Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

23. Juni 2020, Übung 4

Lars Gottesbüren

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

- Wir führen den Beweis für alle zusammenhängenden maximal planaren Graphen.

Induktion über n:

- **IA:** $n = 3$
- **IV:** Jeder einfache, eingebettete, maximal planare Graph mit $n - 1$ Knoten lässt sich geradlinig zeichnen.

Geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

- Wir führen den Beweis für alle zusammenhängenden maximal planaren Graphen.

Induktion über n:

- **IA:** $n = 3$
- **IV:** Jeder einfache, eingebettete, maximal planare Graph mit $n - 1$ Knoten lässt sich geradlinig zeichnen.

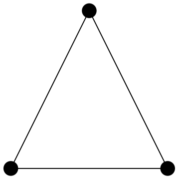
Geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

- Wir führen den Beweis für alle zusammenhängenden maximal planaren Graphen.

Induktion über n:

- **IA:** $n = 3$
- **IV:** Jeder einfache, eingebettete, maximal planare Graph mit $n - 1$ Knoten lässt sich geradlinig zeichnen.



Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

- Sei G ein maximal planarer Graph mit n Knoten.
- $\Rightarrow m = 3n - 6$
- Defizit $def(v) := 6 - deg(v)$
- $\Sigma_{v \in V} def(v) = 12$
  - $\Sigma def(v) = \Sigma(6 - deg(v)) = 6n - \Sigma deg(v) = 6n - 2m = 6n - 2(3n - 6) = 12$
- Jeder Knoten hat maximal Defizit 3.
  - Offensichtlich hat G keinen Grad 0 oder 1 Knoten.
  - Angenommen Knoten v in G hat Grad 2.
  - $G - v$ hat $n - 1$ Knoten und $m - 2$ Kanten.
  - $m = 3n - 6$
  - $m - 2 = 3n - 8 = 3(n - 1) - 5 > 3(n - 1) - 6$ ↯

Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

- Sei G ein maximal planarer Graph mit $n \geq 4$ Knoten.

Lemma

Es gibt mindestens 4 Knoten mit $\deg(v) \leq 5$.

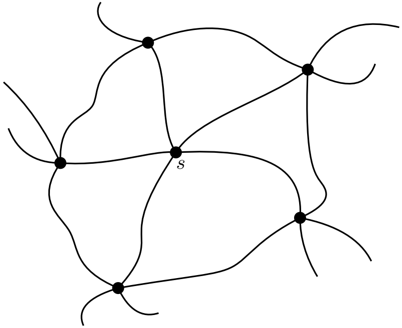
- $6 - deg(v) \leq 3$
- $\sum_{v \in V}(6 - deg(v)) = 12$

$\Rightarrow$ Es gibt mindestens $\frac{12}{3} = 4$ Knoten mit $def(v) > 0$.
$\Rightarrow$ Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.

Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

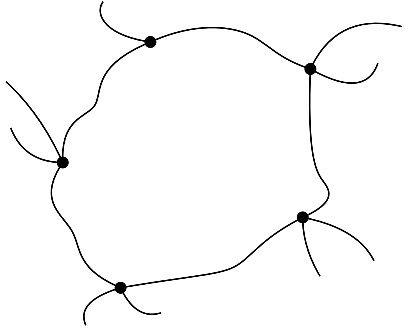
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

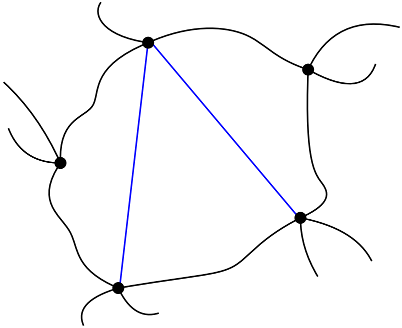
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

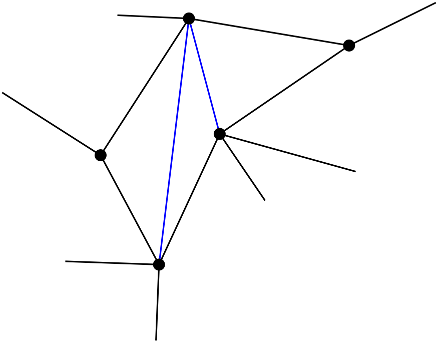
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n - 1 \curvearrowright n$

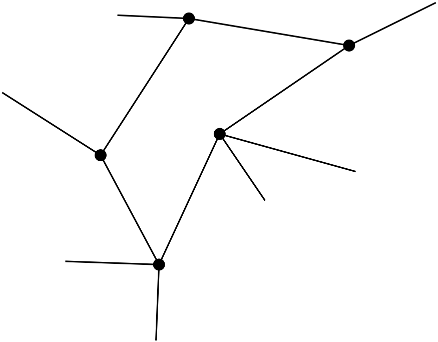
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

