7991	3556	2826
BFS	—	6060	2445	2068

(**Achtung:** one-to-all & älterer Rechner)

Idee:

- Umordnen der Knoten im Graphen

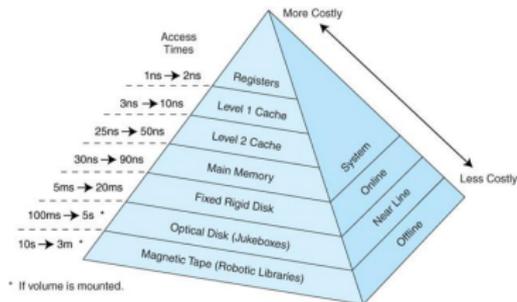
algorithm	details	time per tree [ms]		
		random	input	DFS
Dijkstra	binary heap	11159	5859	5180
	Dial	7767	3538	2908
	smart queue	7991	3556	2826
BFS	—	6060	2445	2068

(**Achtung:** one-to-all & älterer Rechner)

⇒ keine große Beschleunigung

Dijkstras Algorithmus:

- moderne Hardware nicht ausgenutzt
- Hauptprobleme:
 - Datenlokalität
 - Parallelisierung

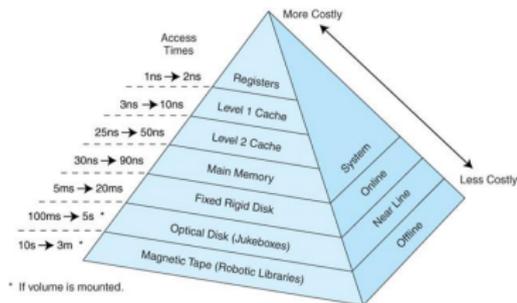


Dijkstras Algorithmus:

- moderne Hardware nicht ausgenutzt
- Hauptprobleme:
 - Datenlokalität
 - Parallelisierung

Fragen:

- hilft Vorberechnung?
- wie?
- Ansatzpunkt?



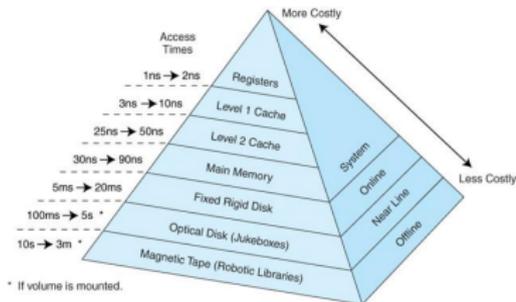
Dijkstras Algorithmus:

- moderne Hardware nicht ausgenutzt
- Hauptprobleme:
 - Datenlokalität
 - Parallelisierung

Fragen:

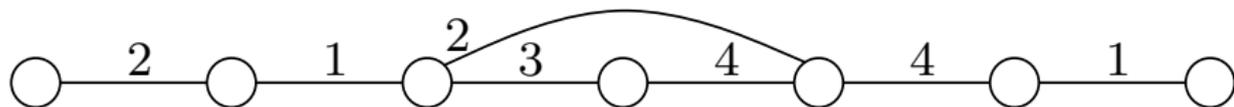
- hilft Vorberechnung?
- wie?
- Ansatzpunkt?

PHAST: Hardware-Accelerated Shortest path Trees



Contraction Hierarchies

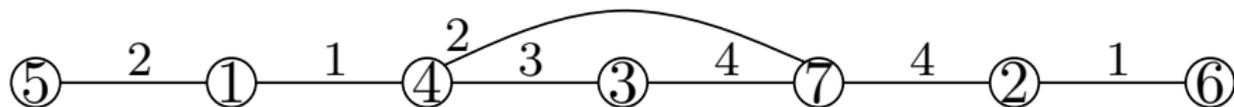
Vorbereitung:



Contraction Hierarchies

Vorbereitung:

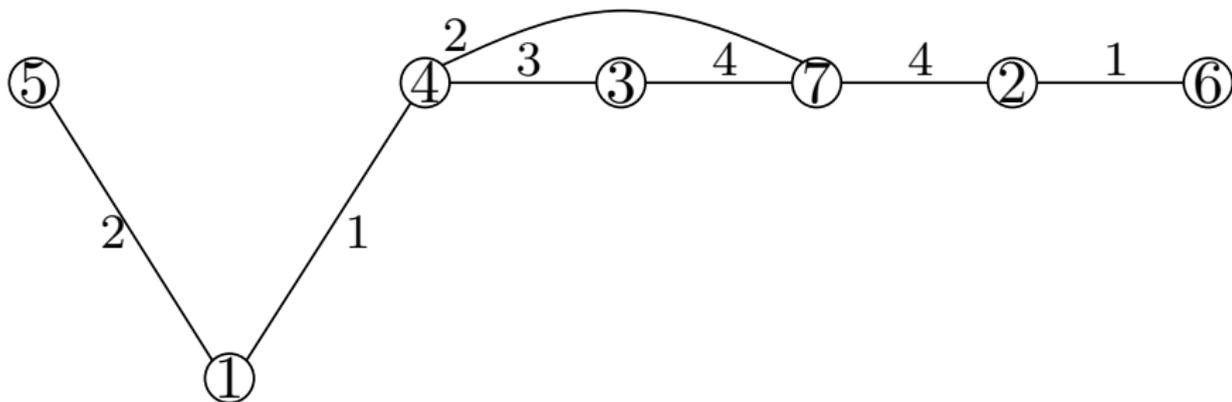
- ordne Knoten nach Wichtigkeit



Contraction Hierarchies

Vorbereitung:

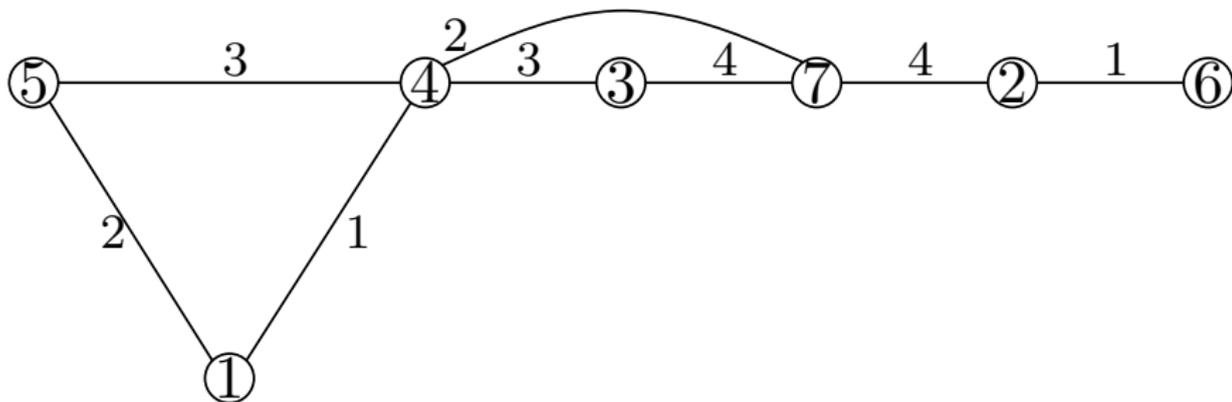
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorbereitung:

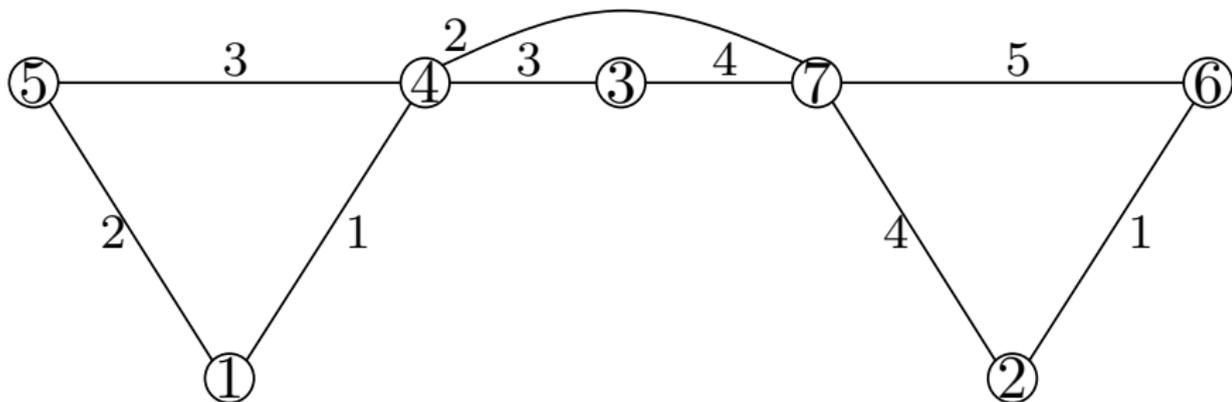
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorbereitung:

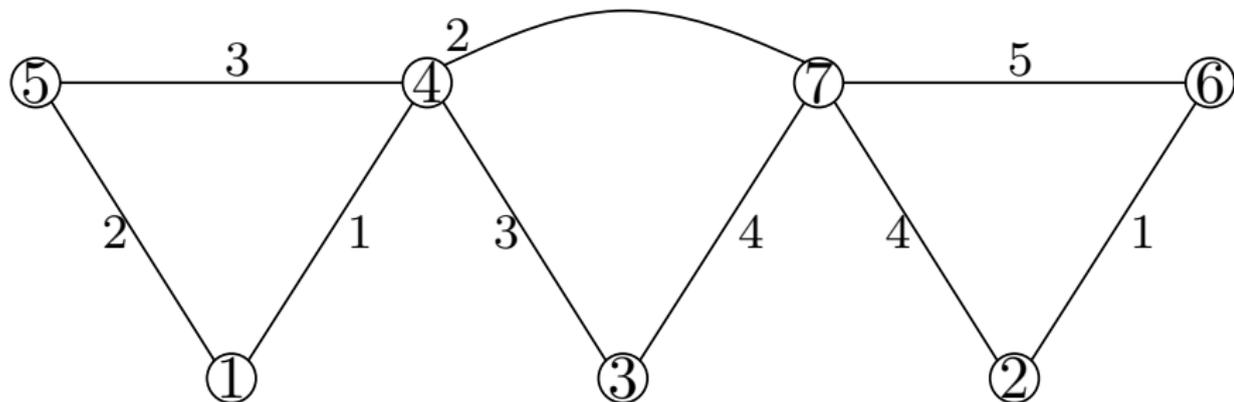
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorbereitung:

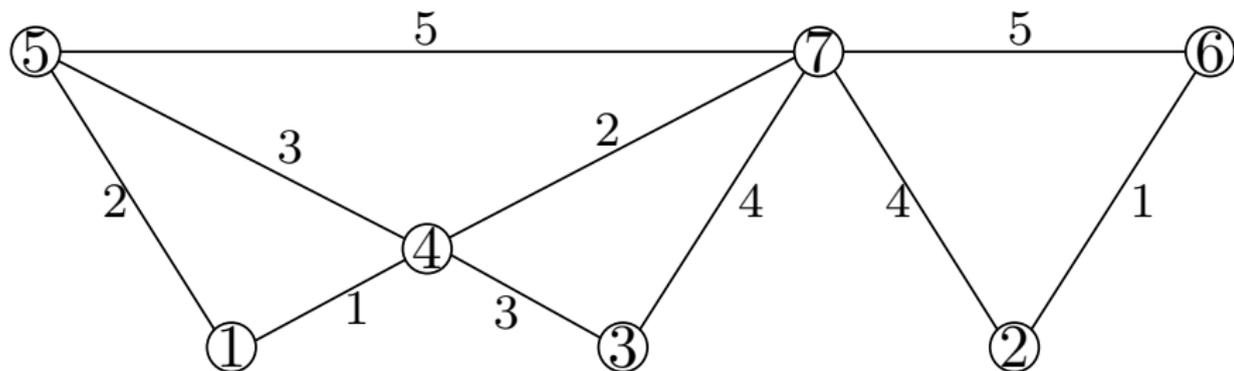
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorbereitung:

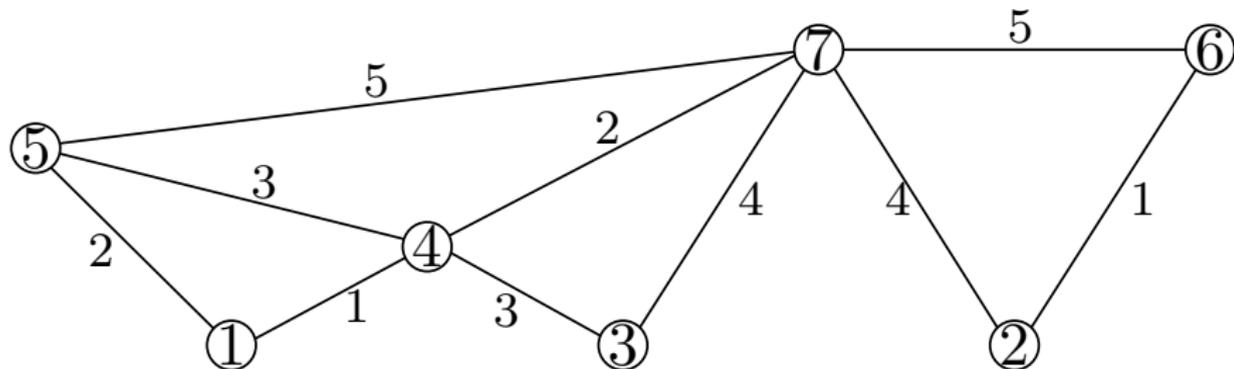
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorbereitung:

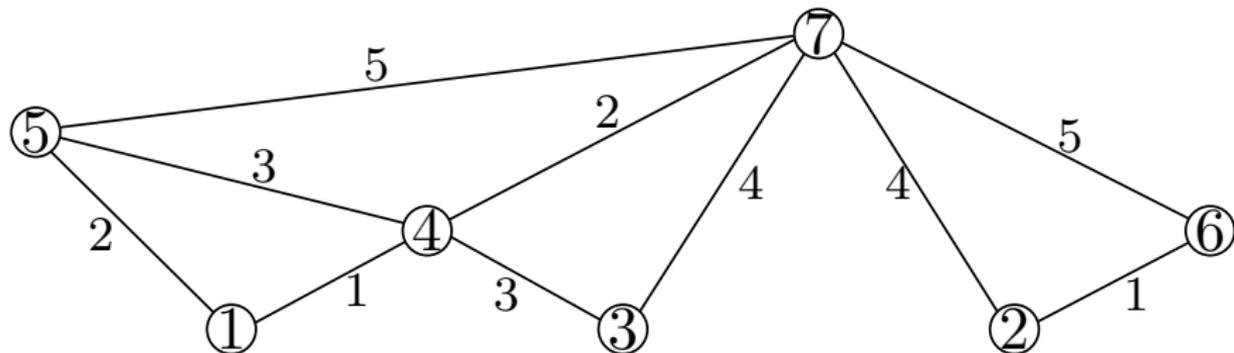
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

Vorbereitung:

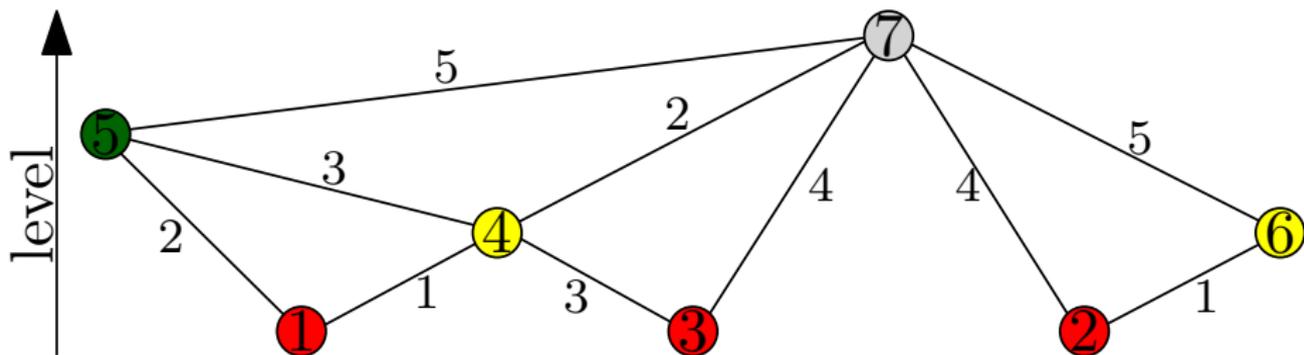
- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu



Contraction Hierarchies

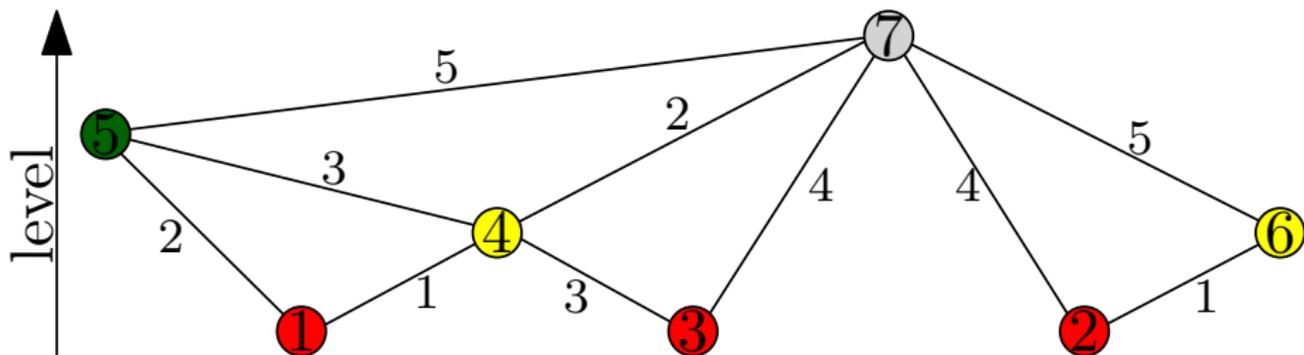
Vorbereitung:

- ordne Knoten nach Wichtigkeit
- bearbeite in der Reihenfolge
- füge Shortcuts hinzu
- Levelzuordnung (ca. 150 in Straßennetzwerken)



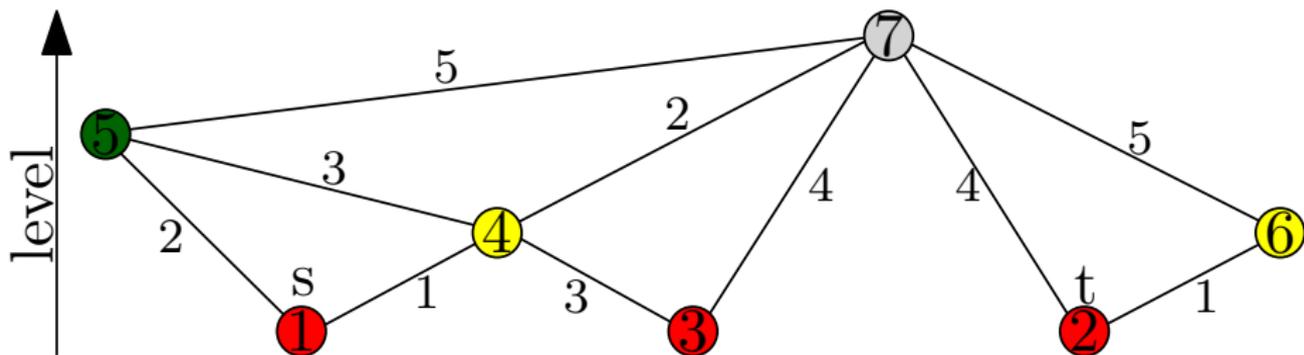
Punkt-zu-Punkt-Anfragen

- modifizierter **bidirektionaler** Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten



Punkt-zu-Punkt-Anfragen

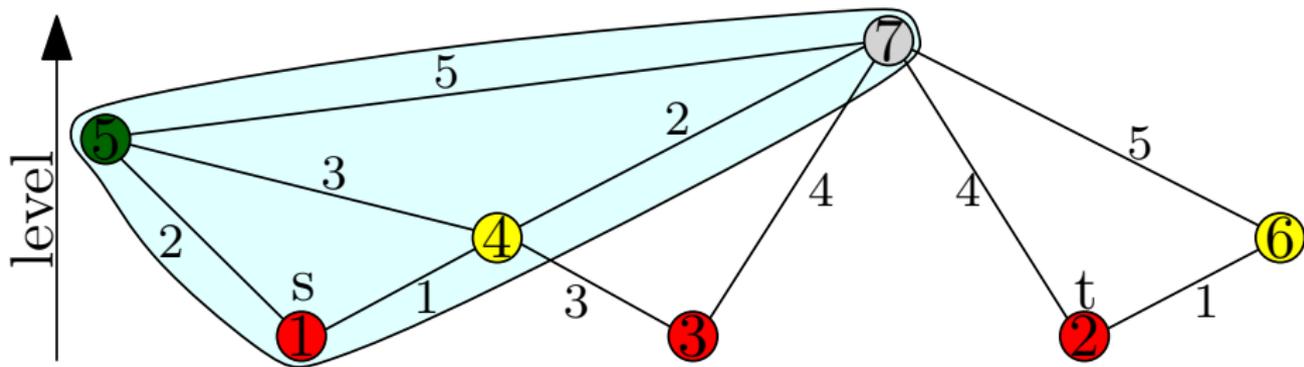
- modifizierter **bidirektionaler** Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten



Contraction Hierarchies

Punkt-zu-Punkt-Anfragen

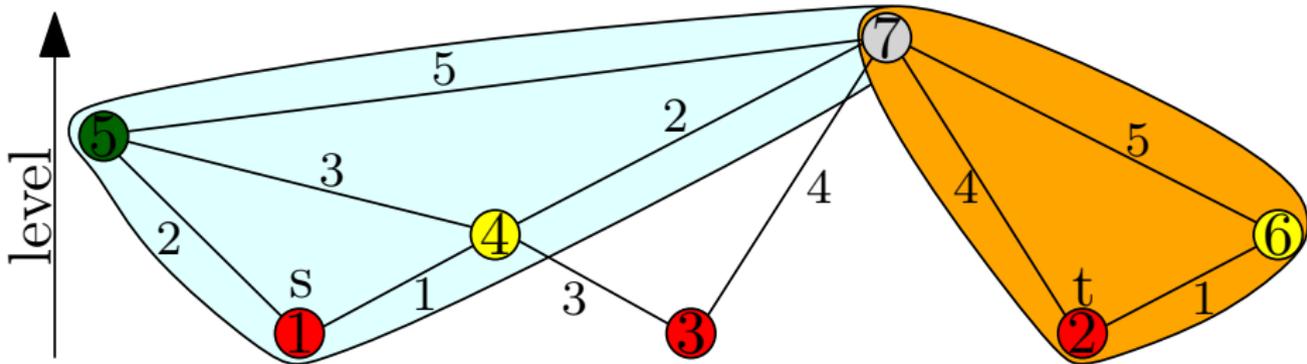
- modifizierter **bidirektionaler** Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten



Contraction Hierarchies

Punkt-zu-Punkt-Anfragen

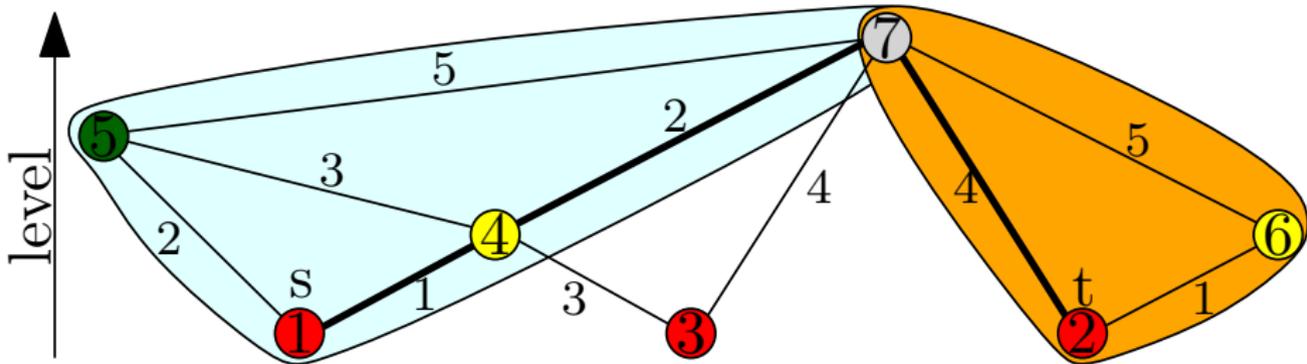
- modifizierter **bidirektionaler** Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten



Contraction Hierarchies

Punkt-zu-Punkt-Anfragen

- modifizierter **bidirektionaler** Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten

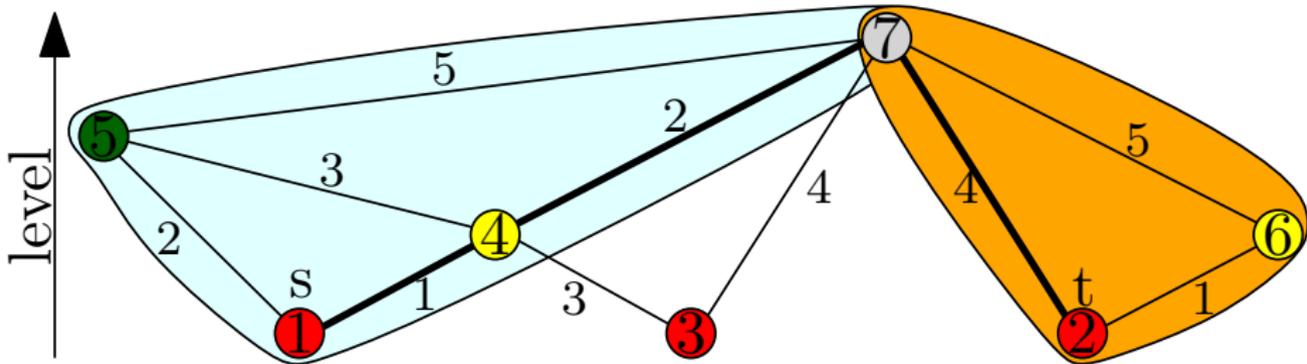


Punkt-zu-Punkt-Anfragen

- modifizierter **bidirektionaler** Dijkstra
- folgt nur Kanten zu wichtigeren Knoten
- besucht nur 500 Knoten

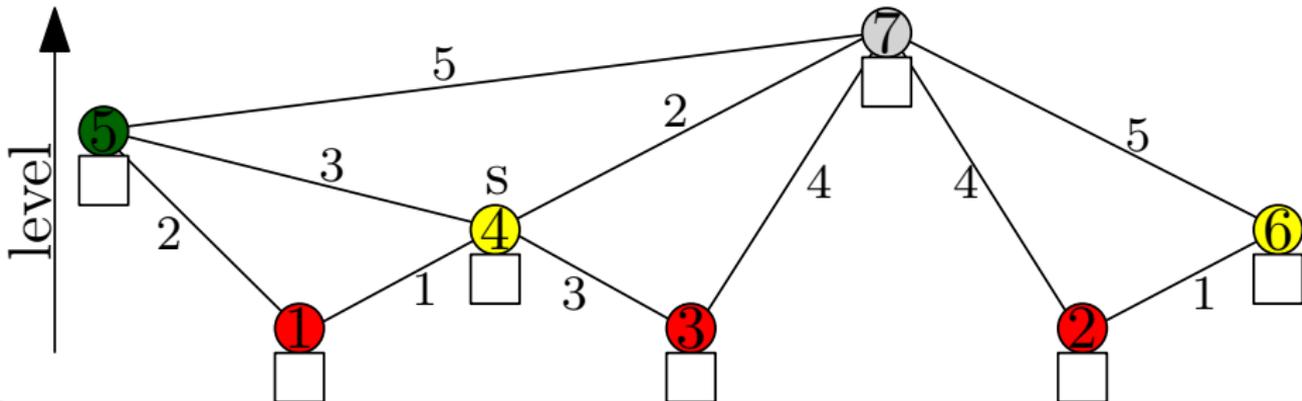
Korrektheit:

- es gibt einen wichtigsten Knoten auf dem Pfad
- dieser wird von Vorwärts- und Rückwärtssuche gescannt



Neuer Anfragealgorithmus

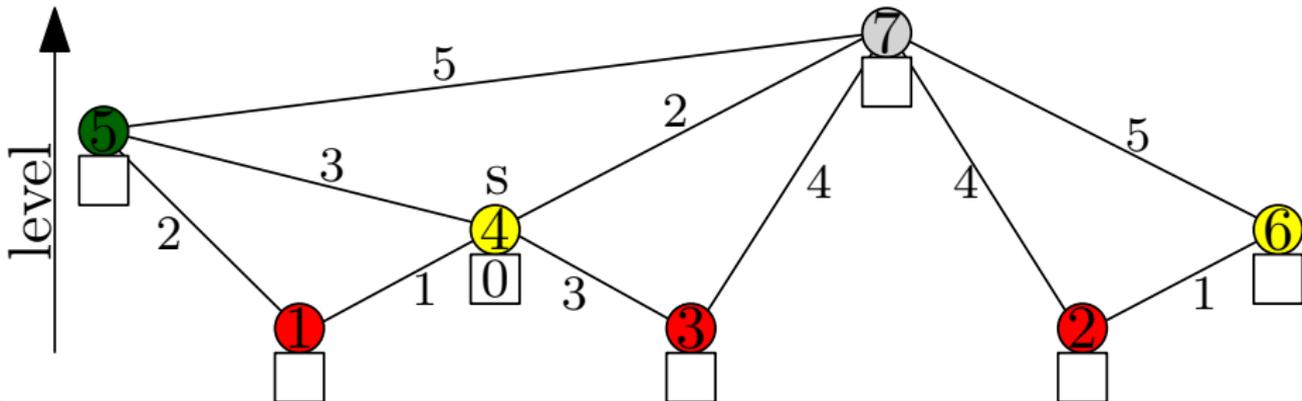
One-to-all-Suche von s :



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s :

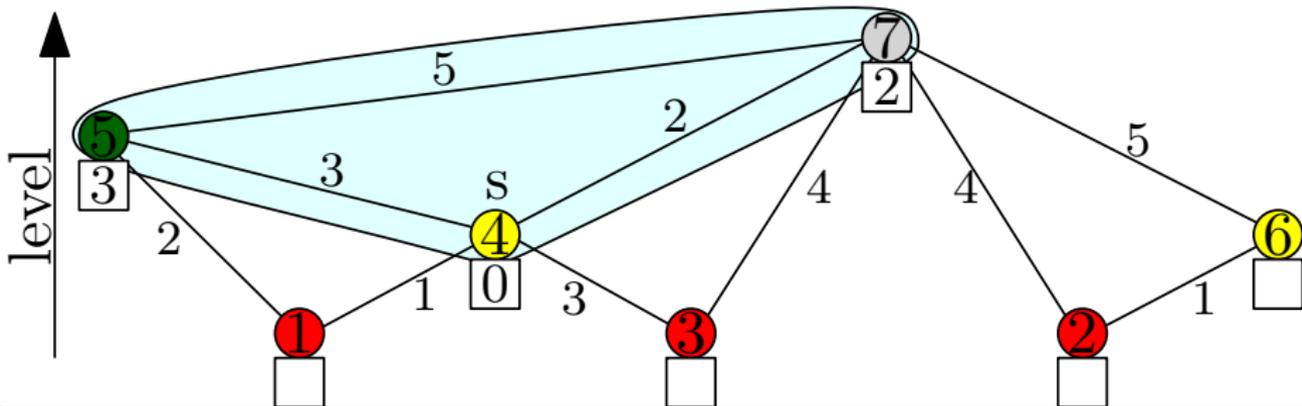
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)



Neuer Anfragealgorithmus

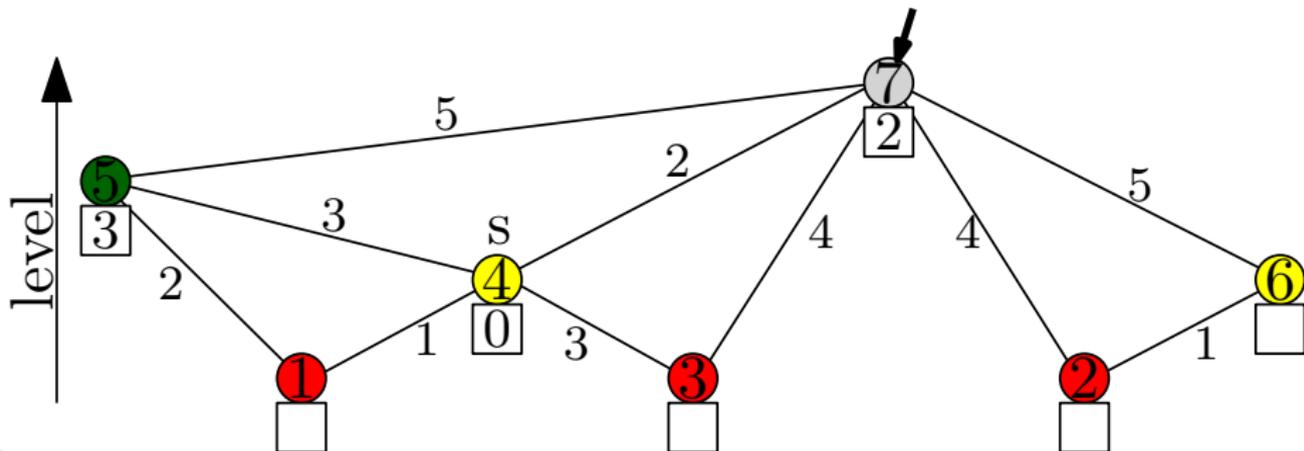
One-to-all-Suche von s :

- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten



One-to-all-Suche von s :

