Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

4. Juni 2019, Übung 4

Guido Brückner

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

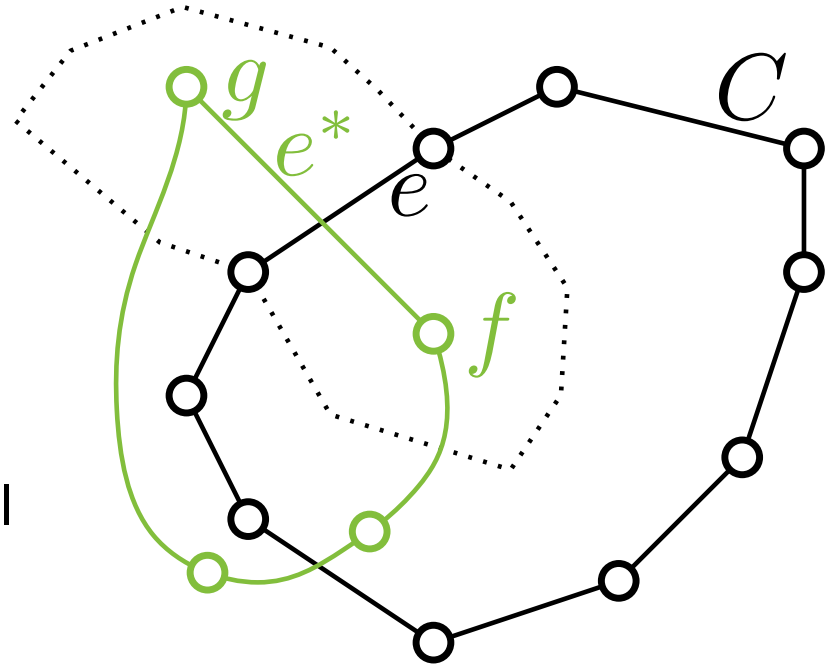
Prüfungstermine

- 19. Juli
- 12. August
- 13. August
- 29. August – AUSGEBUCHT
- 4. September – AUSGEBUCHT
- 5. September
- 2. Oktober
- 9. Oktober

1.1 – Schnitte und Kreise

Aufgabe 1.1

Sei $G = (V, E)$ planar, zusammenhängend und $E' \subseteq E$.
Zeige (V, E') enthält Kreis $C \Leftrightarrow (V^*, (E \setminus E')^*)$ unzusammenhängend



"$\Rightarrow$" Sei C ein Kreis in E'

- Sei $f \in V^*$ im Inneren, $g \in V^*$ im Äußeren von C
- Alle Pfade in G^* die f und g verbinden, laufen über Kanten dual zu C

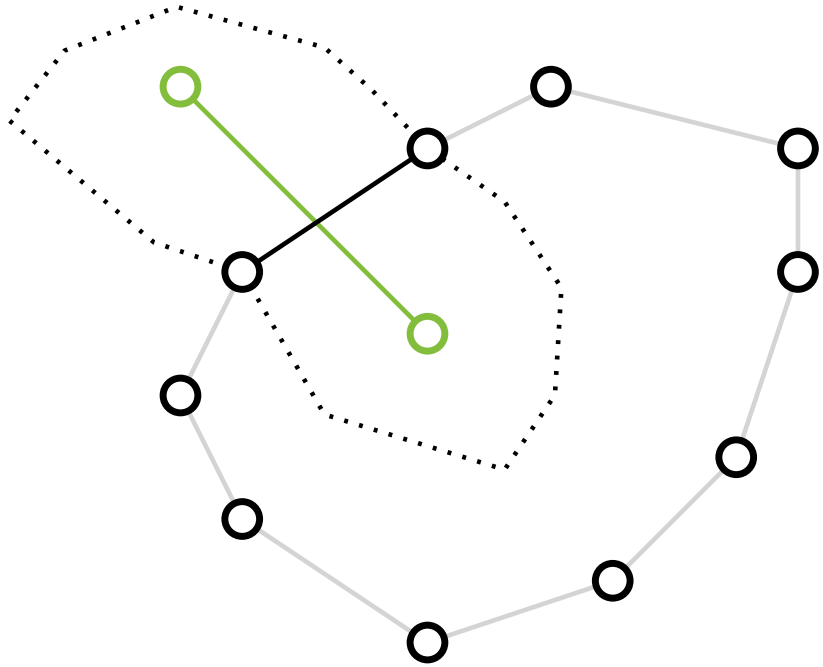
1.1 – Schnitte und Kreise

Aufgabe 1.1

Sei $G = (V, E)$ planar, zusammenhängend und $E' \subseteq E$.
Zeige (V, E') enthält Kreis $C \Leftrightarrow (V^*, (E \setminus E')^*)$ unzusammenhängend

"$\Leftarrow$" Annahme E' enthält keinen Kreis.

- Facetten sind durch Kreise voneinander getrennt
- Kein Kreis gelöscht $\Rightarrow$ kein Schnitt zwischen Facetten



1.2 – Bäume

Aufgabe 1.2 – Bäume

Zeige: Für $E' \subseteq E$

$$\begin{array}{lll} & T = & (V, E') \quad \text{ist ein Spannbaum von } G \\ \Leftrightarrow & T^* = & (V^*, (E \setminus E')^*) \quad \text{ist ein Spannbaum von } G^* \end{array}$$

Nutze Aufgabe 1.1

“$\Rightarrow$“

T Spannbaum $\Rightarrow$ T ist zshg [kreisfrei] $\Rightarrow$ T^* ist kreisfrei [zshg]

“$\Leftarrow$“

Analog.

