Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
Sommersemester 2019
Dorothea Wagner, Guido Brückner

Viertes Übungsblatt

Ausgabe:	29. Mai 2019
Besprechung:	4. Juni 2019

1 Erhöhende Wege

Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph (jede Kante hat einen Knoten in V_1 und einen in V_2). Weiter sei v ein Knoten und M' ein kardinalitätsmaximales Matching für $G - v$, wobei v nicht „gematcht“ ist (d.h. v ist zu keiner Kante aus M' inzident). Gesucht ist nun ein kardinalitätsmaximales Matching für G. Dazu soll Lemma 5.2 der Vorlesung benutzt werden: Falls es keinen erhöhenden Weg bzgl. M' mit Endknoten v gibt, ist M' bereits das gesuchte Matching. Ansonsten müssen wir einen erhöhenden Weg P bzgl M' mit Endknoten v bestimmen, dann ist $(M' \cup P) \setminus (M' \cap P)$ das gewünschte Matching.

Geben Sie einen Algorithmus an, der feststellt, ob es einen erhöhenden Weg bzgl. M' mit Endknoten v gibt und diesen gegebenenfalls bestimmt. Die Laufzeit soll linear in der Anzahl der Kanten von G sein.

Hinweis: Modifizieren Sie eine Breitensuche mit Startknoten v.

2 Große und kleine Matchings

Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

1. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ Kanten
2. eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

3 Schnitte, Kreise und Bäume im Dualgraph

Zeigen Sie:

1. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star$. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^\star, (E \setminus E')^\star)$ von $G^\star$ unzusammenhängend ist.

2. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star = (V^\star, E^\star)$, und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^\star, (E \setminus E')^\star)$ ein aufspannender Baum von $G^\star$ ist.

4 Perfektes Matching

Ein Matching M zu einem Graphen G heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist. Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

1. P_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Weg mit n Knoten)
2. C_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit n Knoten). Definiere ausnahmsweise C_2 als K_2.
3. Q_n
4. K_n
5. $K_{n,m}$

5 Dreiecke Zählen in planaren Graphen

Sei G ein einfacher, planarer Graph. Geben Sie einen Algorithmus an, der für jeden Knoten v die Anzahl (graphentheoretischer) Dreiecke berechnet, in denen v vorkommt. Formal ist die Menge der Dreiecke von v durch die Menge an verbundenen Paaren von Nachbarknoten $\{\{x, y\} \in E | \{v, x\}, \{v, y\} \in E\}$ definiert. Die Einbettung spielt dabei keine Rolle. Die Laufzeit des Algorithmus über alle Knoten soll linear in der Größe des Graphen sein.

6 Minimale Spannbäume in planaren Graphen

Sei G ein einfacher, zusammenhängender planarer Graph mit positiven Kantengewichten. Geben Sie einen Algorithmus an, der in erwartet linearer Laufzeit einen Spannbaum minimalen Gewichts berechnet.

Hinweis: Sie dürfen die folgenden beiden Aussagen ohne Beweis verwenden:

- Sei v ein Knoten und e eine Kante minimalen Gewichts inzident zu v. Dann gibt es einen Spannbaum minimalen Gewichts von G, der e enthält.
- Sei e eine Kante, die einem Spannbaum minimalen Gewichts von G vorkommt. Sei T ein Spannbaum minimalen Gewichts auf dem Graphen, den man durch die Kontraktion von e erhält. Dann ist $T \cup \{e\}$ ein Spannbaum minimalen Gewichts auf G.