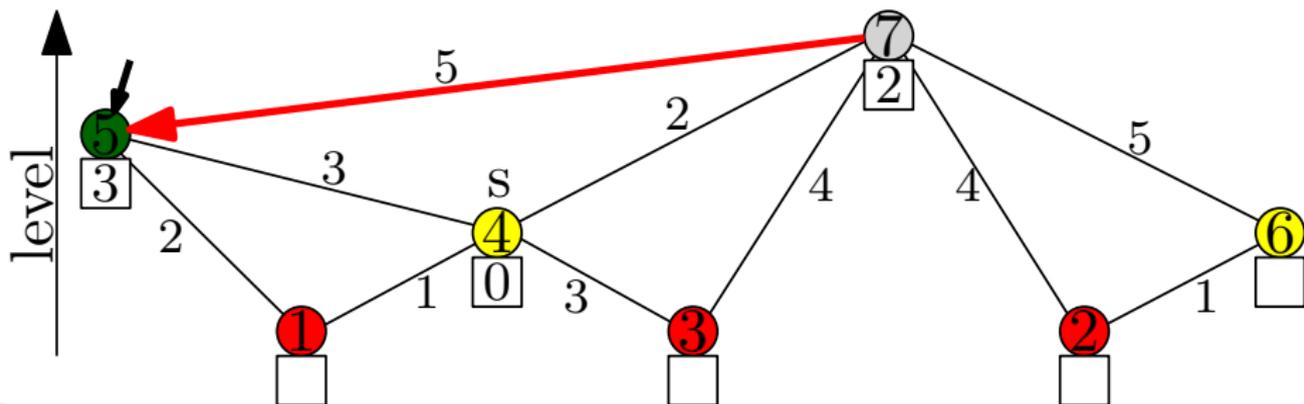
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in **inverser** Levelordnung:
 - checke **eingehende** Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
 - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

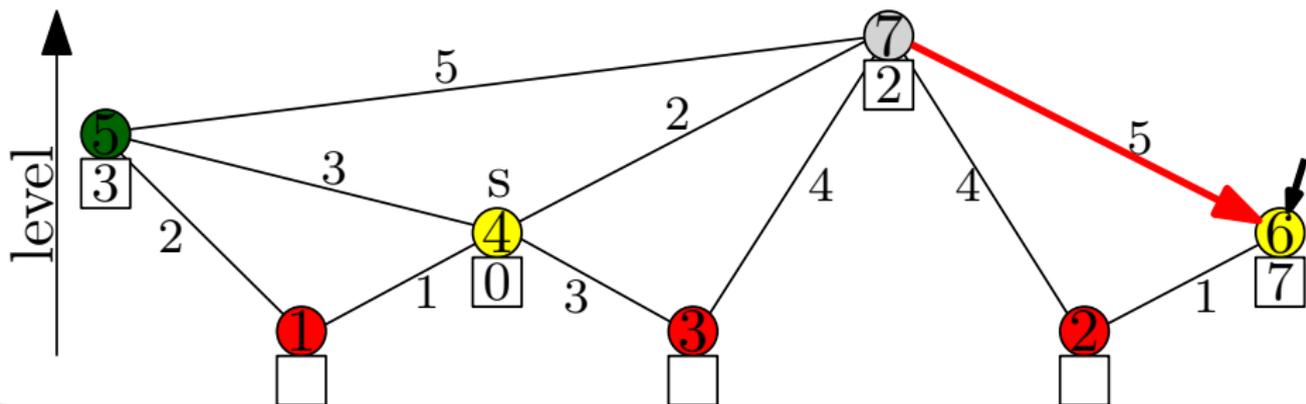
One-to-all-Suche von s :

- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in **inverser** Levelordnung:
 - checke **eingehende** Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
 - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



One-to-all-Suche von s :

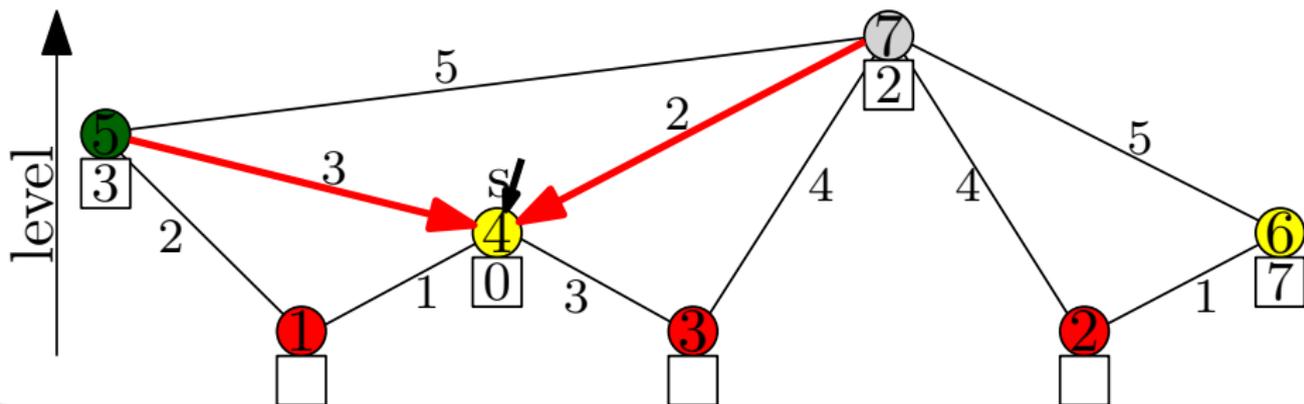
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in **inverser** Levelordnung:
 - checke **eingehende** Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
 - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s :

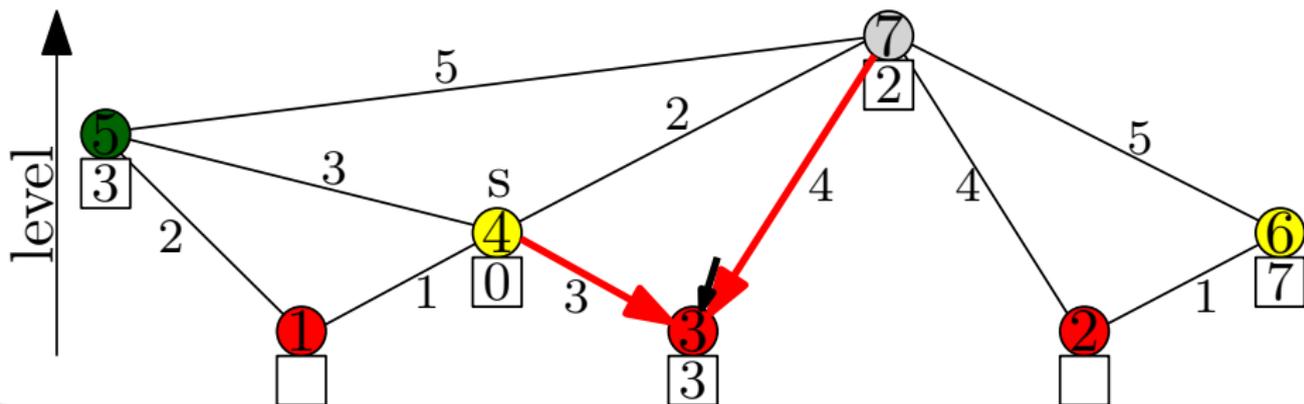
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in **inverser** Levelordnung:
 - checke **eingehende** Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
 - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s :

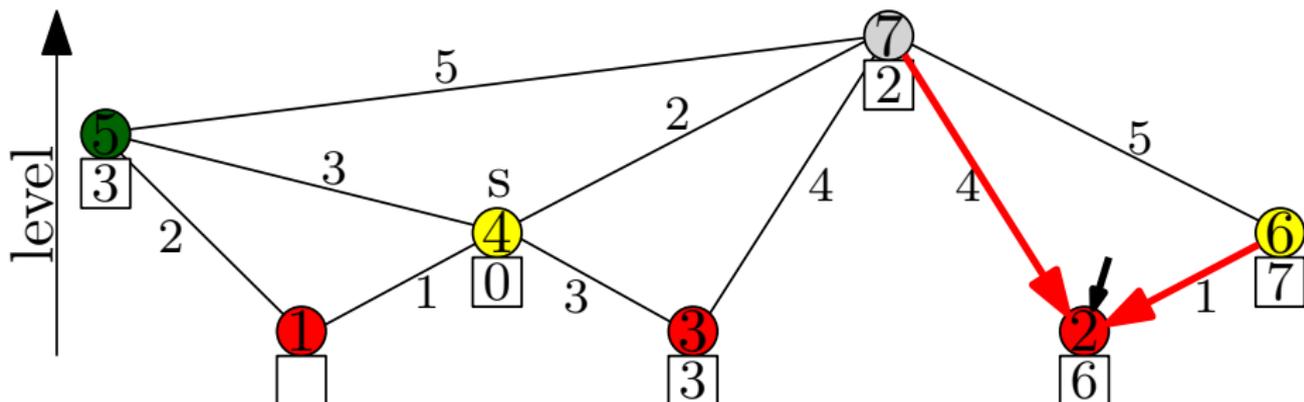
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in **inverser** Levelordnung:
 - checke **eingehende** Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
 - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

One-to-all-Suche von s :

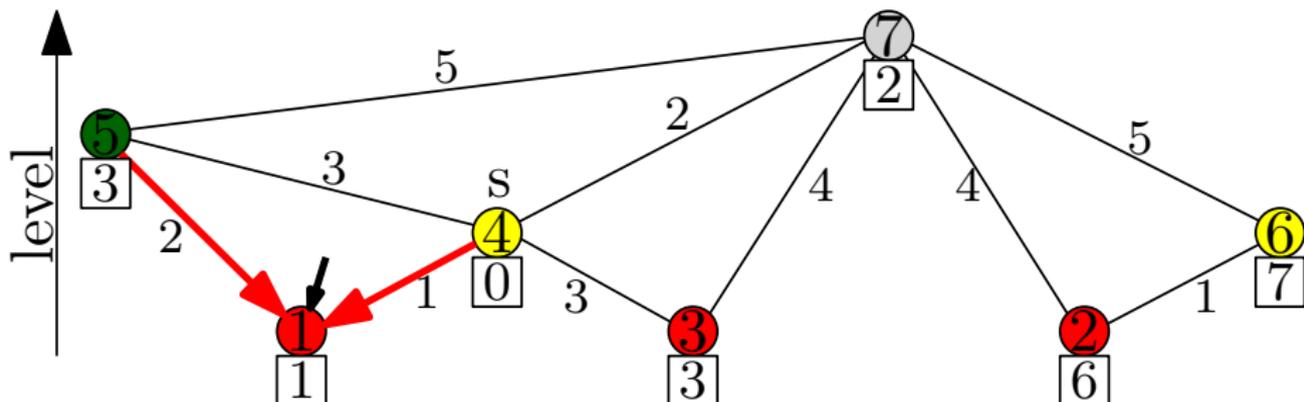
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in **inverser** Levelordnung:
 - checke **eingehende** Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
 - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



Neuer Anfragealgorithmus

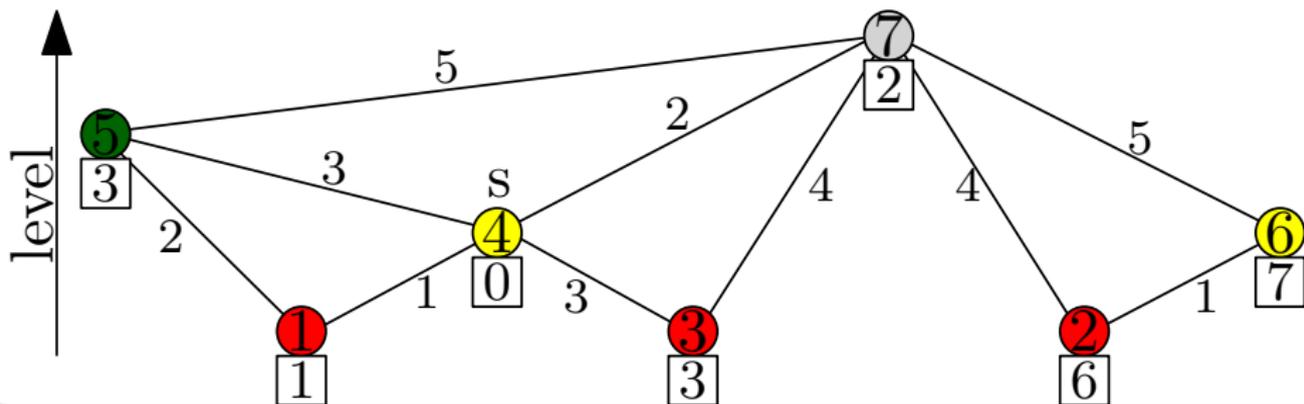
One-to-all-Suche von s :

- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in **inverser** Levelordnung:
 - checke **eingehende** Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
 - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$



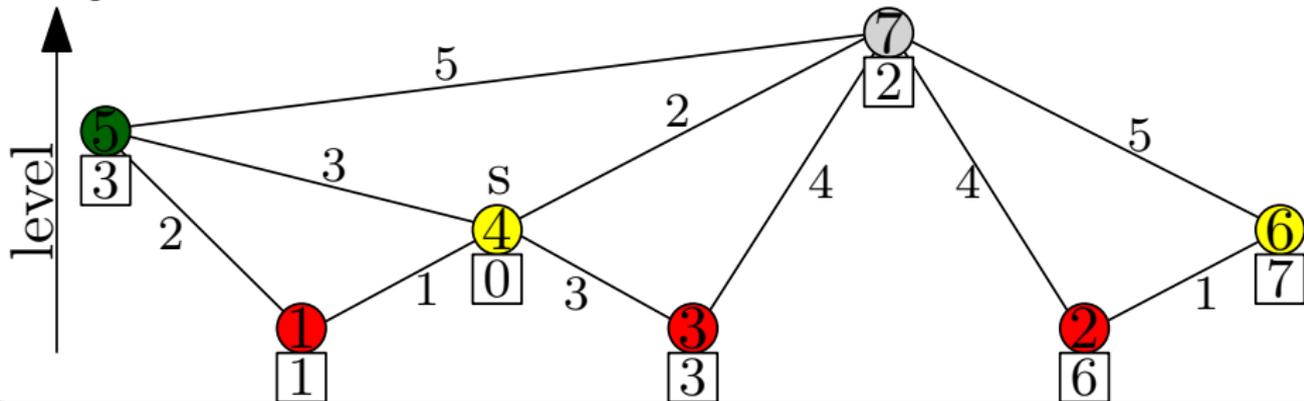
One-to-all-Suche von s :

- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in **inverser** Levelordnung:
 - checke **eingehende** Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
 - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$
- **top-down** Bearbeitung ohne Priority Queue (ca. 2.0 s)



One-to-all-Suche von s :

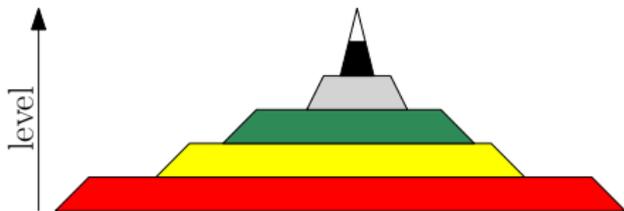
- vorwärts CH-Suche von s (≈ 0.05 ms)
- setze Distanzen d für alle erreichten Knoten
- bearbeite alle Knoten u in **inverser** Levelordnung:
 - checke **eingehende** Kanten (v, u) mit $lev(v) > lev(u)$
 - setze $d(u) = \min\{d(u), d(v) + w(v, u)\}$
- **top-down** Bearbeitung ohne Priority Queue (ca. 2.0 s)
- genauso schnell wie BFS. Warum das Ganze?