2.1 – Perfektes Matching

Ein Matching M heißt *perfekt*, wenn jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist.
Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

- P_n einfacher Weg mit n Knoten.
- n gerade

2.1 – Perfektes Matching

Ein Matching M heißt *perfekt*, wenn jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist.
Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

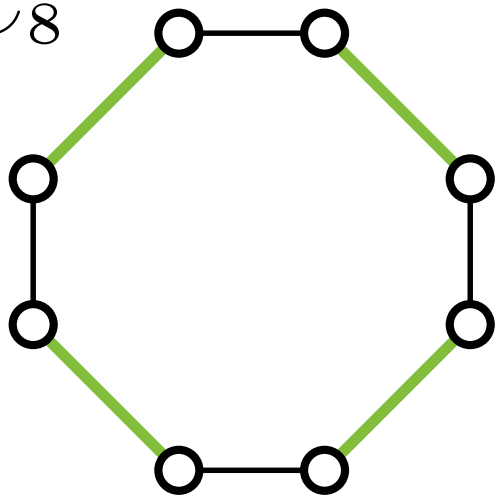
- P_n einfacher Weg mit n Knoten.
- n gerade

2.2 – Perfektes Matching

C_n einfacher Kreis mit n Knoten. Ausnahmsweise $C_2 = K_2$.

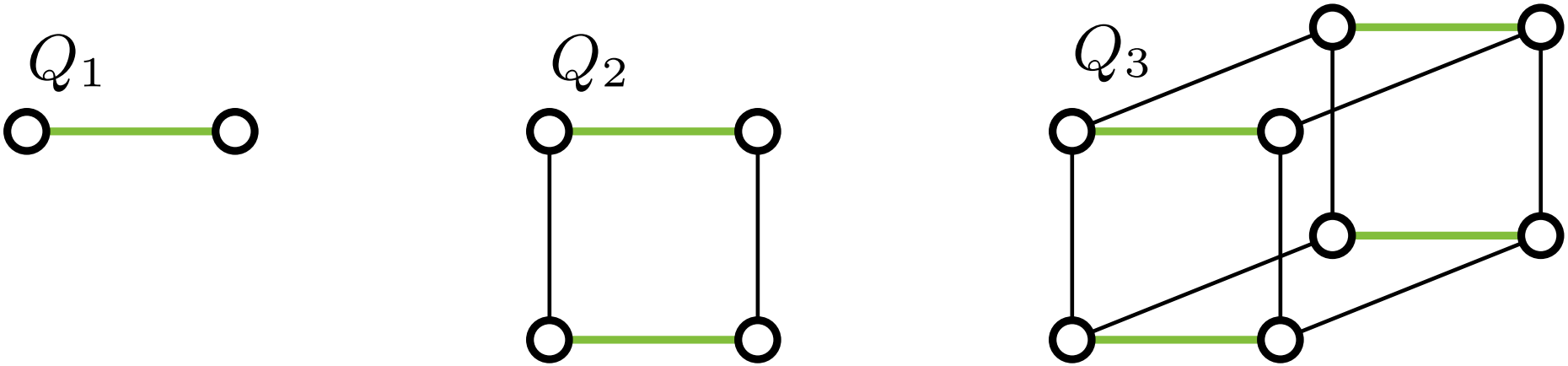
- n gerade

C_8



2.3 – Perfektes Matching

Q_n der n-te Hyperwürfel.

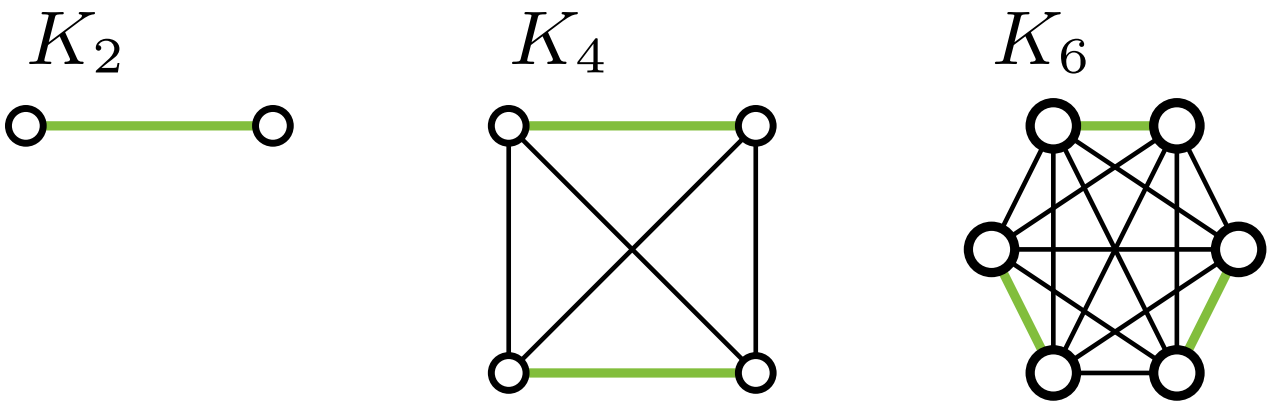


Kopiere das Matching mit dem Graphen.

2.4 – Perfektes Matching

K_n

- n gerade



- Es muss gelten: $|M| = \frac{|V|}{2} \Rightarrow n$ gerade
- K_n enthält Kreis der Länge n.

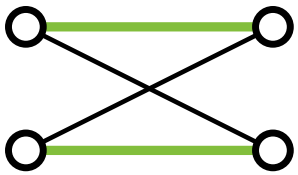
2.4 – Perfektes Matching

$K_{n,m}$

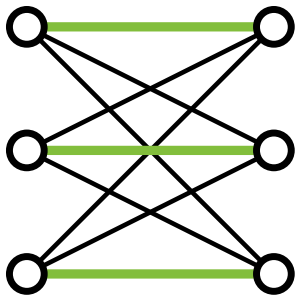
- $n = m$
- Für $n \neq m$ ist mindestens ein Knoten auf einer Seite nicht im Matching.