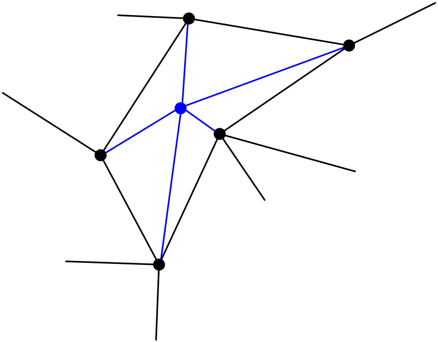
- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



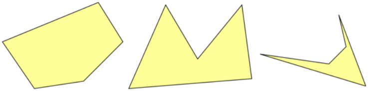
Geradlinige Zeichnungen

$n-1 \curvearrowright n$

- Es gibt mindestens 4 Knoten mit $deg(v) \leq 5$.
- Wähle Knoten s mit $deg(s) \leq 5$ und $s \notin \{u, v, w\}$ (die Knoten der äußeren Facette).



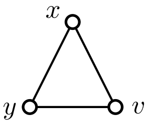
- *Problem der Museumswächter*
- Zur Bewachung eines überschneidungsfreien, geschlossenen, planaren Polygons mit n Ecken sind maximal $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter nötig.



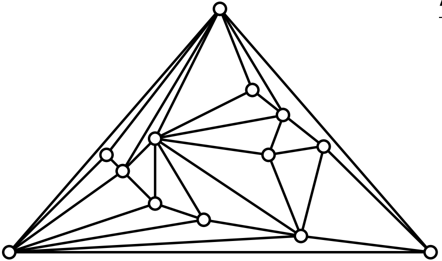
Dreiecke Zählen

Für alle $v \in V$: bestimme Zahl der *Dreiecke* in denen v vorkommt.
Laufzeit: $\mathcal{O}(n)$

- Gegeben: $G = (V, E)$ ungerichteter, planarer Graph.
- Dreiecke in denen v vorkommt: $\{\{x, y\} \in E | \{v, x\}, \{v, y\} \in E\}$



Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

  $D_v = 0$

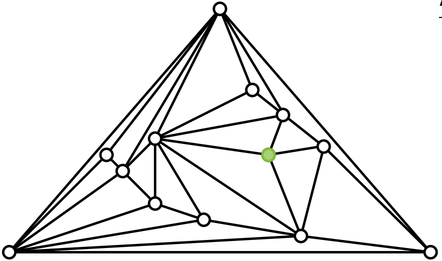
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

      if ADJAZENT(v, w) **then**

        $D_v = D_v + 1$

Dreiecke Zählen

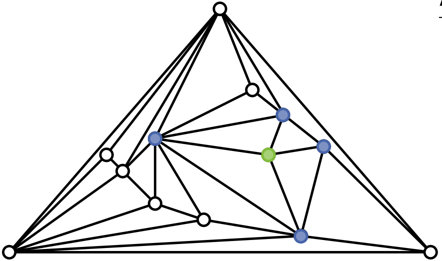


Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**
  $D_v = 0$
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**
    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**
      if ADJAZENT(v, w)
      then
        $D_v = D_v + 1$

Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

  $D_v = 0$

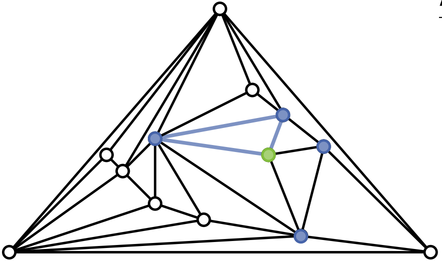
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

      if ADJAZENT(v, w) **then**

        $D_v = D_v + 1$

Dreiecke Zählen

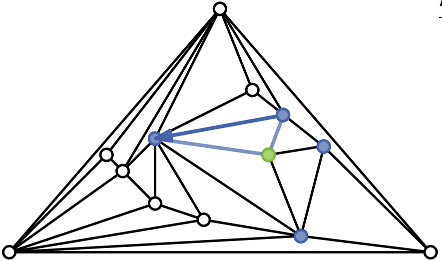


Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**
  $D_v = 0$
  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**
    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**
      if ADJAZENT(v, w) **then**
        $D_v = D_v + 1$

Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

$D_v = 0$

for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

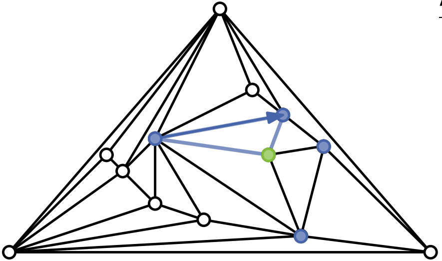
for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

if ADJAZENT(v, w)

then

$D_v = D_v + 1$

Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

  $D_v = 0$

  for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

    for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

      if ADJAZENT(v, w) **then**

        $D_v = D_v + 1$

MST

MST in erwartet $\mathcal{O}(n)$

- Gegeben: G ungerichteter, planarer, zusammenhängend Graph.