Analyse

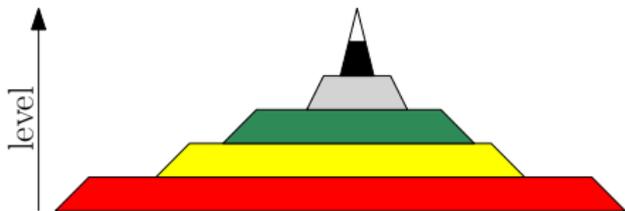
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals



Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**

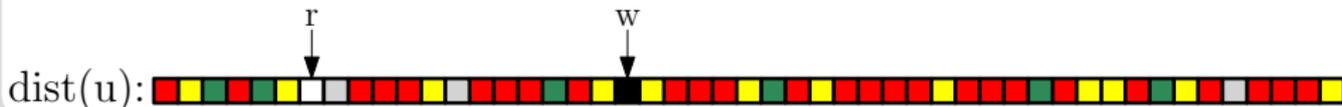
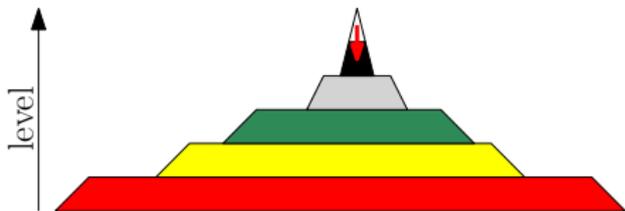


$\text{dist}(u)$: 

Analyse

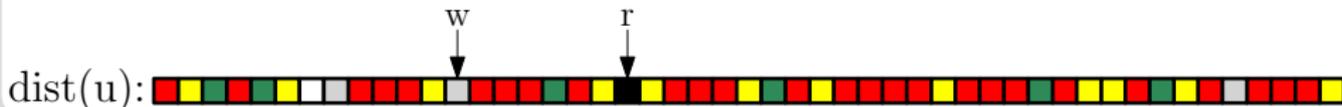
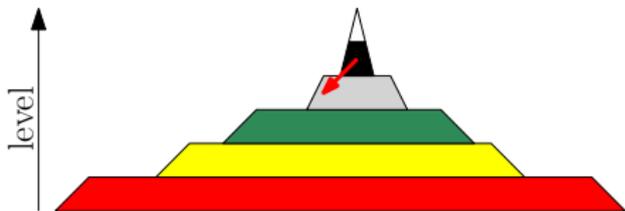
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**



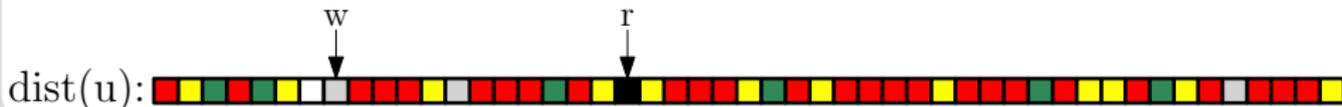
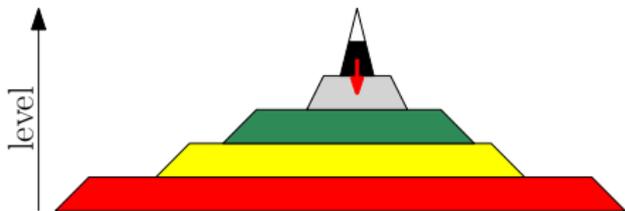
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**



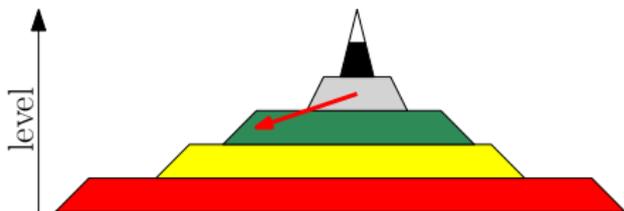
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**



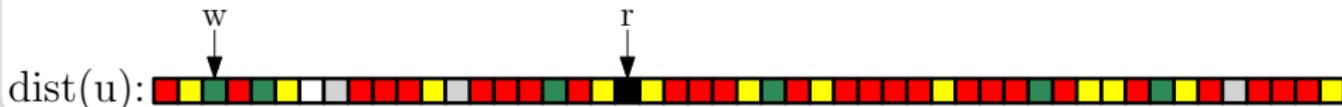
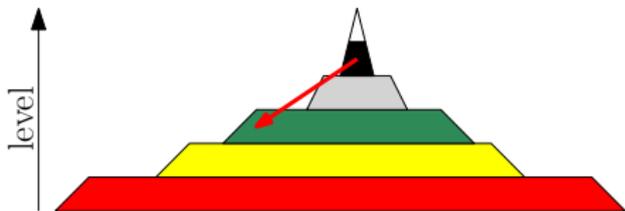
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**



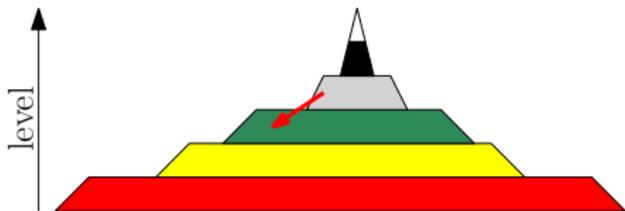
Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**



Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**
- Zugriffsmuster sind **unabhängig** von s



Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**
- Zugriffsmuster sind **unabhängig** von s

Idee:

- speichere G_{\uparrow} und G_{\downarrow} separat
 - **Umordnung** der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level
- ⇒ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem **sequenziellen Sweep**

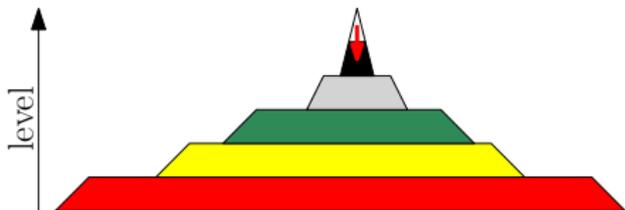


Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**
- Zugriffsmuster sind **unabhängig** von s

Idee:

- speichere G_{\uparrow} und G_{\downarrow} separat
 - **Umordnung** der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level
- ⇒ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem **sequenziellen Sweep**

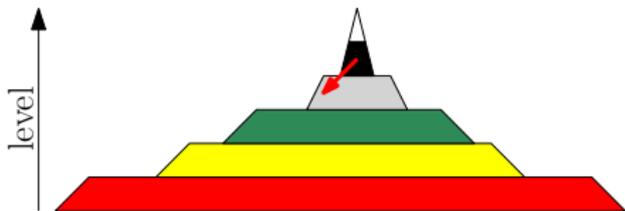


Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**
- Zugriffsmuster sind **unabhängig** von s

Idee:

- speichere G_{\uparrow} und G_{\downarrow} separat
 - **Umordnung** der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level
- ⇒ lesen der Kanten
und schreiben der Distanzen
wird zu einem **sequenziellen Sweep**

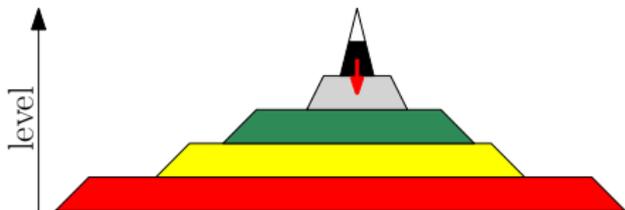


Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**
- Zugriffsmuster sind **unabhängig** von s

Idee:

- speichere G_{\uparrow} und G_{\downarrow} separat
 - **Umordnung** der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level
- ⇒ lesen der Kanten
und schreiben der Distanzen
wird zu einem **sequenziellen Sweep**



Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**
- Zugriffsmuster sind **unabhängig** von s

Idee:

- speichere G_{\uparrow} und G_{\downarrow} separat
 - **Umordnung** der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level
- ⇒ lesen der Kanten
und schreiben der Distanzen
wird zu einem **sequenziellen Sweep**

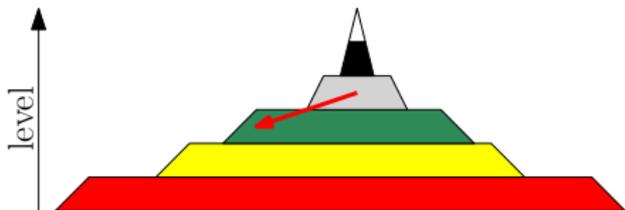


Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**
- Zugriffsmuster sind **unabhängig** von s

Idee:

- speichere G_{\uparrow} und G_{\downarrow} separat
 - **Umordnung** der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level
- ⇒ lesen der Kanten
und schreiben der Distanzen
wird zu einem **sequenziellen Sweep**

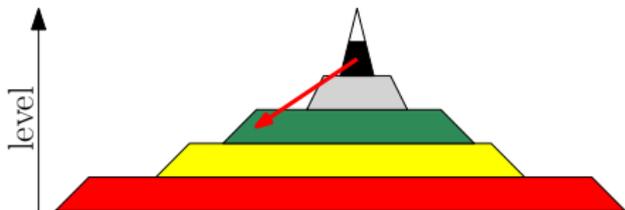


Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**
- Zugriffsmuster sind **unabhängig** von s

Idee:

- speichere G_{\uparrow} und G_{\downarrow} separat
 - **Umordnung** der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level
- ⇒ lesen der Kanten
und schreiben der Distanzen
wird zu einem **sequenziellen Sweep**

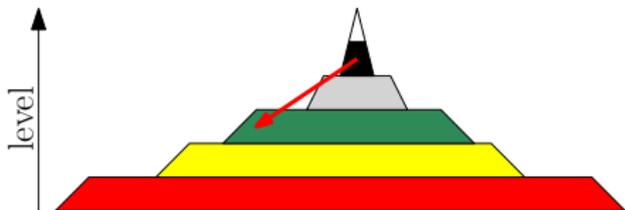


Beobachtung:

- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**
- Zugriffsmuster sind **unabhängig** von s

Idee:

- speichere G_{\uparrow} und G_{\downarrow} separat
 - **Umordnung** der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level
- ⇒ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem **sequenziellen Sweep**
- ⇒ 172 ms pro Baum

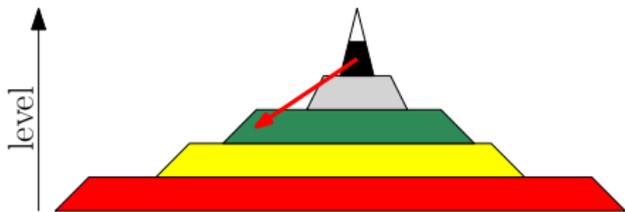


Beobachtung:

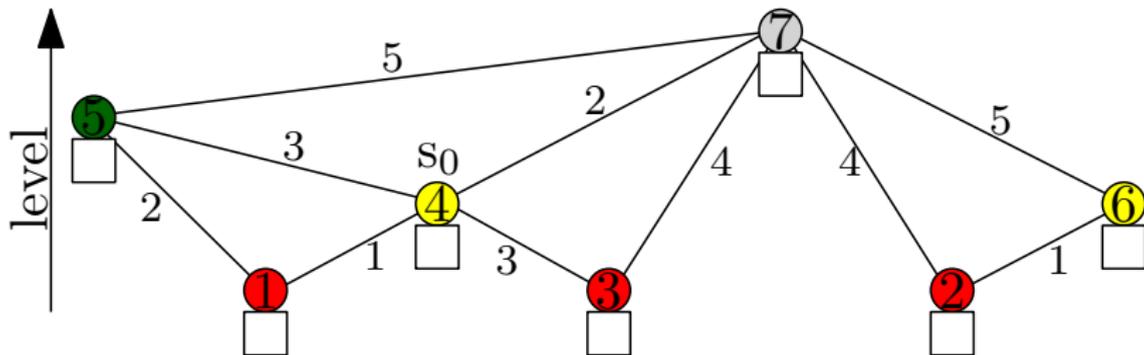
- top-down Prozess ist der Flaschenhals
- Zugriff auf die Daten ist immer noch **ineffizient**
- Zugriffsmuster sind **unabhängig** von s

Idee:

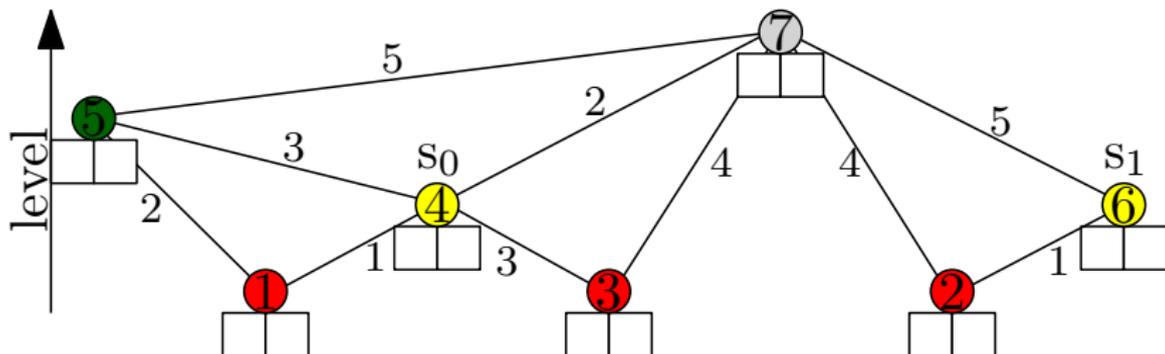
- speichere G_{\uparrow} und G_{\downarrow} separat
 - **Umordnung** der Knoten, Kanten, und Distanzlabel nach Level
- ⇒ lesen der Kanten und schreiben der Distanzen wird zu einem **sequenziellen Sweep**
- ⇒ 172 ms pro Baum
- aber lesen der Distanzen immer noch **ineffizient**



Szenario: Multiple Startknoten

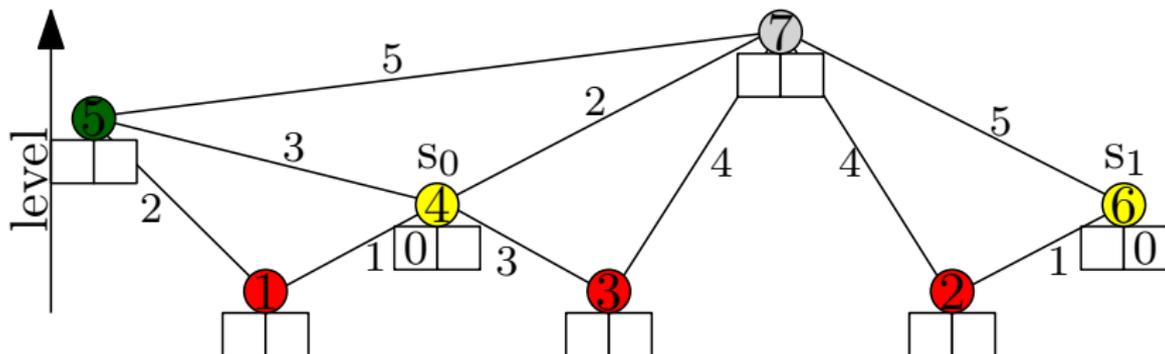


Szenario: Multiple Startknoten



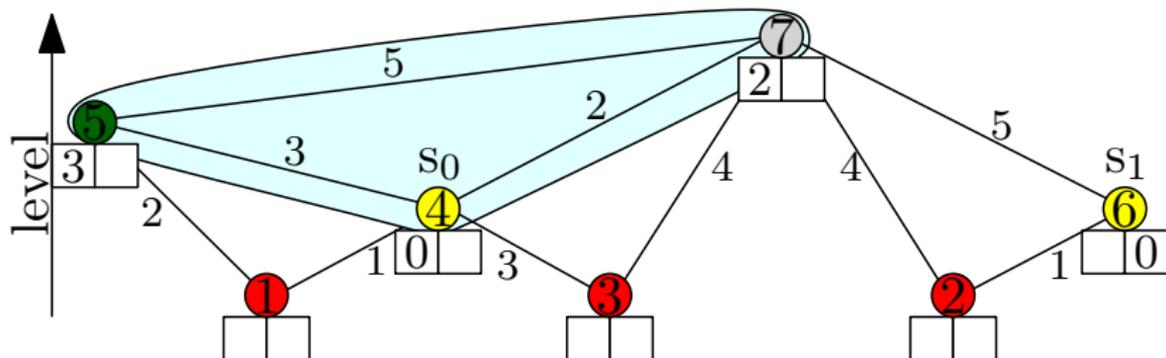
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen



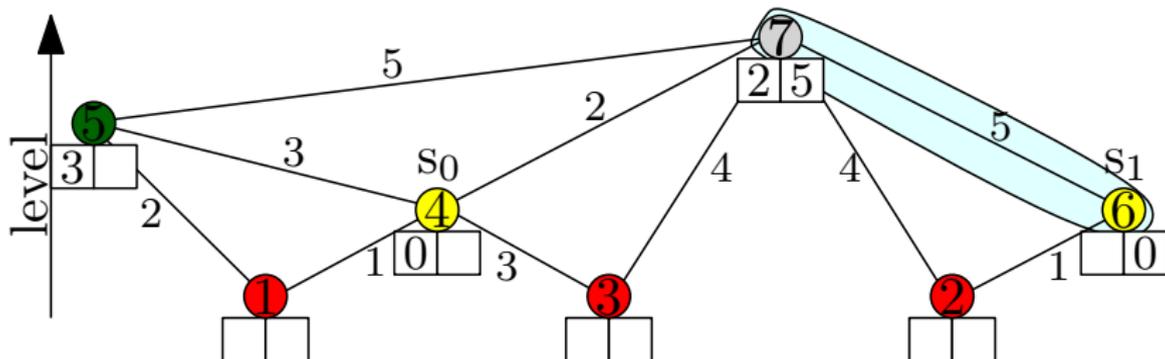
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen



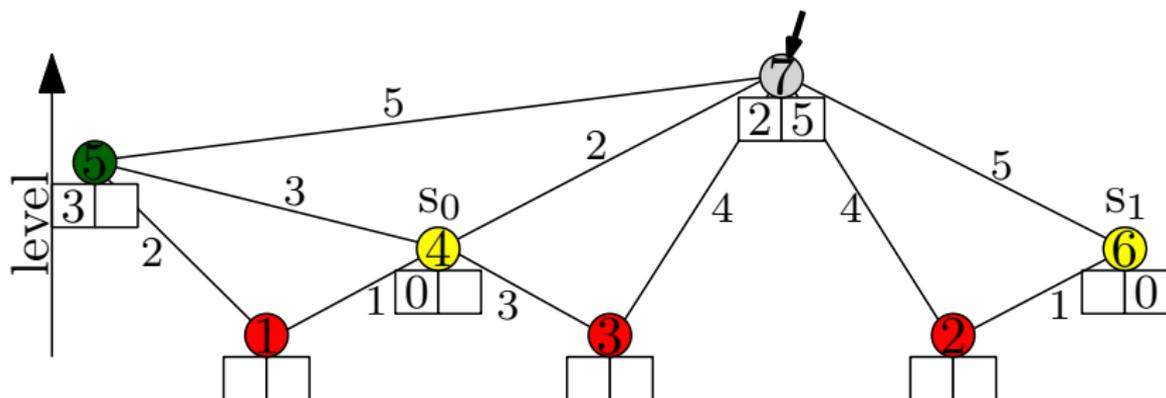
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen



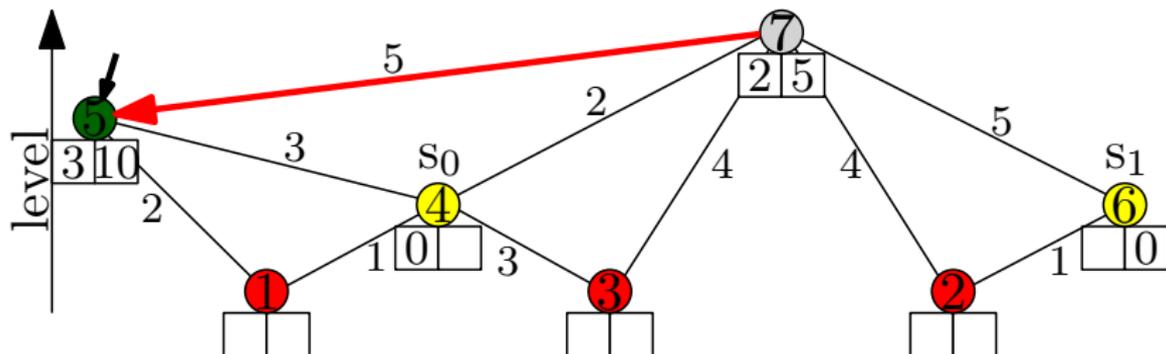
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



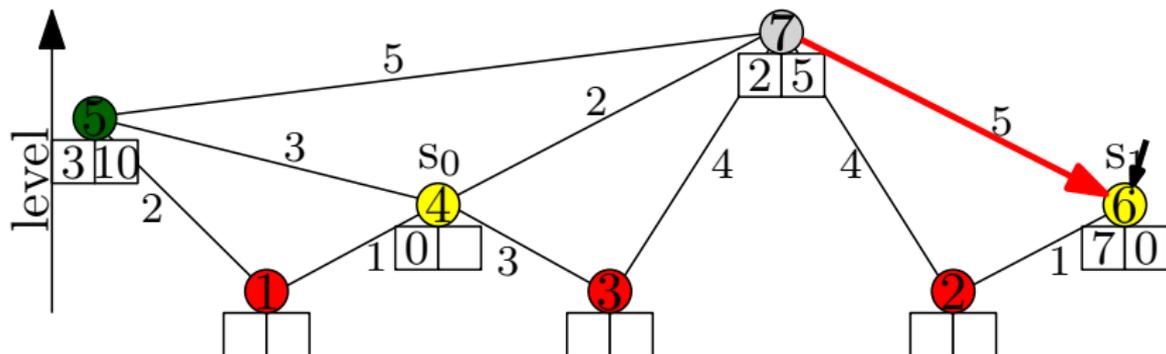
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



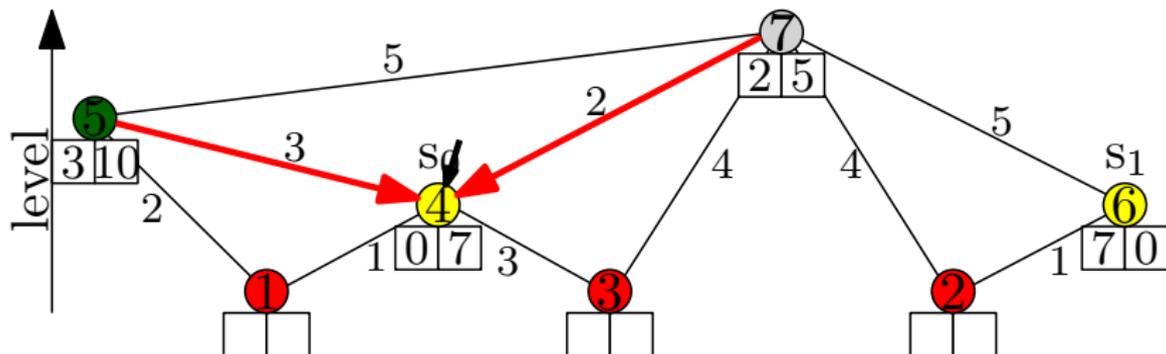
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



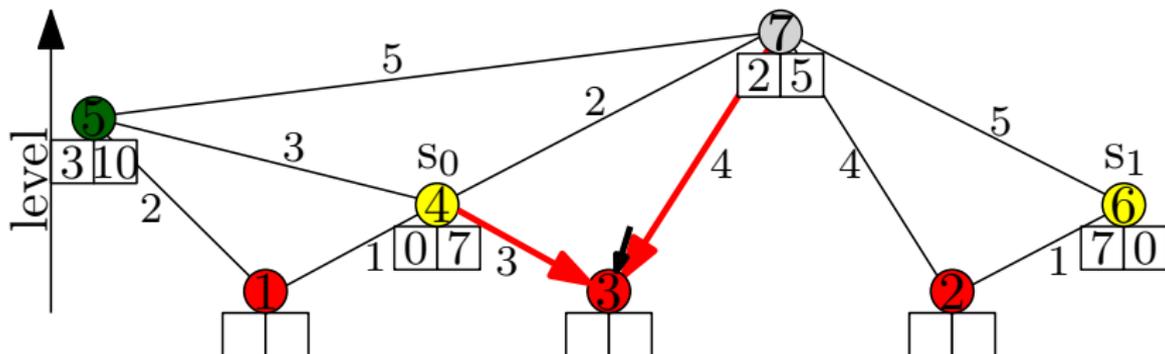
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



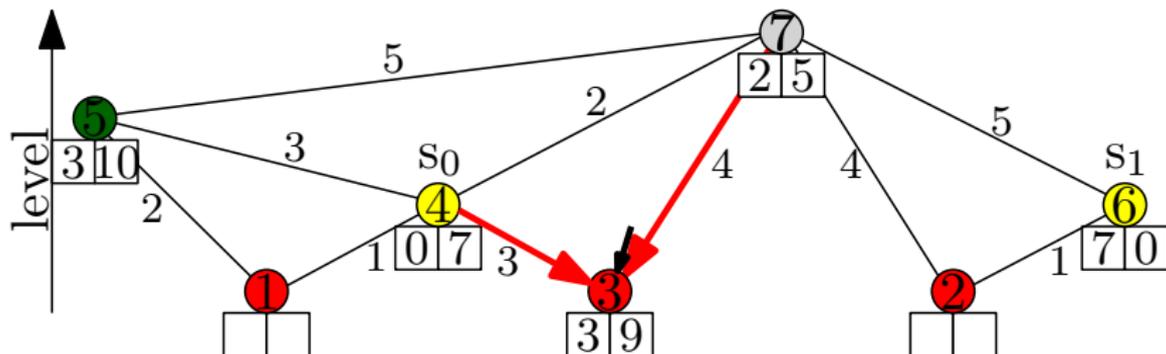
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



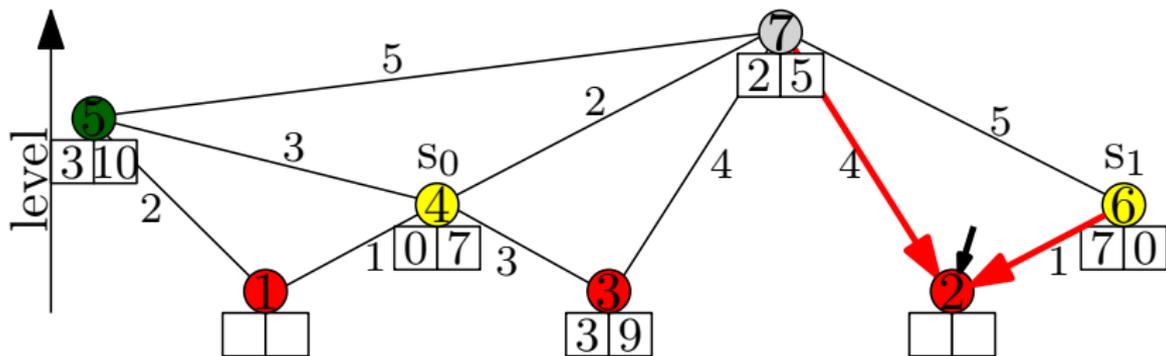
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



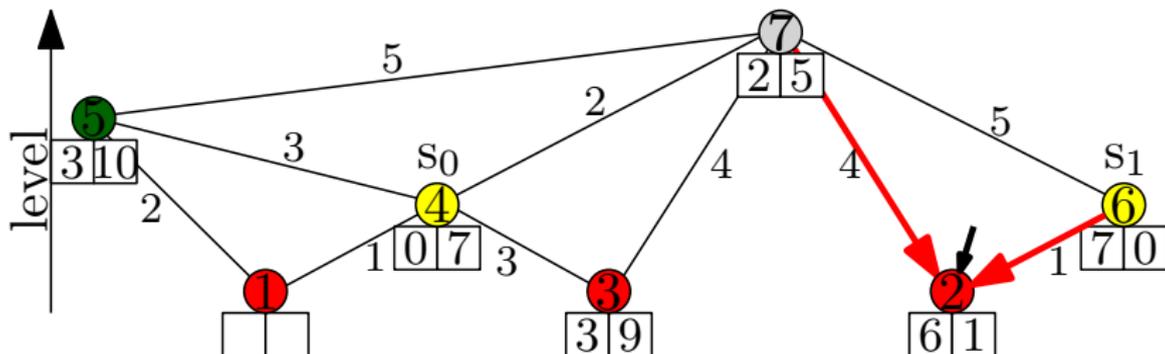
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten



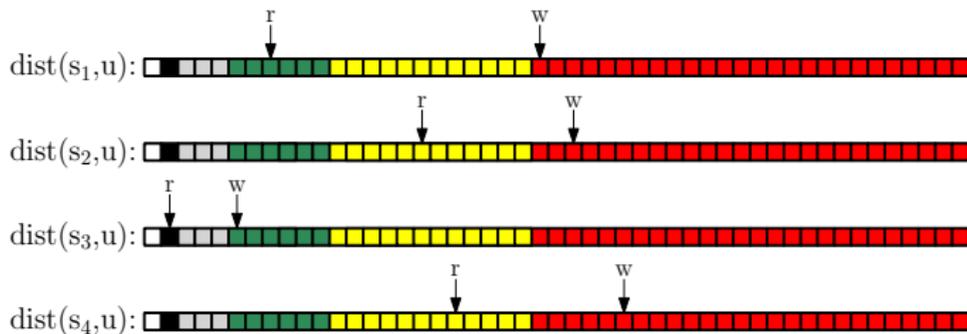
Szenario: Multiple Startknoten

- k Vorwärtssuchen
- ein sweep (update aller k Werte)
- speicher Distanzlabel pro Knoten
- Vorteil: Mehr Daten pro Lesezugriff
- 96.8 ms pro Baum ($k = 16$)

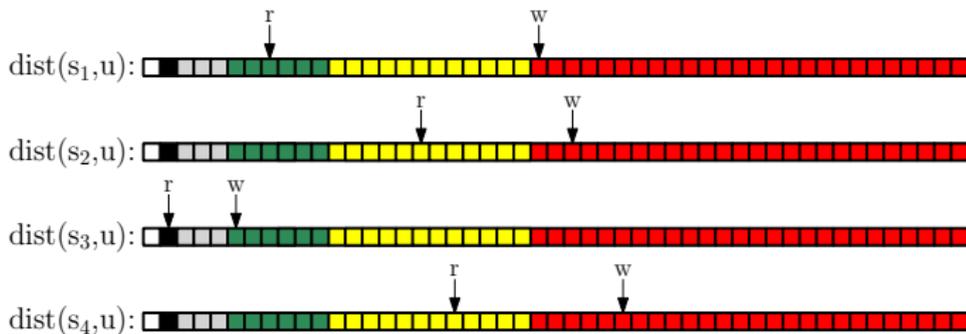


- Bei mehreren Bäumen: PHAST-Operationen können mit SSE umgesetzt werden
- scanne 4 Distanzlabel auf einmal
- 37.1 ms pro Baum ($k = 16$)

- Jeder Thread arbeitet unterschiedliche Startknoten ab



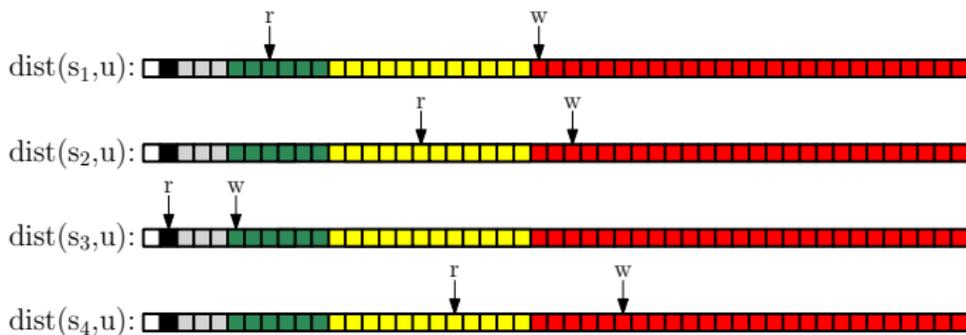
- Jeder Thread arbeitet unterschiedliche Startknoten ab



Ergebnisse:

- 16 Startknoten pro Sweep (updates via SSE)
- multi-core nach Startknoten \Rightarrow 64 Startknoten parallel (4 cores)
- 18.8 ms per Baum

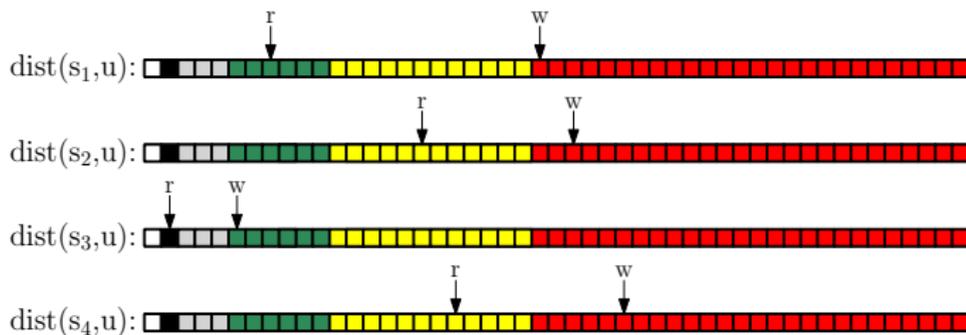
- Jeder Thread arbeitet unterschiedliche Startknoten ab



Ergebnisse:

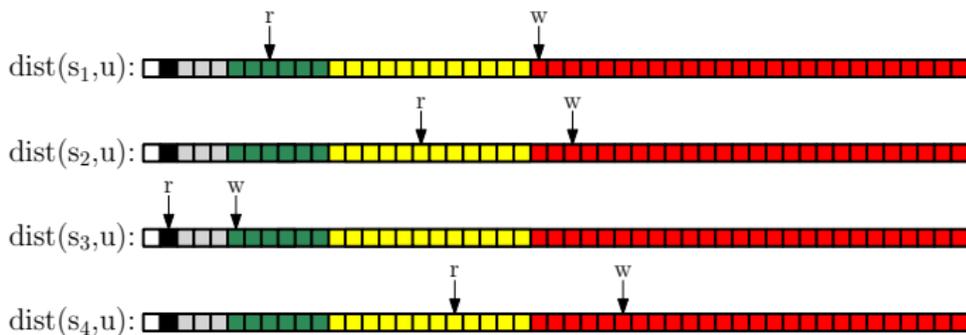
- 16 Startknoten pro Sweep (updates via SSE)
- multi-core nach Startknoten \Rightarrow 64 Startknoten parallel (4 cores)
- 18.8 ms per Baum
- Warum kein perfekter Speedup?

- Jeder Thread arbeitet unterschiedliche Startknoten ab



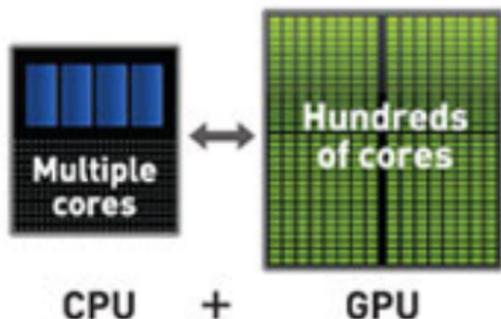
- 16 Startknoten pro Sweep (updates via SSE)
- multi-core nach Startknoten \Rightarrow 64 Startknoten parallel (4 cores)
- 18.8 ms per Baum
- Warum kein perfekter Speedup?
- lower bound tests zeigen: nah an Speicherbandbreite

- Jeder Thread arbeitet unterschiedliche Startknoten ab



Ergebnisse:

- 16 Startknoten pro Sweep (updates via SSE)
- multi-core nach Startknoten \Rightarrow 64 Startknoten parallel (4 cores)
- 18.8 ms per Baum
- Warum kein perfekter Speedup?
- lower bound tests zeigen: nah an Speicherbandbreite
- Kann eine GPU helfen?