$K_{1,1}$

$K_{2,2}$



$K_{3,3}$



Füge die Kante zwischen den beiden neuen Knoten zu M hinzu.

3 – Adjazenztest

Adjazenztest in $\mathcal{O}(1)$

- Gegeben: G ungerichteter, planarer Graph.
- Wir haben lineare Vorberechnungszeit und können linear viel zusätzlichen Speicher benutzen.

Hinweis: Richte Kanten so, dass jeder Knoten höchstens fünf ausgehende Kanten hat.

3 – Adjazenztest

Adjazenztest in $\mathcal{O}(1)$

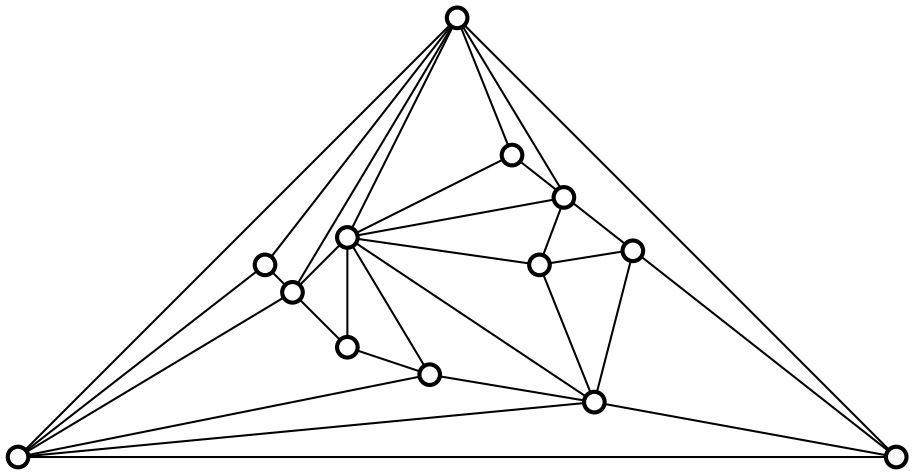
- Gegeben: G ungerichteter, planarer Graph.
- Wir haben lineare Vorberechnungszeit und können linear viel zusätzlichen Speicher benutzen.

Hinweis: Richte Kanten so, dass jeder Knoten höchstens fünf ausgehende Kanten hat.

3 – Adjazenztest

- In den folgenden Algorithmen werden wir Kanten *richten*.
- Kanten $\{u, v\}$ sind zunächst ungerichtet und können zu (u, v) oder (v, u) gerichtet werden.
- $\mathcal{N}(v)$: Nachbarschaft von v im Eingabegraphen.
- $\widetilde{\mathcal{N}}(v)$: Nachbarschaft von v über Kanten die noch nicht gerichtet wurden.
- $\mathcal{N}^+(v)$: Über gerichtete, von v ausgehende Kanten benachbarte Knoten.

3 – Adjazenztest



Algorithm VORBERECHNUNG

$d_v \leftarrow$ Grad von Knoten v

$Q \leftarrow \{v \mid d_v \leq 5\}$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow Q.pop()$

  for $u \in \widetilde{\mathcal{N}}(v)$ **do**

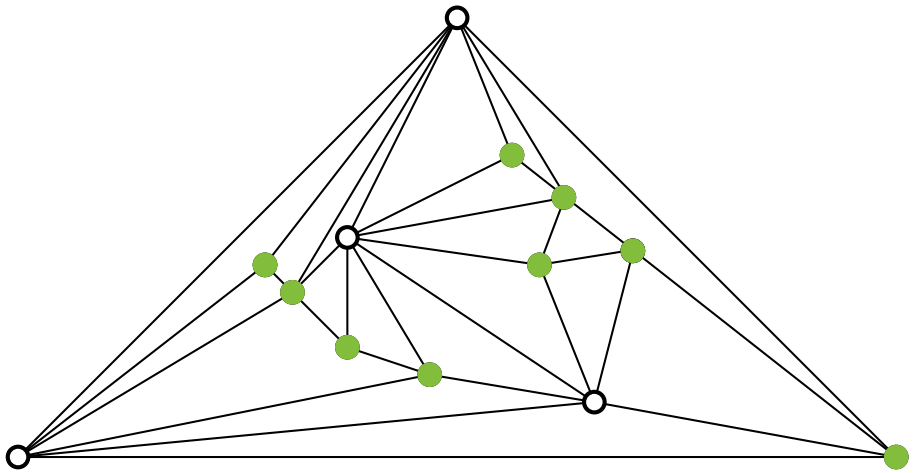
    $\{v, u\} \rightsquigarrow (v, u)$

    $d_u = d_u - 1$

    if $d_u = 5$ **then**

      $Q.push(u)$

3 – Adjazenztest



Algorithm VORBERECHNUNG

$d_v \leftarrow$ Grad von Knoten v

$Q \leftarrow \{v \mid d_v \leq 5\}$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow Q.pop()$

