

## Sechstes Übungsblatt

**Ausgabe:** 9. Juli 2019  
**Besprechung:** 11. Juli 2019

### 1 Right-First Tiefensuche und Left-First Breitensuche

Sei  $G$  ein ungerichteter, zusammenhängender, planar eingebetteter Graph,  $G^*$  der zugehörige Dualgraph und  $e = (u, v)$  eine orientierte Kante.

<hr/> <b>Algorithmus 1:</b> Right-First-Kanten-DFS <hr/>	<hr/> <b>Algorithmus 2:</b> Left-First-Kanten-BFS <hr/>
Füge Kante $(t, u)$ , $t \notin V$ im Gegenuhrzeigersinn vor $e$ an $u$ ein Betrachte $e$ als nicht orientiert Lege $(t, u)$ auf einen Stapel <b>Solange</b> <i>Stapel nicht leer</i> <b>wiederhole</b> Betrachte oberste Kante $(x, y)$ <b>Falls</b> $y$ <i>inzident zu nichtorientierter Kante</i> Orientiere im Gegenuhrzeigersinn bzgl. $y$ nächste nichtorientierte Kante $y \rightarrow w$ und lege diese auf den Stapel <b>sonst</b> Entferne $(x, y)$ vom Stapel	Orientiere alle zu $u$ inzidenten Kanten $u \rightarrow w$ und hänge diese, beginnend bei $e$ , im Uhrzeigersinn bzgl. $u$ an eine Warteschlange <b>Solange</b> <i>Warteschlange nicht leer</i> <b>wiederhole</b> Betrachte erste Kante $(x, y)$ <b>Falls</b> $y$ <i>inzident zu nichtorientierter Kante</i> Orientiere alle solche Kanten $y \rightarrow w$ und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl. $y$ an die Warteschlange <b>sonst</b> Entferne $(x, y)$ aus der Warteschlange

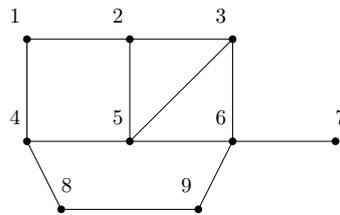
**Hinweis:** Die hinzugefügte Kante  $(t, u)$  von einem neuen Knoten  $t$  sorgt dafür dass die Right-First-Kanten-DFS den gesamten Graphen traversiert, falls  $e$  eine Brücke ist, die Suche also bei  $u$  fortgesetzt wird. Insbesondere wird  $e$  als erste Kante in der gegebenen Orientierung  $(u, v)$  gefunden.

In diesen beiden Kantensuchen wird jeweils eine Reihenfolge  $R = (e_1, \dots, e_m)$  der Kanten festgelegt. Die zu  $e$  „rechte“ Facette sei  $f_1$ , und die Dualkante  $e^* = (f_1, f_2)$  zu  $e$  sei orientiert ausgehend von  $f_1$ .

Wir betrachten eine Right-First-Tiefensuche in  $G$ , beginnend bei Kante  $e$ , mit Kantenfolge  $R = (e = e_1, \dots, e_m)$  und eine Left-First-Breitensuche in  $G^*$ , beginnend bei Kante  $e^*$ , mit Kantenfolge  $R^* = (e^* = e_1^*, \dots, e_m^*)$ . Die Reihenfolgen  $R$  und  $R^*$  heißen dual, falls  $e_i$  Dualkante zu  $e_i^*$  für alle  $1 \leq i \leq m$ .

- (a) Bestimmen Sie für den zweidimensionalen Würfel  $Q_2$  sowie untenstehenden Graphen die Reihenfolgen  $R$  und  $R^*$  bei beliebiger Startkante  $e$ .

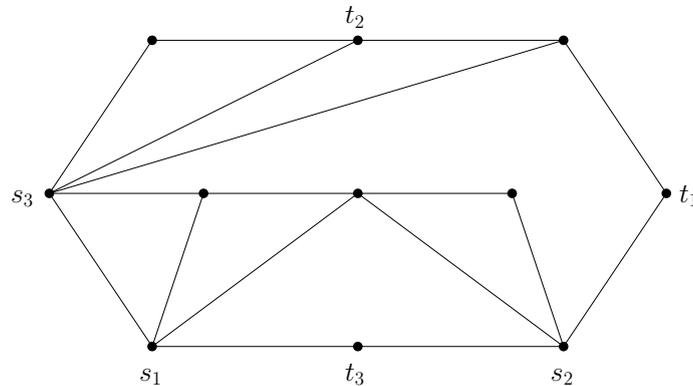
**Hinweis:** Die Reihenfolgen sind dual.



- (b) Geben Sie einen Graphen an, für den  $R$  und  $R^*$  nicht dual sind.

**Hinweis:** Betrachten Sie Graphen mit Brücken und Kreisen.

## 2 Kantendisjunkte Wegpackung



Betrachten Sie obenstehenden Graphen mit der angegebenen Menge an Terminalpaaren, und überprüfen Sie die *Geradheitsbedingung*. Ist das induzierte *kantendisjunkte* Wegpackungsproblem lösbar?

## 3 Knotendisjunkte Wegpackung

**Definition (knotendisjunktes Wegpackungsproblem):** Gegeben ein zusammenhängender, planarer Graph  $G$  mit fester Einbettung und paarweise verschiedenen Terminalen  $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_k, t_k$  an der äußeren Facette. Gesucht sind paarweise knotendisjunkte  $s_i-t_i$ -Wege in  $G$  ( $1 \leq i \leq k$ ).

Das Problem heißt *topologisch lösbar*, falls die Reihenfolge der Terminale „um die äußere Facette herum“ die Lösbarkeit nicht ausschließt.

- (a) Geben Sie für jede natürliche Zahl  $k \geq 2$  einen zusammenhängenden, planaren Graphen  $G$  mit  $k$  Terminalpaaren  $(s_i, t_i)$  an der äußeren Facette an, sodass das knotendisjunkte Wegpackungsproblem

- nicht topologisch lösbar ist
- zwar topologisch lösbar ist, aber dennoch keine paarweise knotendisjunkten  $s_i-t_i$ -Wege in  $G$  existieren.

**Bitte wenden**

- (b) Sei  $o$  die Anzahl der Knoten von  $G$ , die zur äußeren Facette der Einbettung inzident sind (es gilt also  $o \geq 2k$ ). Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit  $\mathcal{O}(o)$  feststellt, ob das knotendisjunkte Wegpackungsproblem topologisch lösbar ist.
- (c) Angenommen, das Problem sei topologisch lösbar. Geben Sie einen Linearzeitalgorithmus an, der entweder  $k$  knotendisjunkte  $s_i$ - $t_i$ -Wege findet oder feststellt, dass das Problem nicht lösbar ist.
- (d) Zeigen Sie: Für einen planaren Graphen  $G$  mit Terminalpaaren an der äußeren Facette ist das knotendisjunkte Wegpackungsproblem genau dann *nicht lösbar*, wenn es nicht topologisch lösbar ist oder eine einfache geschlossene Kurve  $K$  in der Ebene existiert, die  $G$  nur in Knoten berührt, sodass die Anzahl der Terminalpaare mit genau einem Terminal innerhalb  $K$  größer als die Anzahl der ‚Berührknoten‘ ist.