Intel Xeon X5680:

- 3.33 GHz, oft ≥ 10 GB RAM
- 32 GB/s Speicherbandbreite
- 6 Kerne
- SIMD/SSE mit 4 floats/ints per Vektor

NVIDIA GTX 580:

- 772 MHz, 1.5 GB RAM
- 192 GB/s Speicherbandbreite
- 16 Kerne, 32 parallele Threads pro Kern
⇒ 512 parallele Threads
- eingeschränkte Berechnungen

GPHAST - Ideen

Beobachtungen:

- Aufwärtsuche ist schnell
- Flaschenhals ist der lineare Sweep
- Speicherbandbreite das Problem

Beobachtungen:

- Aufwertsuche ist schnell
- Flaschenhals ist der lineare Sweep
- Speicherbandbreite das Problem

Idee:

- speicher CH und Distanzarray auf der GPU
- Aufwärtssuche auf der CPU
- kopiere besuchte Knoten zur GPU (weniger als 2 kB)
- **Wichtig:** Nur die besuchten kopieren, nicht alle
- linearen Sweep auf der GPU

Beobachtungen:

- Aufwertsuche ist schnell
- Flaschenhals ist der lineare Sweep
- Speicherbandbreite das Problem

Idee:

- speicher CH und Distanzarray auf der GPU
- Aufwärtssuche auf der CPU
- kopiere besuchte Knoten zur GPU (weniger als 2 kB)
- **Wichtig:** Nur die besuchten kopieren, nicht alle
- linearen Sweep auf der GPU

Problem:

- **nicht genug Speicher** auf GPU, um Tausende von Bäumen parallel zu bearbeiten
- wir müssen eine einzelne Baumberechnung parallelisieren

Beobachtung:

- beim Scannen von Level i :
 - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
 - Schreiben von Distanzlabeln in Level i , Lesen von Level $> i$
 - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level- i Knoten ist **unabhängig** von anderen Level- i Knoten

W
↓



Beobachtung:

- beim Scannen von Level i :
 - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
 - Schreiben von Distanzlabeln in Level i , Lesen von Level $> i$
 - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level- i Knoten ist **unabhängig** von anderen Level- i Knoten



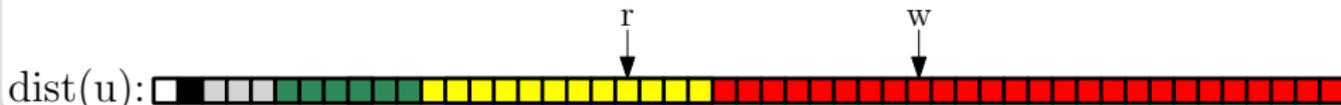
Beobachtung:

- beim Scannen von Level i :
 - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
 - Schreiben von Distanzlabeln in Level i , Lesen von Level $> i$
 - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level- i Knoten ist **unabhängig** von anderen Level- i Knoten



Beobachtung:

- beim Scannen von Level i :
 - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
 - Schreiben von Distanzlabeln in Level i , Lesen von Level $> i$
 - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level- i Knoten ist **unabhängig** von anderen Level- i Knoten



Beobachtung:

- beim Scannen von Level i :
 - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
 - Schreiben von Distanzlabeln in Level i , Lesen von Level $> i$
 - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level- i Knoten ist **unabhängig** von anderen Level- i Knoten

Idee:

- scanne alle Knoten auf Level i **parallel**
- Synchronization nach jedem Level
- ein Thread pro Knoten

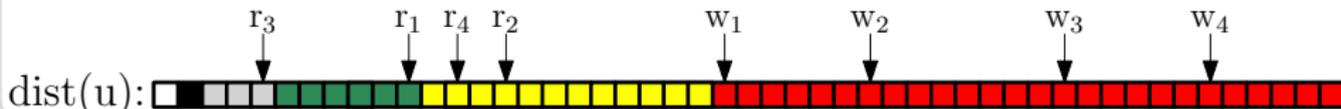


Beobachtung:

- beim Scannen von Level i :
 - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
 - Schreiben von Distanzlabeln in Level i , Lesen von Level $> i$
 - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level- i Knoten ist **unabhängig** von anderen Level- i Knoten

Idee:

- scanne alle Knoten auf Level i **parallel**
- Synchronization nach jedem Level
- ein Thread pro Knoten



Beobachtung:

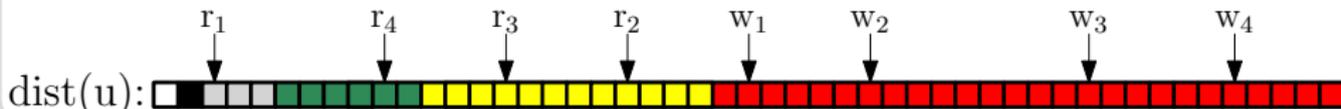
- beim Scannen von Level i :
 - nur eingehende Kanten von level $> i$ wichtig
 - Schreiben von Distanzlabeln in Level i , Lesen von Level $> i$
 - Distanzlabel für Level $> i$ sind korrekt
- scannen eines Level- i Knoten ist **unabhängig** von anderen Level- i Knoten

Idee:

- scanne alle Knoten auf Level i **parallel**
- Synchronisation nach jedem Level
- ein Thread pro Knoten

results:

- 5.5 ms auf NVIDIA GTX 580
- Beschleunigung von 511 gegenüber Dijkstra
- (mehrere Bäume: 2.2 ms)



PHAST auf 4-Kern Workstation (Core-i7 920)

sources/ sweep	time per tree [ms]					
	1 core		2 cores		4 cores	
1	171.9		86.7		47.1	
4	121.8	(67.6)	61.5	(35.5)	32.5	(24.4)
8	105.5	(51.2)	53.5	(28.0)	28.3	(20.8)
16	96.8	(37.1)	49.4	(22.1)	25.9	(18.8)

Werte in Klammern mit SSE aktiviert

PHAST auf Nvidia GTX 580

trees / sweep	memory [MB]	time [ms]
1	395	5.53
2	464	3.93
4	605	3.02
8	886	2.52
16	1448	2.21

algorithm	device	Europe		USA	
		time	distance	time	distance
Dijkstra	4-core workstation	947.72	609.19	1269.12	947.75
	12-core server	288.81	177.58	380.40	280.17
	48-core server	168.49	108.58	229.00	167.77
PHAST	4-core workstation	18.81	22.25	27.11	28.81
	12-core server	7.20	8.27	10.42	10.71
	48-core server	4.03	5.03	6.18	6.58
GPHAST	GTX 580	2.21	3.88	3.41	4.65

Beobachtung:

- Beschleunigung für Distanzmetrik geringer

All-Pairs Shortest Paths

Eingabe: Europa mit Reisezeiten

algorithm	device	time	energy [MJ]
Dijkstra	4-core workstation	197d	
	12-core server	60d	
	48-core server	35d	
PHAST	4-core workstation	94h	
	12-core server	36h	
	48-core server	20h	
GPHAST	GTX 580		

All-Pairs Shortest Paths

Eingabe: Europa mit Reisezeiten

algorithm	device	time	energy [MJ]
Dijkstra	4-core workstation	197d	
	12-core server	60d	
	48-core server	35d	
PHAST	4-core workstation	94h	
	12-core server	36h	
	48-core server	20h	
GPHAST	GTX 580	11h	

Eingabe: Europa mit Reisezeiten

algorithm	device	time	energy [MJ]
Dijkstra	4-core workstation	197d	
	12-core server	60d	
	48-core server	35d	
PHAST	4-core workstation	94h	
	12-core server	36h	
	48-core server	20h	
GPHAST	GTX 580	11h	

4-core workstation without GPU: 163 watts

4-core workstation with GPU: 375 watts

12-core server: 332 watts

48-core server: 747 watts

Eingabe: Europa mit Reisezeiten

algorithm	device	time	energy [MJ]
Dijkstra	4-core workstation	197d	2780.6
	12-core server	60d	1725.9
	48-core server	35d	2265.5
PHAST	4-core workstation	94h	55.2
	12-core server	36h	43.0
	48-core server	20h	54.2
GPHAST	GTX 580	11h	14.9

4-core workstation without GPU: 163 watts

4-core workstation with GPU: 375 watts

12-core server: 332 watts

48-core server: 747 watts

bis jetzt:

- nur Distanzen berechnet, nicht Bäume

bis jetzt:

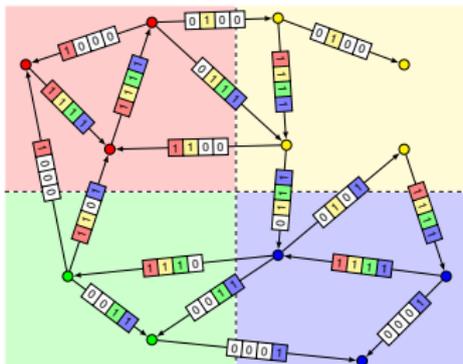
- nur Distanzen berechnet, nicht Bäume

Idee:

- Iteration über alle Kanten (1 Thread pro Kante)
- Wenn $d(v) + \text{len}(v, u) = d(u)$ dann ist v der Vorgänger von u (sofern kürzeste Wege eindeutig sind)

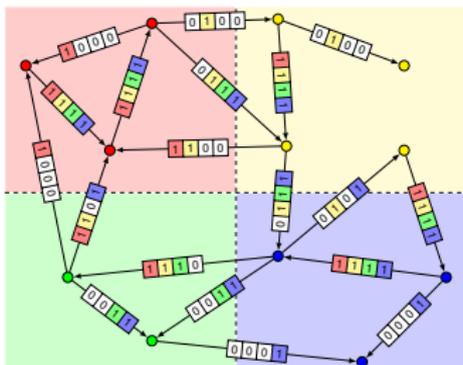
Idee:

- benutze GPHAST zum Berechnen der Bäume von den Randknoten aus



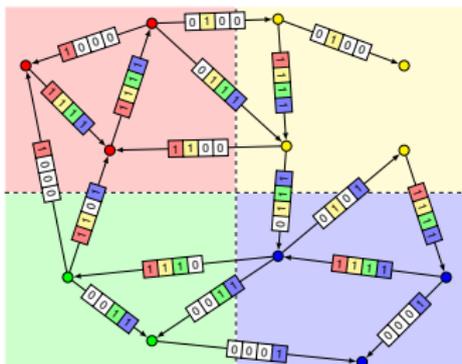
Idee:

- benutze GPHAST zum Berechnen der Bäume von den Randknoten aus
- setze Flaggen durch zusätzlichen Sweep auf GPU
Wichtig, weil alle Bäume “auf CPU kopieren” teuer ist



Idee:

- benutze GPHAST zum Berechnen der Bäume von den Randknoten aus
- setze Flaggen durch zusätzlichen Sweep auf GPU
Wichtig, weil alle Bäume “auf CPU kopieren” teuer ist
- Vorberechnung sinkt von 17 Stunden auf 3 Minuten



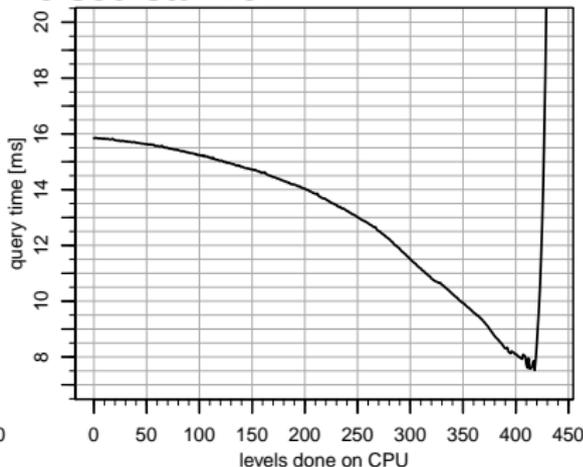
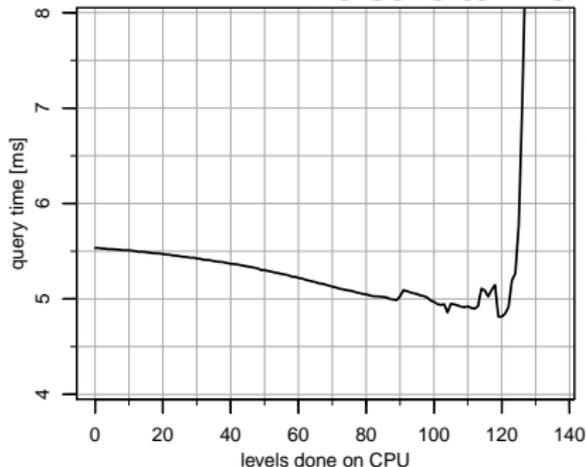
Beobachtung:

- Synchronisation des Level kostet Zeit auf der GPU ($5 \mu\text{s}$ pro Level)
- obere Level sind klein

Idee:

- beginne linearen Sweep auf CPU (bis Level k)
- kopiere Suchraum und alle Distanzlabel für Knoten oberhalb k zur GPU
- restlicher Scan auf der GPU

Reisezeiten vs. Reisedistanzen



Es lohnt sich, ein paar Level auf der CPU zu berechnen.

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten s und eine Menge T
- Ausgabe: Distanz von s zu allen $t \in T$
- Annahme: wir fixieren T und variieren s

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten s und eine Menge T
- Ausgabe: Distanz von s zu allen $t \in T$
- Annahme: wir fixieren T und variieren s

offensichtliche Lösungen:

- Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium)
 - ⇒ Performance stark abhängig von $|T|$ und Verteilung von T

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten s und eine Menge T
- Ausgabe: Distanz von s zu allen $t \in T$
- Annahme: wir fixieren T und variieren s

offensichtliche Lösungen:

- Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium)
 - ⇒ Performance stark abhängig von $|T|$ und Verteilung von T
- $|T|$ p2p Anfragen (z.B. CH)
 - ⇒ Performance stark abhängig von $|T|$

Problemdefinition:

- Eingabe: ein Knoten s und eine Menge T
- Ausgabe: Distanz von s zu allen $t \in T$
- Annahme: wir fixieren T und variieren s

offensichtliche Lösungen:

- Dijkstras Algorithmus (mit Stoppkriterium)
 - ⇒ Performance stark abhängig von $|T|$ und Verteilung von T
- $|T|$ p2p Anfragen (z.B. CH)
 - ⇒ Performance stark abhängig von $|T|$
- benutze PHAST (kein Stoppkriterium!)
 - ⇒ Overkill (vor allem für kleine T)

Erste Ideen

Vorschläge?

Definition:

- $\vec{\sigma}(s, t)$: Suchraum der Vorwärtssuche von s nach t
- $\overleftarrow{\sigma}(s, t)$ analog
- eine bidirektionale Suche ist Ziel-unabhängig, gdw.

$$\forall (s, t_1, t_2) \in V^3 : \vec{\sigma}(s, t_1) = \vec{\sigma}(s, t_2) \quad \text{und} \\ \forall (s_1, s_2, t) \in V^3 : \overleftarrow{\sigma}(s_1, t) = \overleftarrow{\sigma}(s_2, t)$$

Definition:

- $\vec{\sigma}(s, t)$: Suchraum der Vorwärtssuche von s nach t
- $\overleftarrow{\sigma}(s, t)$ analog
- eine bidirektionale Suche ist Ziel-unabhängig, gdw.