  for $u \in \widetilde{\mathcal{N}}(v)$ **do**

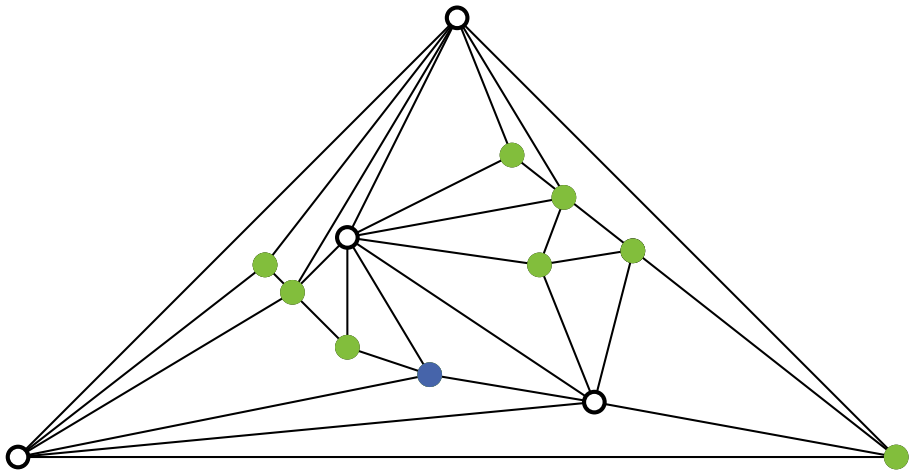
    $\{v, u\} \rightsquigarrow (v, u)$

    $d_u = d_u - 1$

    if $d_u = 5$ **then**

      $Q.push(u)$

3 – Adjazenztest



Algorithm VORBERECHNUNG

$d_v \leftarrow$ Grad von Knoten v

$Q \leftarrow \{v \mid d_v \leq 5\}$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow Q.pop()$

  for $u \in \widetilde{\mathcal{N}}(v)$ **do**

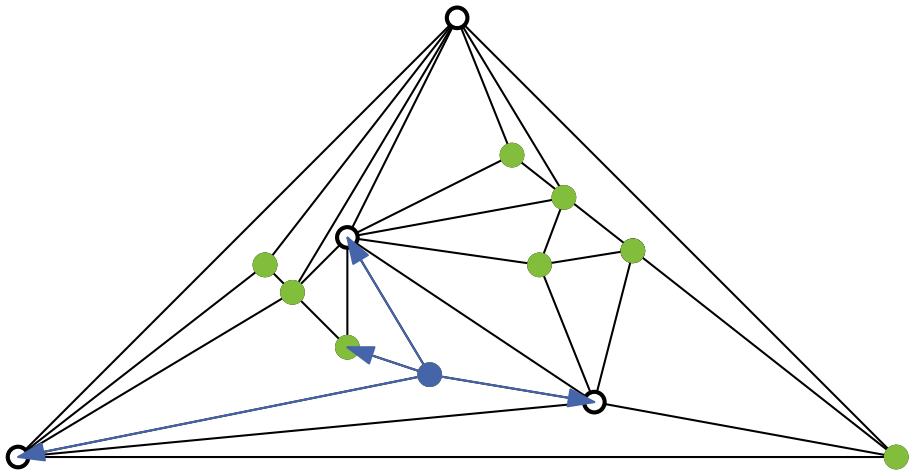
    $\{v, u\} \rightsquigarrow (v, u)$

    $d_u = d_u - 1$

    if $d_u = 5$ **then**

      $Q.push(u)$

3 – Adjazenztest



Algorithm VORBERECHNUNG

$d_v \leftarrow$ Grad von Knoten v

$Q \leftarrow \{v \mid d_v \leq 5\}$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow Q.pop()$

  for $u \in \widetilde{\mathcal{N}}(v)$ **do**

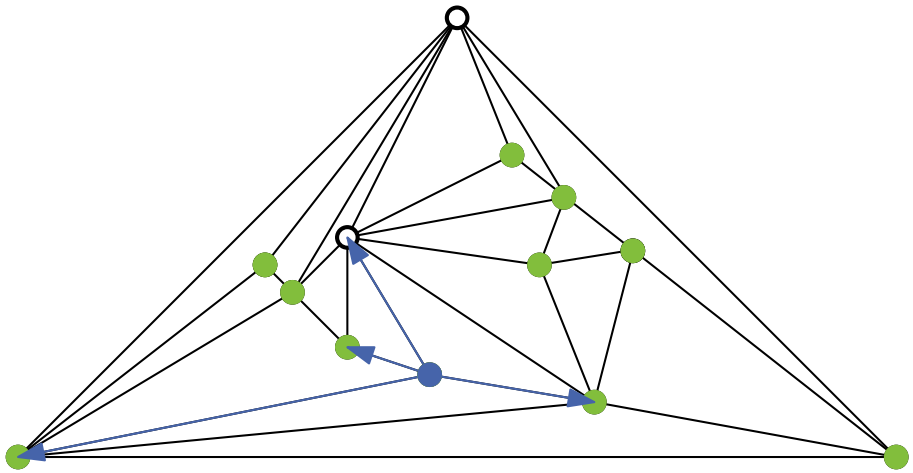
    $\{v, u\} \rightsquigarrow (v, u)$

    $d_u = d_u - 1$

    if $d_u = 5$ **then**

      $Q.push(u)$

3 – Adjazenztest



Algorithm VORBERECHNUNG

$d_v \leftarrow$ Grad von Knoten v

$Q \leftarrow \{v \mid d_v \leq 5\}$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$v \leftarrow Q.pop()$