Ohne Beweis zu verwenden:

- Sei v ein Knoten und e eine Kante minimalen Gewichts inzident zu v. Dann gibt es einen MST von G, der e enthält.
- Sei e eine Kante, die in einem MST von G vorkommt. Sei T ein MST auf dem Graphen, den man durch die Kontraktion von e erhält. Dann ist $T \cup e$ ein MST auf G.

MST

Algorithm MST

$T \leftarrow \emptyset$

while G nicht leer **do**

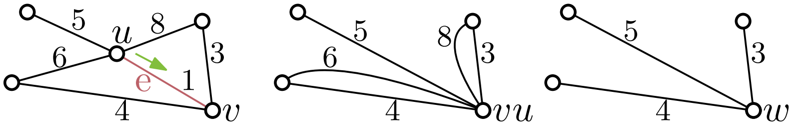
  Wähle $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$

  $e \leftarrow \operatorname{argmin}_{e' \in \mathcal{N}(v)} w(e')$

  $T \leftarrow T \cup e$

  Kontrahiere e

  Entferne Multikanten und behalte nur die mit geringstem Gewicht



Erwartete Laufzeit

Kontraktion von $\{u, v\}$ mit $\deg(v) \leq 5$

- Pro Knoten eine Hashmap für seine Nachbarschaft
- Für $x \in \mathcal{N}(v)$ erkenne ob $x \in \mathcal{N}(u)$; in erwartet $\mathcal{O}(1)$
- Falls ja, behalte die Kante mit kleinerem Gewicht in Hashmap für u

Folgerung aus dem PLANAR SEPARATOR THEOREM:

Zeigen Sie: Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad Δ gibt es einen Schnitt $S \subseteq E$ von G mit $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$, so dass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$, $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$, $V_1 \cup V_2 = V$ und $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$ besteht.

- Sei S', V_1', V_2' wie im Planar Separator Theorem.
- $S = \{\{u, v\} \in E \mid u \in S' \vee v \in S'\} \Rightarrow |S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$
- Teile S' in S_1', S_2', so dass $|V_1' \cup S_1'| \leq \frac{2}{3}n$ und $|V_2' \cup S_2'| \leq \frac{2}{3}n$.
- $V_1 = V_1' \cup S_1'$, $V_2 = V_2' \cup S_2'$

Folgerung aus dem PLANAR SEPARATOR THEOREM:

Zeigen Sie: Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad Δ gibt es einen Schnitt $S \subseteq E$ von G mit $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$, so dass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$, $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$, $V_1 \cup V_2 = V$ und $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$ besteht.

- Sei S', V_1', V_2' wie im Planar Separator Theorem.
- $S = \{\{u, v\} \in E \mid u \in S' \vee v \in S'\} \Rightarrow |S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$
- Teile S' in S_1', S_2', so dass $|V_1' \cup S_1'| \leq \frac{2}{3}n$ und $|V_2' \cup S_2'| \leq \frac{2}{3}n$.
- $V_1 = V_1' \cup S_1'$, $V_2 = V_2' \cup S_2'$

Max Independent Set

Algorithm MWIS

$I_{\text{opt}} \leftarrow \emptyset$
$(S, V_1, V_2) \leftarrow \text{PST}(G)$
for $I_S \in \mathcal{P}(S)$ **do**
  $I_1 \leftarrow \text{MWIS}(G[V_1 - N(I_S)])$
  $I_2 \leftarrow \text{MWIS}(G[V_2 - N(I_S)])$
  $I \leftarrow I_S \cup I_1 \cup I_2$
  if $|I| > |I_{\text{opt}}$ **then**
    $I_{\text{opt}} \leftarrow I$
return I_{opt}

Max Independent Set

Algorithm MWIS

$I_{\text{opt}} \leftarrow \emptyset$
$(S, V_1, V_2) \leftarrow \text{PST}(G)$
for $I_S \in \mathcal{P}(S)$ **do**
  $I_1 \leftarrow \text{MWIS}(G[V_1 - N(I_S)])$
  $I_2 \leftarrow \text{MWIS}(G[V_2 - N(I_S)])$
  $I \leftarrow I_S \cup I_1 \cup I_2$
  if $|I| > |I_{\text{opt}}$ **then**
    $I_{\text{opt}} \leftarrow I$
return I_{opt}

$$t(n) \leq 2^{\sqrt{n}} \cdot t(\alpha^1 n) \leq 2^{\sqrt{n}} \cdot 2^{\sqrt{\alpha n}} \cdot t(\alpha^2 n) \leq \cdots \leq 2^{\sqrt{n} \cdot \sum_{i=0}^{\log(n)} \alpha^i}$$