Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
Sommersemester 2020
Torsten Ueckerdt, Lars Gottesbüren

Viertes Übungsblatt

Ausgabe: 11. Juni 2020
Besprechung: 23. Juni 2020

1 Planare Einbettungen und geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher, zusammenhängender planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

2 Dreiecke zählen in planaren Graphen

Sei G ein einfacher, planarer Graph. Geben Sie einen Linearzeit-Algorithmus an, der für jeden Knoten v die Anzahl (graphentheoretischer) Dreiecke berechnet, in denen v vorkommt. Das Ergebnis soll also ein Array sein, in dem der i-te Eintrag die Anzahl Dreicke des i-ten Knoten angibt. Formal ist die Menge der Dreiecke von v durch die Menge an verbundenen Paaren von Nachbarknoten $\{\{x, y\} \in E | \{v, x\}, \{v, y\} \in E\}$ definiert. Die Einbettung spielt dabei keine Rolle.

3 Minimale Spannbäume in planaren Graphen

Sei G ein einfacher, zusammenhängender planarer Graph mit positiven Kantengewichten. Geben Sie einen Algorithmus an, der in erwartet linearer Laufzeit einen Spannbaum minimalen Gewichts berechnet.

Hinweis: Sie dürfen die folgenden beiden Aussagen ohne Beweis verwenden:

- Sei v ein Knoten und e eine Kante minimalen Gewichts inzident zu v. Dann gibt es einen Spannbaum minimalen Gewichts von G, der e enthält.
- Sei e eine Kante, die einem Spannbaum minimalen Gewichts von G vorkommt. Sei T ein Spannbaum minimalen Gewichts auf dem Graphen, den man durch die Kontraktion von e erhält. Dann ist $T \cup \{e\}$ ein Spannbaum minimalen Gewichts auf G.

4 Folgerung aus dem Planar Separator Theorem:

Zeigen Sie: Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad Δ gibt es einen Schnitt $S \subseteq E$ von G mit $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$, so dass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$, $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$, $V_1 \dot{\cup} V_2 = V$ und $E_1 \dot{\cup} E_2 = E \setminus S$ besteht.

5 Maximum Independent Set

Sei G ein einfacher planarer Graph. Geben Sie einen Algorithmus mit Laufzeit $2^{O(\sqrt{n})}$ der eine optimale unabhängige Menge in G berechnet.