for $u \in \widetilde{\mathcal{N}}(v)$ **do**

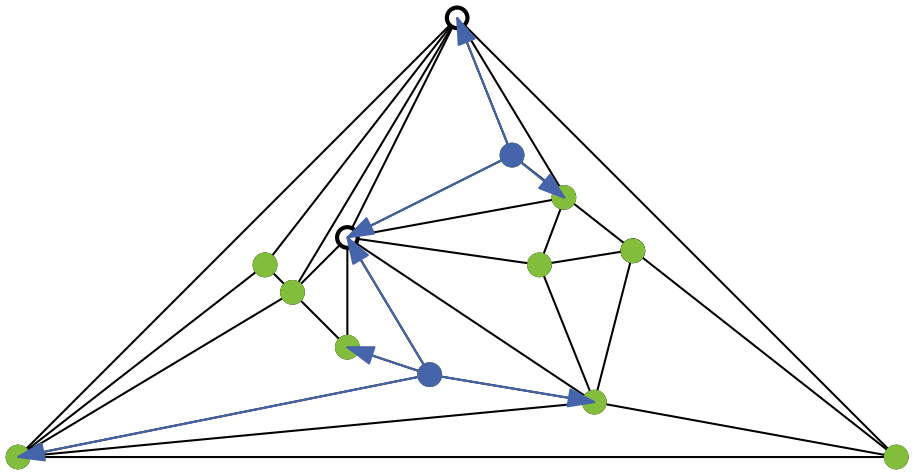
$\{v, u\} \rightsquigarrow (v, u)$

$d_u = d_u - 1$

if $d_u = 5$ **then**

$Q.push(u)$

3 – Adjazenztest



Algorithm VORBERECHNUNG

$d_v \leftarrow$ Grad von Knoten v

$Q \leftarrow \{v \mid d_v \leq 5\}$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$v \leftarrow Q.pop()$

for $u \in \widetilde{\mathcal{N}}(v)$ **do**

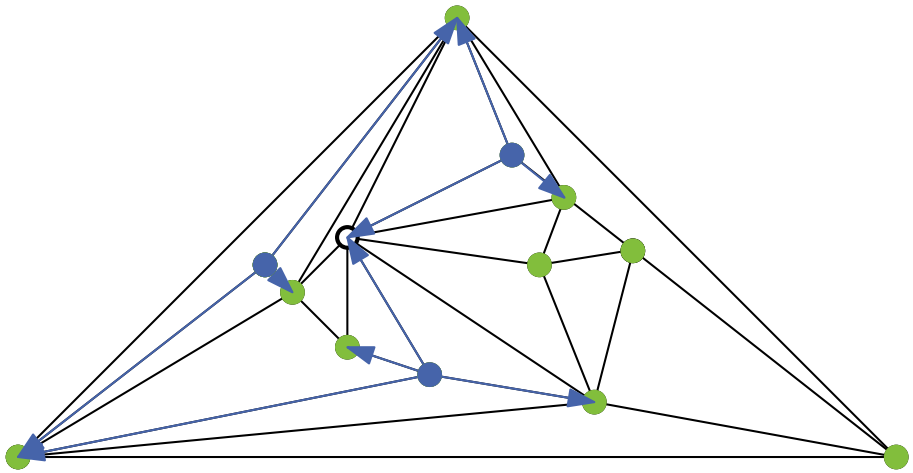
$\{v, u\} \rightsquigarrow (v, u)$

$d_u = d_u - 1$

if $d_u = 5$ **then**

$Q.push(u)$

3 – Adjazenztest



Algorithm VORBERECHNUNG

$d_v \leftarrow$ Grad von Knoten v

$Q \leftarrow \{v \mid d_v \leq 5\}$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$v \leftarrow Q.pop()$

for $u \in \widetilde{\mathcal{N}}(v)$ **do**

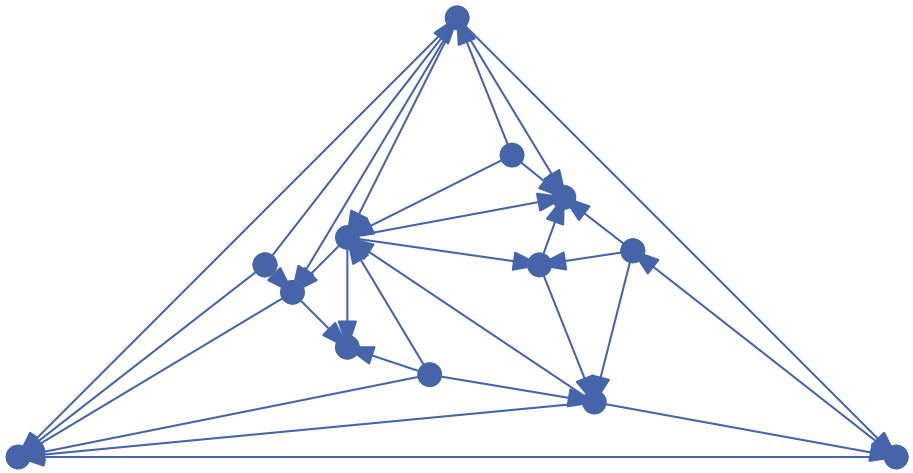
$\{v, u\} \rightsquigarrow (v, u)$

$d_u = d_u - 1$

if $d_u = 5$ **then**

$Q.push(u)$

3 – Adjazenztest



Algorithm VORBERECHNUNG

$d_v \leftarrow$ Grad von Knoten v

$Q \leftarrow \{v \mid d_v \leq 5\}$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