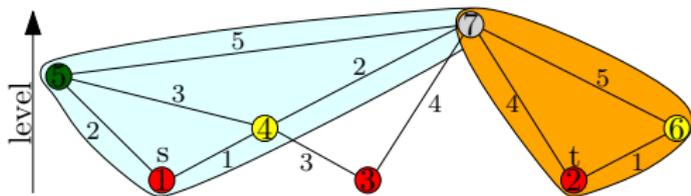
$$\forall (s, t_1, t_2) \in V^3 : \vec{\sigma}(s, t_1) = \vec{\sigma}(s, t_2) \quad \text{und} \\ \forall (s_1, s_2, t) \in V^3 : \overleftarrow{\sigma}(s_1, t) = \overleftarrow{\sigma}(s_2, t)$$

Beispiele:

- Bidirektionaler Dijkstra
- ohne Stoppkriterium, lass laufen bis Queues leer sind

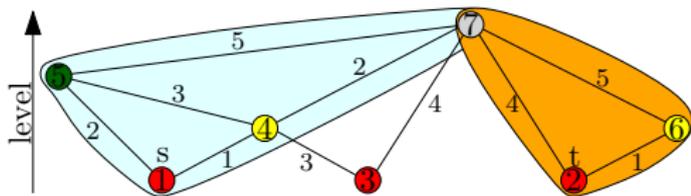
Beobachtung:

- suchen nur aufwärts
- sind nicht zielgerichtet



Beobachtung:

- suchen nur aufwärts
- sind nicht zielgerichtet

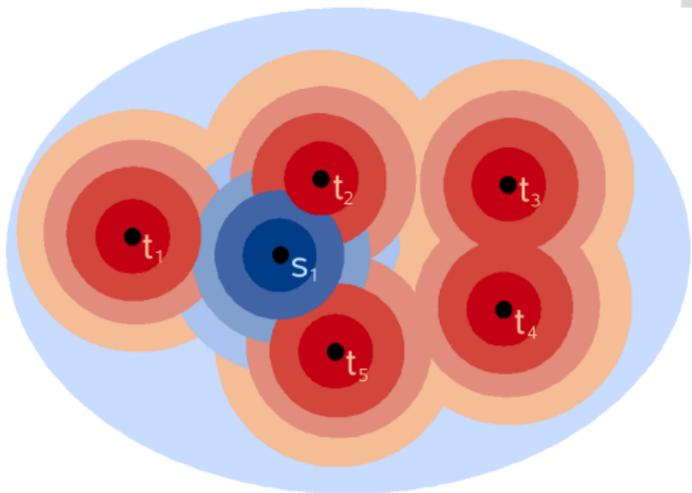


somit:

- Bidirektionaler Dijkstra
- Reach
- (Customizable) Contraction Hierarchies
- ohne Stoppkriterium, lass laufen bis Queues leer sind

Idee:

- führe $|T|$ Rückwärtssuchen aus
- speicher für jedes besuchte u Abstände zu allen $t \in T$
- verwalte temporäres Distanzarray D_T
- führe Vorwärtssuche aus
- aktualisiere Einträge in D_T



Problem:

- Verwalten der Suchräume?

während Rückwärtssuchen (target selection phase):

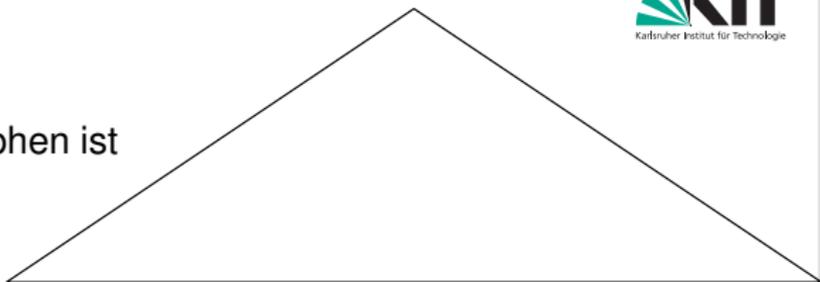
- je $t \in T$:
- starte Suche im Rückwärts-DAG, breche nicht ab
- für jedes erreichte u :
- speichere einen Bucket $\beta(u)$ mit $(t, d(u, t))$
Alternative Sichtweise: füge gewichtete Abwärtskanten zu erreichbaren Zielknoten ein

während Vorwärtssuche (query phase):

- breche nicht ab
- für jedes erreichte u :
 - scanne Bucket $\beta(u)$
 - aktualisiere Distanzarray D_T

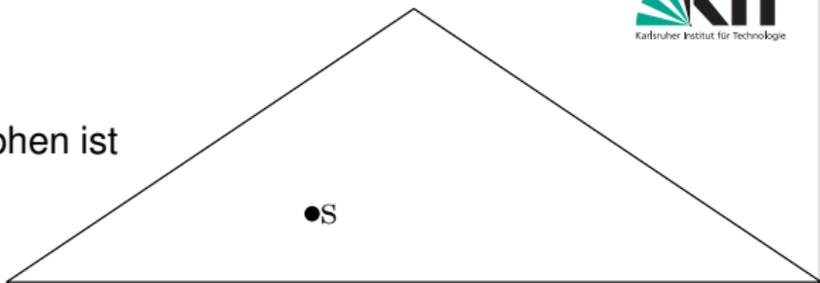
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



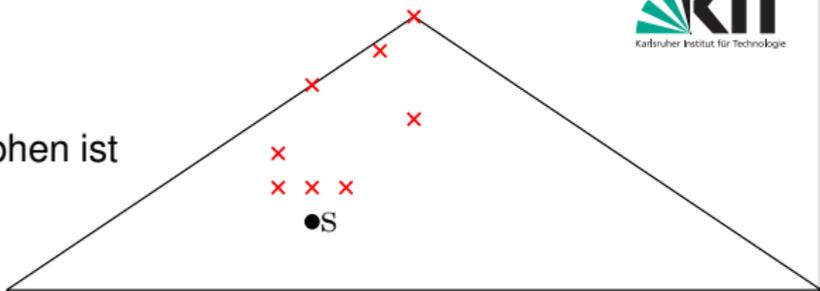
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



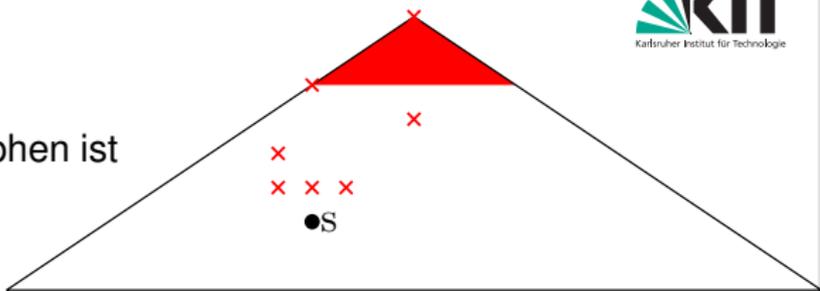
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



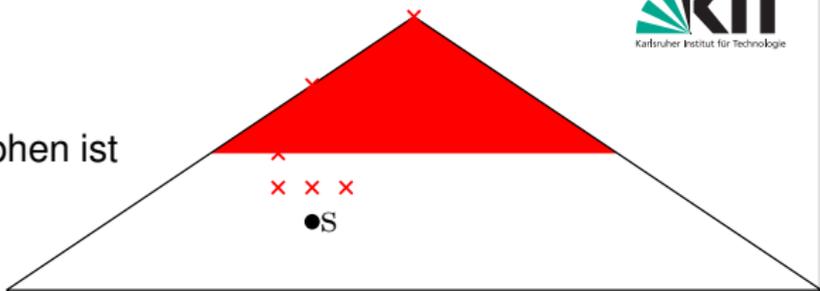
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



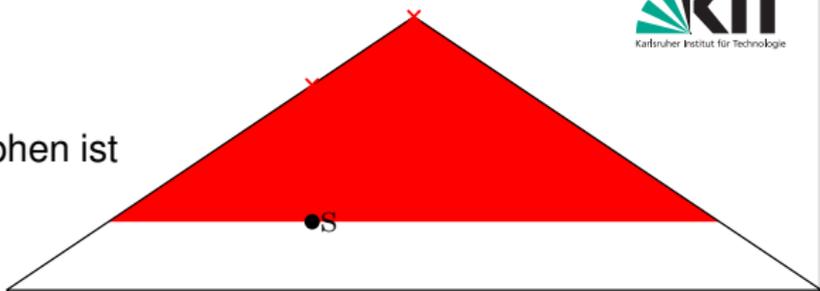
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



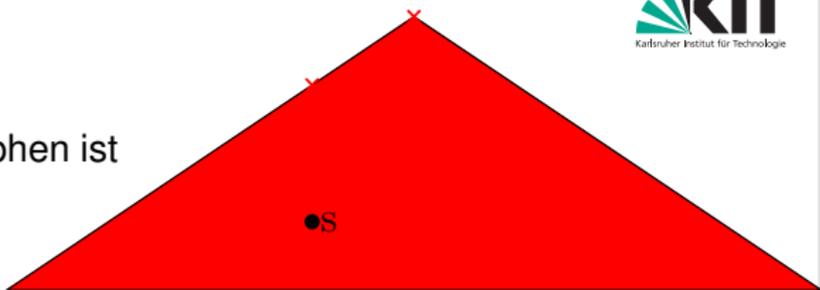
Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

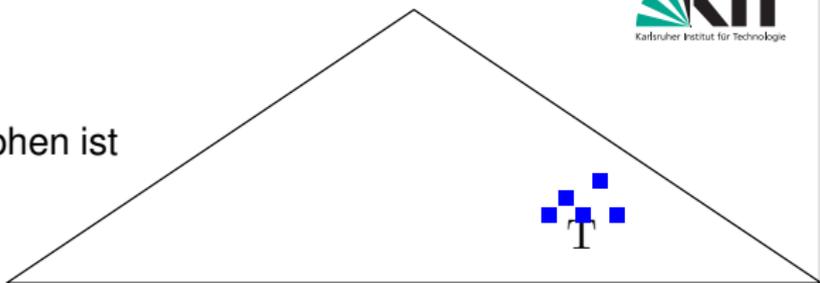


Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- **extrahiere** relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)

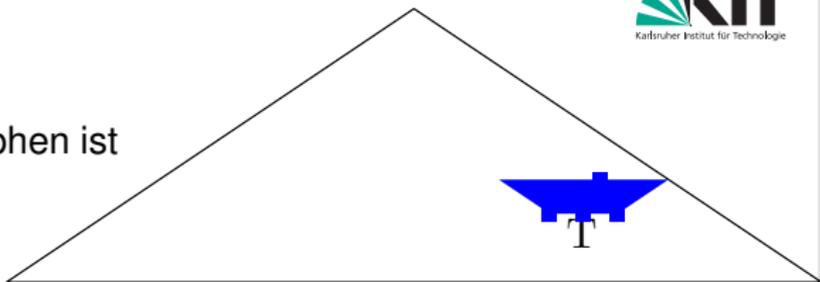


Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- **extrahiere** relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)

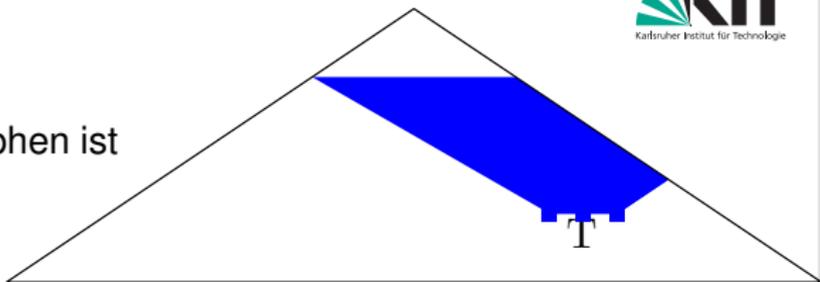


Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- **extrahiere** relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)

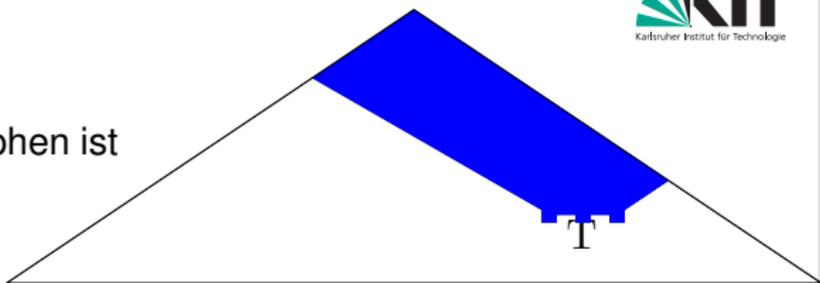


Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- **extrahiere** relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)

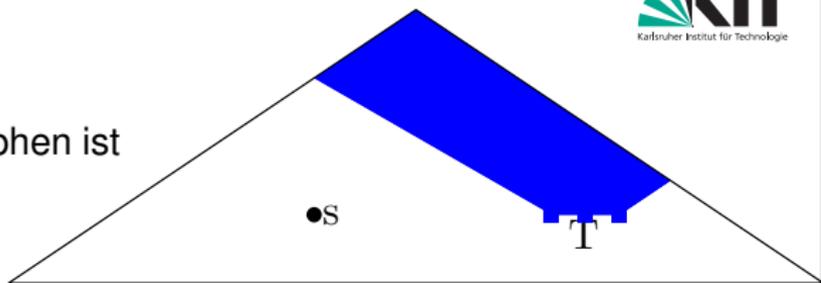


Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- **extrahiere** relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen

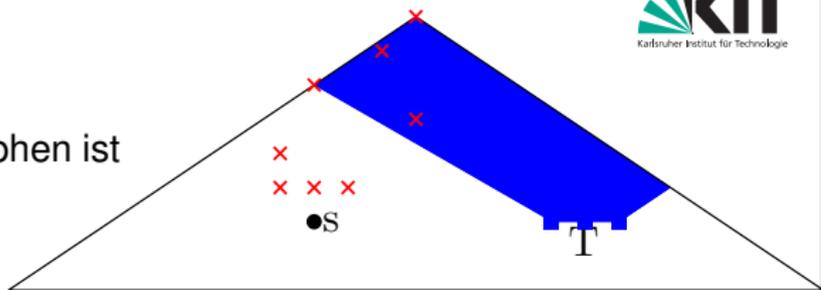


Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- **extrahiere** relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen

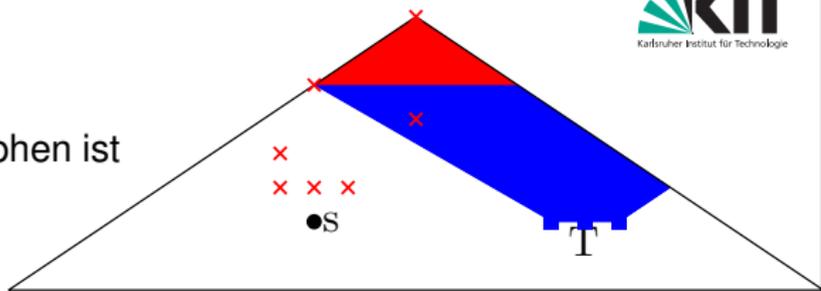


Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- **extrahiere** relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen
- Sweep auf extrahiertem Graphen

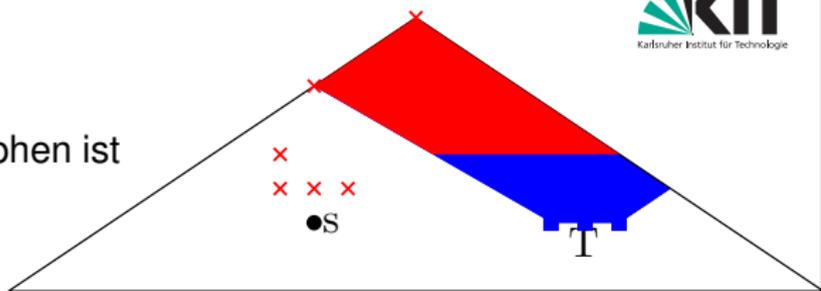


Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

Idee:

- **extrahiere** relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen
- Sweep auf extrahiertem Graphen

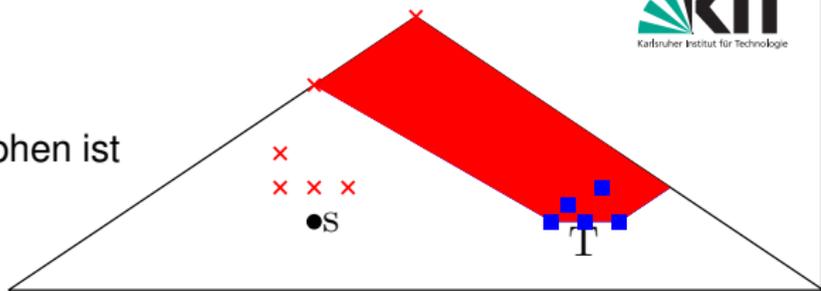


Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals

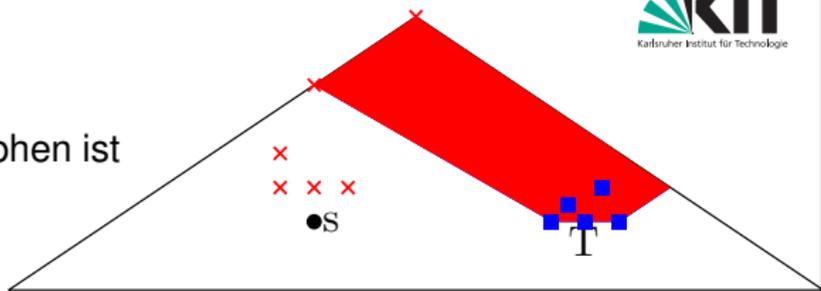
Idee:

- **extrahiere** relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen
- Sweep auf extrahiertem Graphen



Beobachtung PHAST:

- Sweep über den Graphen ist der Flaschenhals



Idee:

- **extrahiere** relevanten Teil des Graphen (Zielselektion)
- Aufwärtssuche im vollen Graphen
- Sweep auf extrahiertem Graphen

⇒

- Startknoten kann im ganzen Graphen liegen
- Größe des extrahierten Graphen hängt von Verteilung und Anzahl T ab
- kann wie PHAST parallelisiert werden
- GPU-Implementierung möglich

Problem:

Je nach Szenario liegen die Ziele in einer kleinen Region oder sind über weite Teile des Graphen verteilt.

