Fünftes Übungsblatt

Ausgabe: 30. Juni 2020
Besprechung: 9. Juli 2020

1 Perfektes Matching

Ein Matching M zu einem Graphen G heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist. Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

1. P_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Weg mit n Knoten)
2. C_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit n Knoten). Definiere ausnahmsweise C_2 als K_2.
3. Q_n (der Hyperwürfel mit n-Bit Knoten IDs, siehe Übungsblatt 1)
4. K_n
5. $K_{n,m}$

2 Erhöhende Wege

Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph (jede Kante hat einen Knoten in V_1 und einen in V_2). Weiter sei v ein Knoten und M' ein kardinalitätsmaximales Matching für $G - v$, wobei v nicht „gematcht“ ist (d.h. v ist zu keiner Kante aus M' inzident). Gesucht ist nun ein kardinalitätsmaximales Matching für G. Dazu soll Lemma 5.2 aus dem Skript (Seite 3 der Notizen zu Vorlesung 9) benutzt werden: Falls es keinen erhöhenden Weg bzgl. M' mit Endknoten v gibt, ist M' bereits das gesuchte Matching. Ansonsten müssen wir einen erhöhenden Weg P bzgl M' mit Endknoten v bestimmen, dann ist $(M' \cup P) \setminus (M' \cap P)$ das gewünschte Matching.

Geben Sie einen Algorithmus an, der feststellt, ob es einen erhöhenden Weg bzgl. M' mit Endknoten v gibt und diesen gegebenenfalls bestimmt. Die Laufzeit soll linear in der Anzahl der Kanten von G sein.

Hinweis: Modifizieren Sie eine Breitensuche mit Startknoten v.

3 Große und kleine Matchings

Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

1. $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ Kanten
2. eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

4 Schnitte, Kreise und Bäume im Dualgraph

Zeigen Sie:

1. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star$. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^\star, (E \setminus E')^\star)$ von $G^\star$ unzusammenhängend ist.
2. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star = (V^\star, E^\star)$, und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^\star, (E \setminus E')^\star)$ ein aufspannender Baum von $G^\star$ ist.

5 Dreiecke zählen in allgemeinen Graphen

Sei G ein Graph mit n Knoten und m Kanten. Der k-Core von G ist der maximale Subgraph in dem jeder Knoten mindestens Grad k hat. Die Core-Zerlegung weist jedem Knoten das maximale k zu für welches er im k-Core liegt. Die Entartetheit $D(G)$ ist das größte k für welches G einen nicht-leeren k-Core hat.

1. Geben Sie einen Algorithmus, der die Core-Zerlegung in $\mathcal{O}(n + m)$ berechnet.
2. Geben Sie einen Algorithmus an, der die Anzahl Dreiecke in G in $\mathcal{O}((n+m)D(G))$ berechnet. **Hinweis:** Modifizieren Sie den Algorithmus von Übungsblatt 4.
3. Zeigen Sie dass für planare Graphen $D(G) \leq 5$ gilt.