  $v \leftarrow Q.pop()$

  for $u \in \widetilde{\mathcal{N}}(v)$ **do**

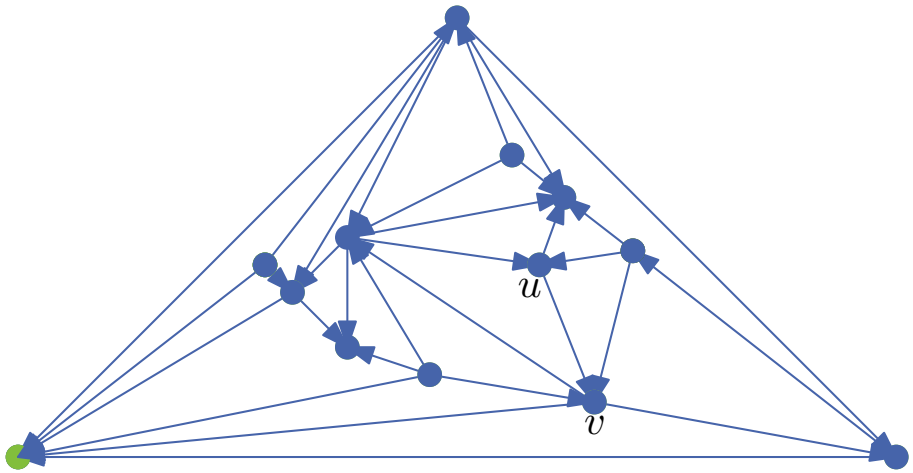
    $\{v, u\} \rightsquigarrow (v, u)$

    $d_u = d_u - 1$

    if $d_u = 5$ **then**

      $Q.push(u)$

3 – Adjazenztest



Algorithm VORBERECHNUNG

$d_v \leftarrow$ Grad von Knoten v

$Q \leftarrow \{v \mid d_v \leq 5\}$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$v \leftarrow Q.pop()$

for $u \in \widetilde{\mathcal{N}}(v)$ **do**

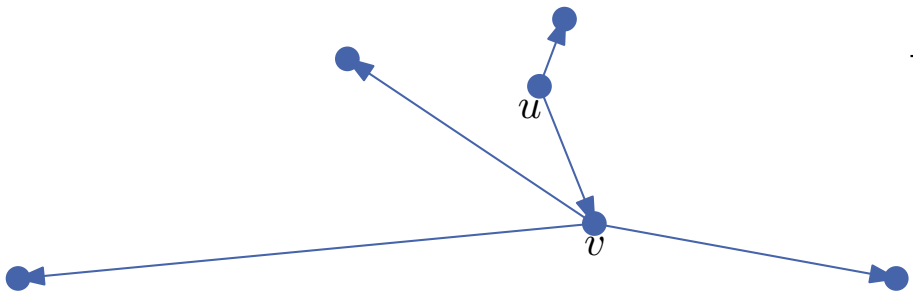
$\{v, u\} \rightsquigarrow (v, u)$

$d_u = d_u - 1$

if $d_u = 5$ **then**

$Q.push(u)$

3 – Adjazenztest



Algorithm ADJAZENT(u, v)

$v \overset{?}{\in} \mathcal{N}^+(u)$ oder

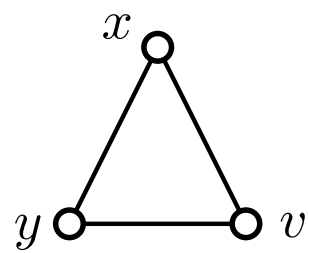
$u \overset{?}{\in} \mathcal{N}^+(v)$

- Für jeden der beiden Knoten müssen höchstens 5 Kanten betrachtet werden.
- $\Rightarrow$ ADJAZENT $\in \mathcal{O}(1)$

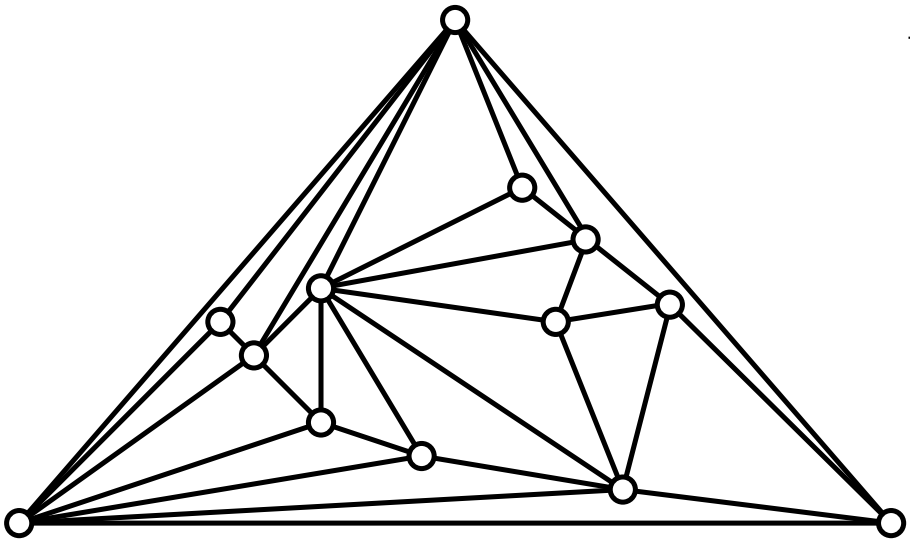
4 – Dreiecke Zählen

Für alle $v \in V$: bestimme Zahl der *Dreiecke* in denen v vorkommt.
Laufzeit: $\mathcal{O}(n)$

- Gegeben: $G = (V, E)$ ungerichteter, planarer Graph.
- Dreiecke in denen v vorkommt: $\{\{x, y\} \in E | \{v, x\}, \{v, y\} \in E\}$