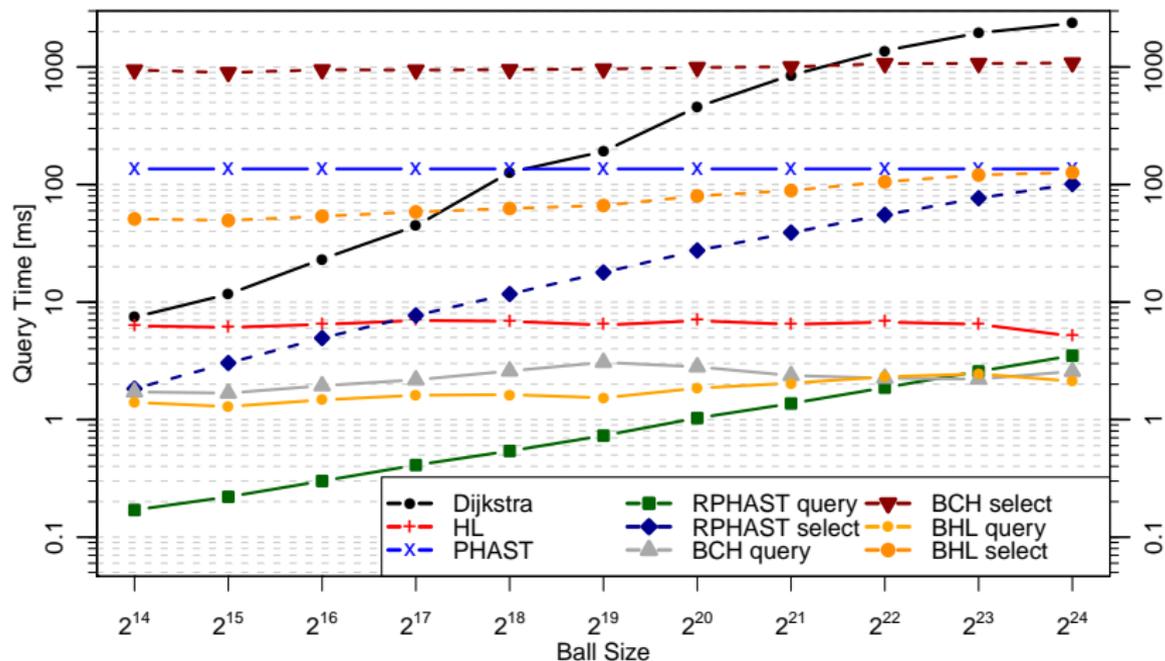
Setup:

- starte Dijkstra von zufälligem Knoten c
- brich nach B besuchten Knoten ab (Ballsize)
- wähle zufällige Zielknotenmenge $T \subseteq B$

Vergleiche Performance von Bucket CH (BCH), Bucket HL (BHL), RPHAST

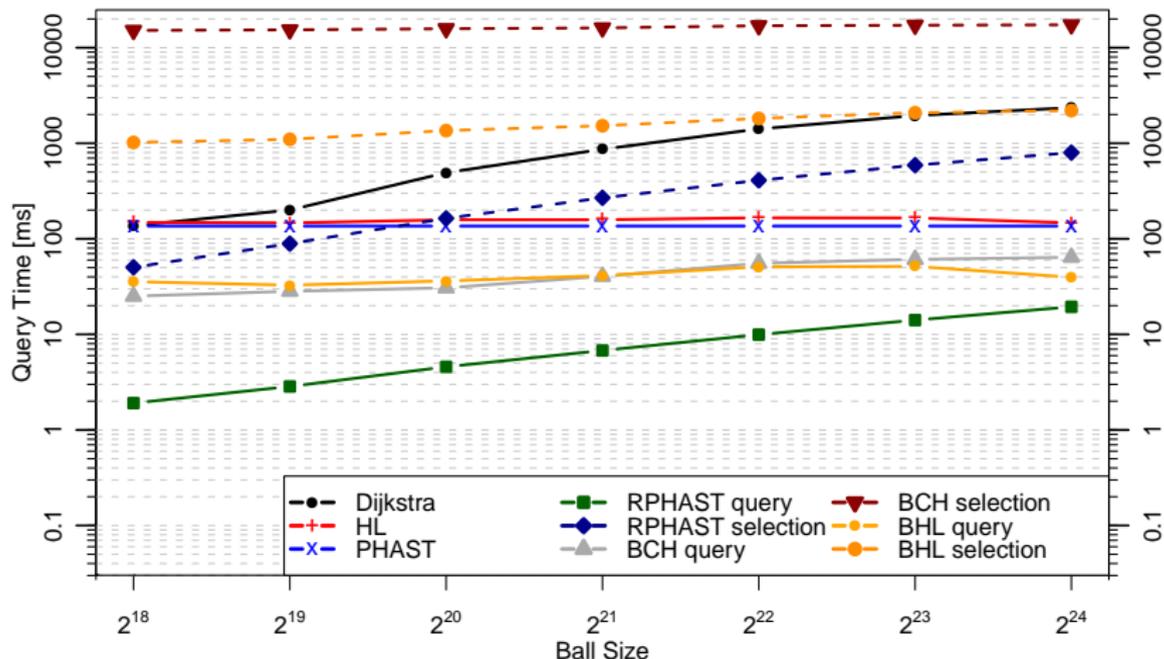
Experimente I

input: Westeuropa (18M Knoten), $|T| = 2^{14}$



Experimente II

input: Westeuropa (18M Knoten), $|T| = 2^{18}$



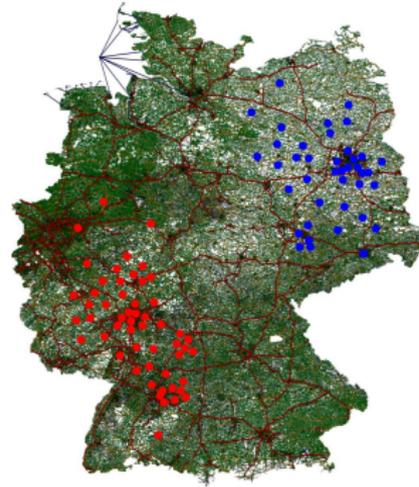
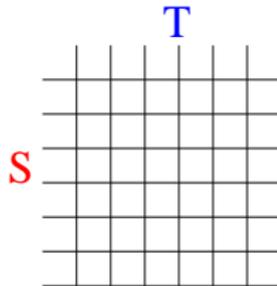
Many-to-Many Kürzeste Wege

Gegeben:

- Graph
- Knotenmengen $S, T \in V$

Gesucht:

- Distanzmatrix D



Many-to-Many Kürzeste Wege

Gegeben:

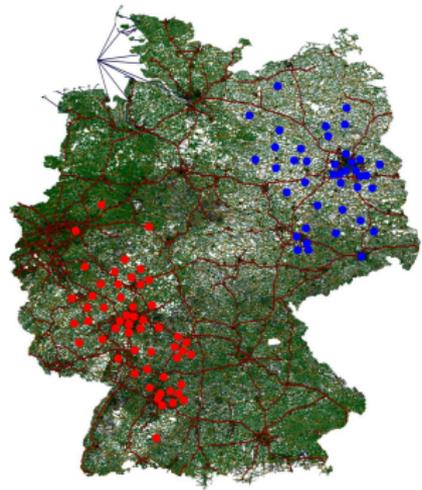
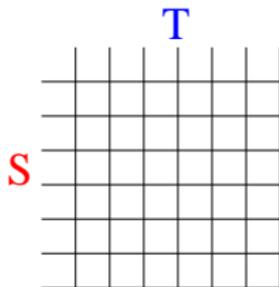
- Graph
- Knotenmengen $S, T \in V$

Gesucht:

- Distanzmatrix D

Anwendungen:

- vehicle routing
- traveling salesman



Many-to-Many Kürzeste Wege

Gegeben:

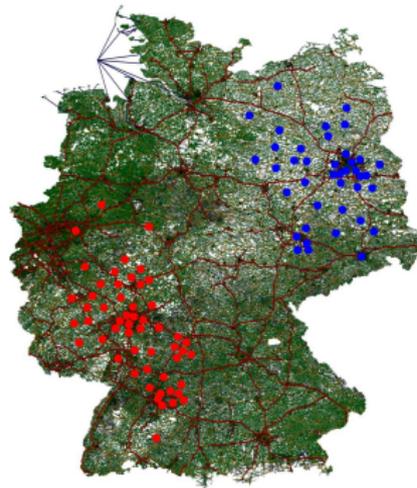
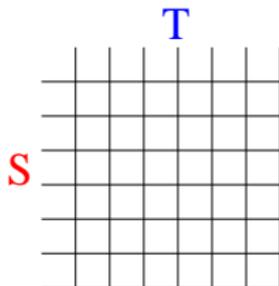
- Graph
- Knotenmengen $S, T \in V$

Gesucht:

- Distanzmatrix D

Anwendungen:

- vehicle routing
- traveling salesman

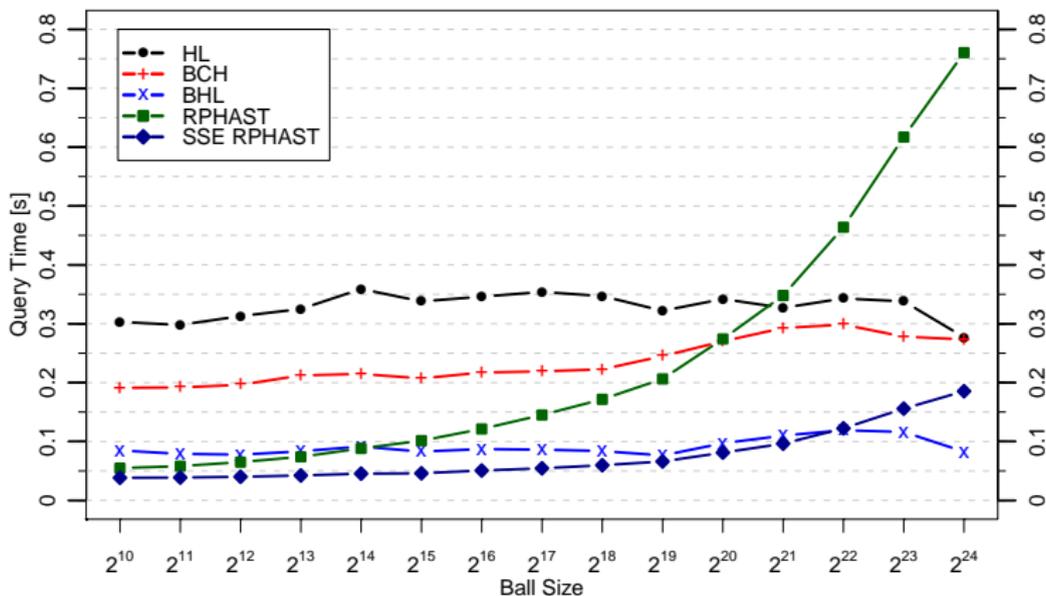


Lösung:

- $|S|$ one-to-many Anfragen
- speichere Distanzen in der Tabelle
- RPHAST kann multiples Setup (SSE) nutzen

Experimente I

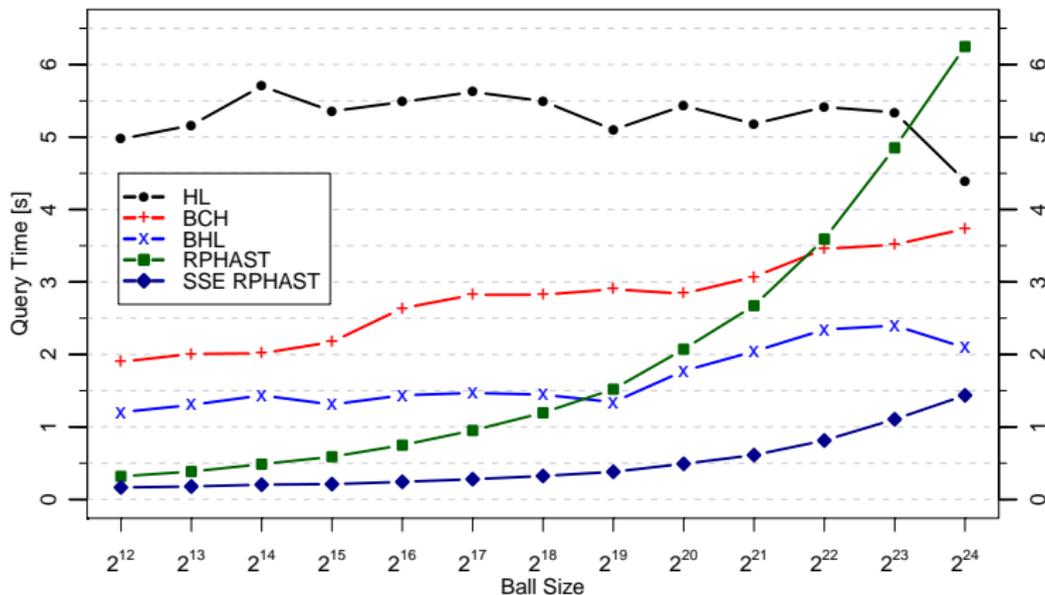
input: Westeuropa (18M Knoten), $|S| = |T| = 2^{10}$



Beobachtung: alle Techniken unter einer Sekunde

Experimente II

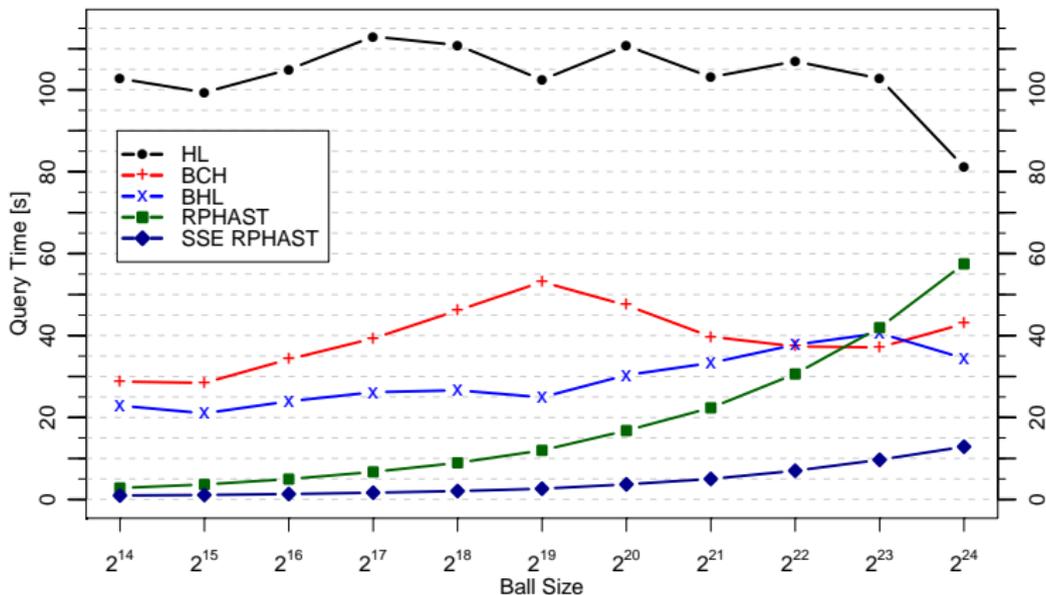
input: Westeuropa (18M Knoten), $|S| = |T| = 2^{12}$



Beobachtung: SSE PHAST am schnellsten

Experimente III

input: Westeuropa (18M Knoten), $|S| = |T| = 2^{14}$



Beobachtung: SSE PHAST am schnellsten

Mittwoch, 27.5.2020, ist keine Vorlesung

Montag, 1.6.2020, ist keine Vorlesung

Mittwoch, 3.6.2019, ist keine Vorlesung



Ittai Abraham, Daniel Delling, Amos Fiat, Andrew V. Goldberg, and Renato F. Werneck.

HLDB: Location-Based Services in Databases.

In *Proceedings of the 20th ACM SIGSPATIAL International Symposium on Advances in Geographic Information Systems (GIS'12)*, pages 339–348. ACM Press, 2012.

Best Paper Award.



Richard Bellman.

On a Routing Problem.

Quarterly of Applied Mathematics, 16:87–90, 1958.



George B. Dantzig.

Linear Programming and Extensions.

Princeton University Press, 1962.



Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Andreas Nowatzyk, and Renato F. Werneck.

PHAST: Hardware-accelerated shortest path trees.

Journal of Parallel and Distributed Computing, 73(7):940–952, 2013.



Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, and Renato F. Werneck.
Faster Batched Shortest Paths in Road Networks.

In Proceedings of the 11th Workshop on Algorithmic Approaches for Transportation Modeling, Optimization, and Systems (ATMOS'11), volume 20 of *OpenAccess Series in Informatics (OASICS)*, pages 52–63, 2011.



Edsger W. Dijkstra.
A Note on Two Problems in Connexion with Graphs.

Numerische Mathematik, 1(1):269–271, 1959.



Lester R. Ford, Jr. and Delbert R. Fulkerson.
Flows in Networks.

Princeton University Press, 1962.



Robert W. Floyd.
Algorithm 97: Shortest path.

Communications of the ACM, 5(6):345, 1962.



Michael L. Fredman and Robert Tarjan.

Fibonacci heaps and their uses in improved network optimization algorithms.
Journal of the ACM, 1987.



Andrew V. Goldberg.

A Simple Shortest Path Algorithm with Linear Average Time.

In *Proceedings of the 9th Annual European Symposium on Algorithms (ESA'01)*,
volume 2161 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 230–241, 2001.



Donald B. Johnson.

Efficient Algorithms for Shortest Paths in Sparse Networks.

Journal of the ACM, 24(1):1–13, January 1977.



Sebastian Knopp, Peter Sanders, Dominik Schultes, Frank Schulz, and Dorothea Wagner.

Computing Many-to-Many Shortest Paths Using Highway Hierarchies.

In *Proceedings of the 9th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'07)*, pages 36–45. SIAM, 2007.



Ulrich Meyer and Peter Sanders.

Δ -Stepping: A Parallelizable Shortest Path Algorithm.

Journal of Algorithms, 49(1):114–152, 2003.



Stephen Warshall.

A Theorem on Boolean Matrices.

Journal of the ACM, 9(1):11–12, 1962.