4 – Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

$D_v = 0$

for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

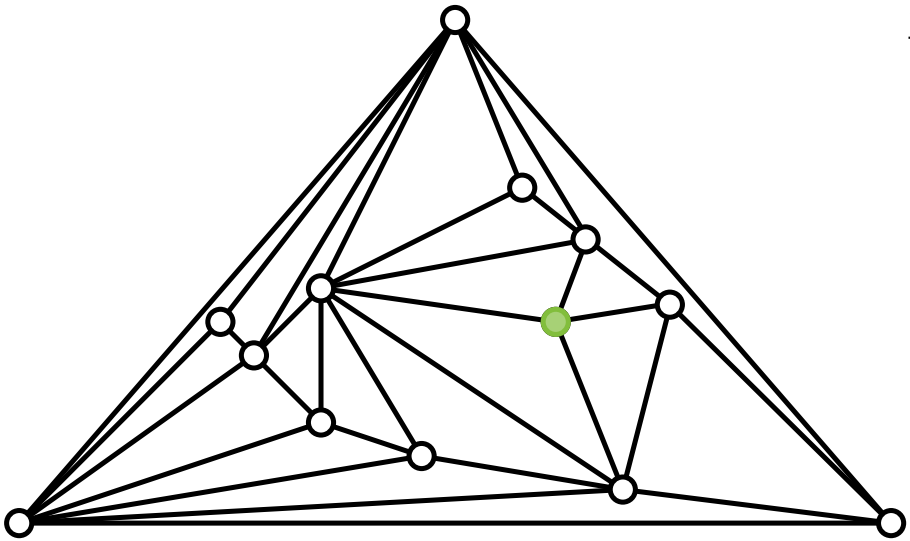
for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

if ADJAZENT(v, w)

then

$D_v = D_v + 1$

4 – Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

$D_v = 0$

for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

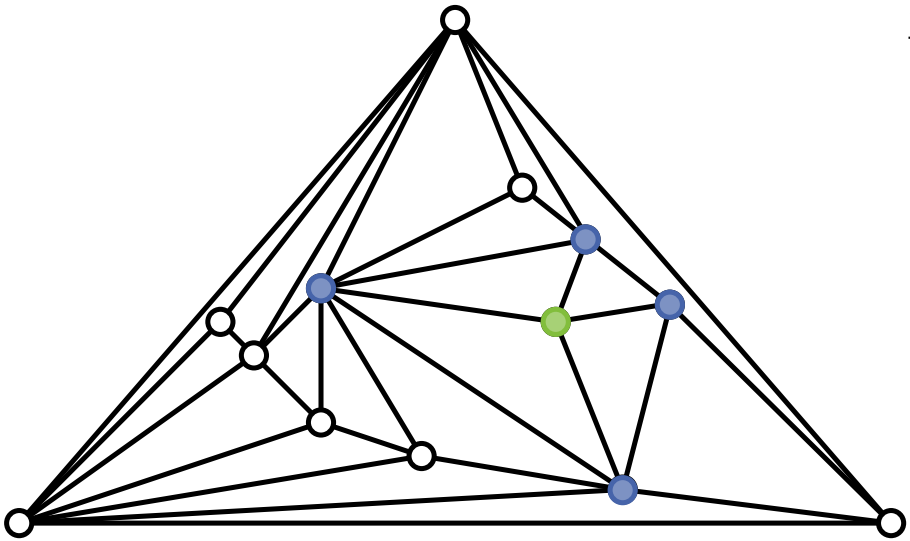
for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

if ADJAZENT(v, w)

then

$D_v = D_v + 1$

4 – Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

$D_v = 0$

for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

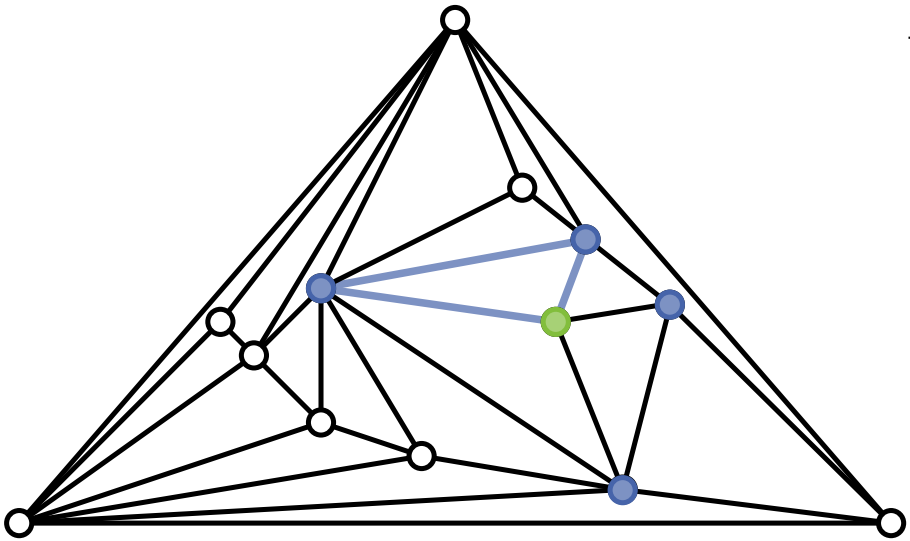
for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

if ADJAZENT(v, w)

then

$D_v = D_v + 1$

4 – Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

$D_v = 0$

for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

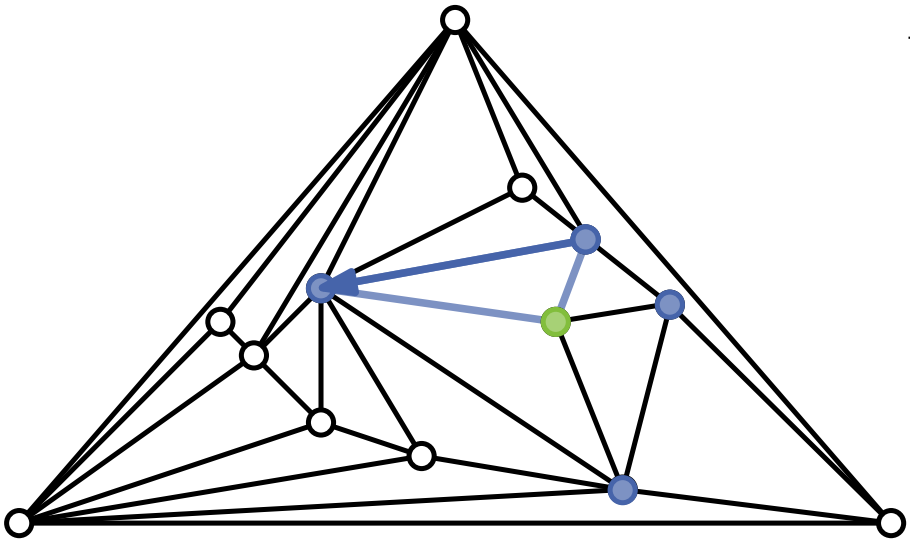
for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

if ADJAZENT(v, w)

then

$D_v = D_v + 1$

4 – Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

$D_v = 0$

for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

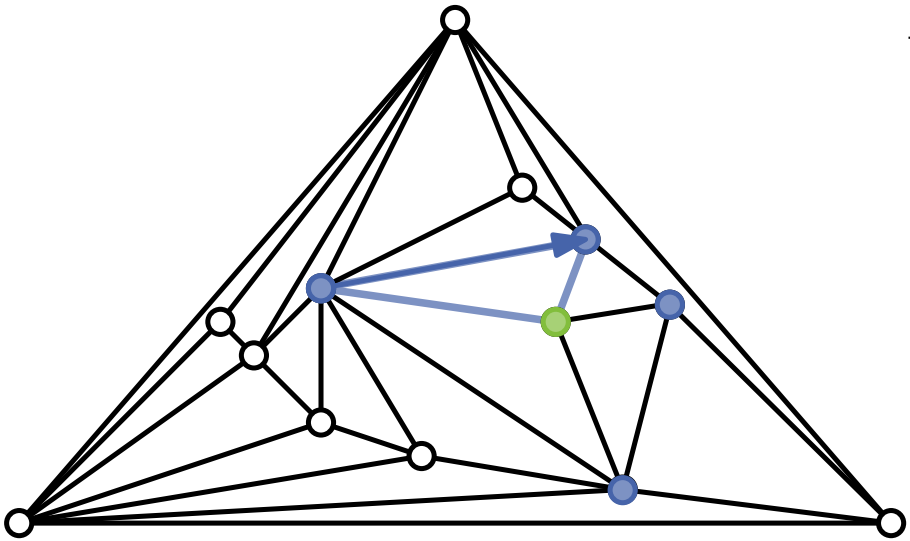
for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

if ADJAZENT(v, w)

then

$D_v = D_v + 1$

4 – Dreiecke Zählen



Algorithm DREIECKE

VORBERECHNUNG()

for $v \in V$ **do**

$D_v = 0$

for $u \in \mathcal{N}(v)$ **do**

for $w \in \mathcal{N}^+(u)$ **do**

if ADJAZENT(v, w)

then

$D_v = D_v + 1$

5 – MST

MST in erwartet $\mathcal{O}(n)$

- Gegeben: G ungerichteter, planarer, zusammenhängend Graph.

Ohne Beweis zu verwenden:

- Sei v ein Knoten und e eine Kante minimalen Gewichts inzident zu v. Dann gibt es einen Spannbaum minimalen Gewichts von G, der e enthält.
- Sei e eine Kante, die einem Spannbaum minimalen Gewichts von G vorkommt. Sei T ein Spannbaum minimalen Gewichts auf dem Graphen, den man durch die Kontraktion von e erhält. Dann ist $T \cup e$ ein Spannbaum minimalen Gewichts auf G.

5 – MST

Algorithm MST

$T \leftarrow \emptyset$

while G nicht leer **do**

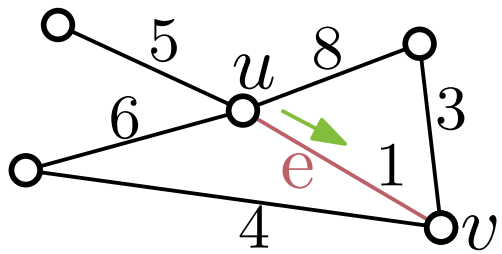
Wähle $v \in V$ mit $\deg(v) \leq 5$

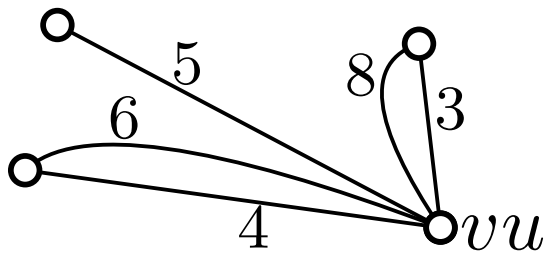
$e \leftarrow \text{argmin}_{e' \in \mathcal{N}(v)} w(e')$

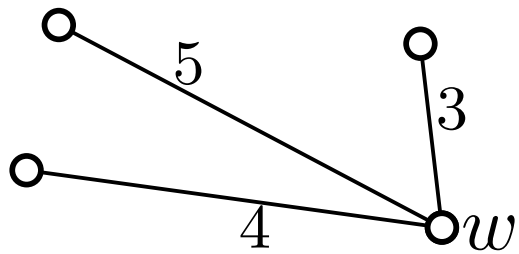
$T \leftarrow T \cup e$

Kontrahiere e

Entferne Multikanten und behalte nur die mit geringstem Gewicht







Erwartete Laufzeit

Kontraktion von $\{u, v\}$ mit $\deg(v) \leq 5$

- Pro Knoten eine Hashmap für seine Nachbarschaft
- Für $x \in \mathcal{N}(v)$ erkenne ob $x \in \mathcal{N}(u)$; in erwartet $\mathcal{O}(1)$
- Falls ja, behalte die Kante mit kleinerem Gewicht in Hashmap für u