

# Algorithmen für Planare Graphen

9. Mai 2019, Übung 2

Guido Brückner

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

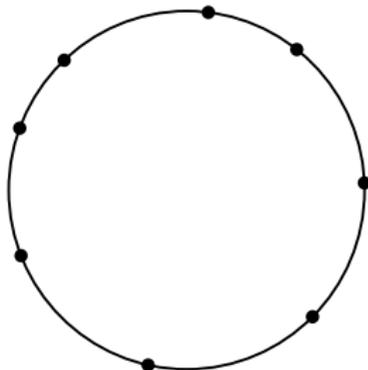


$G$  ist *außenplanar*.

- ⇔  $G$  lässt sich so planar einbetten, dass jeder Knoten auf der äußeren Facette liegt.
- ⇔ Fügt man einen Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten zu  $G$  hinzu, ist  $G$  immer noch planar.
- ①  $G$  ist genau dann außenplanar, wenn er keine Unterteilung von  $K_4$  oder  $K_{2,3}$  enthält.
- ② Ein außenplanarer Graph hat höchstens  $2n - 3$  Kanten.

# 1.1 – Außenplanare Graphen

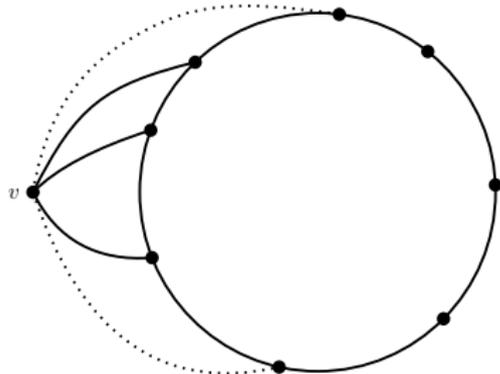
$G$  ist außenplanar  $\Rightarrow G$  enthält keine Unterteilung von  $K_4$  oder  $K_{2,3}$ .



- Betrachte außenplanare Einbettung von  $G$ .

# 1.1 – Außenplanare Graphen

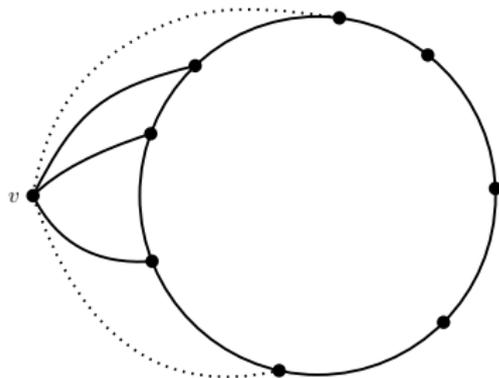
$G$  ist außenplanar  $\Rightarrow G$  enthält keine Unterteilung von  $K_4$  oder  $K_{2,3}$ .



- Betrachte außenplanare Einbettung von  $G$ .
- Füge Knoten  $v$  hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus  $G \rightarrow G'$ .
- $G'$  ist planar  $\Rightarrow G'$  enthält keine Unterteilung des  $K_5$  oder  $K_{3,3}$ .  
 $\Rightarrow G$  enthält keine Unterteilung des  $K_4$  oder  $K_{2,3}$ .

# 1.1 – Außenplanare Graphen

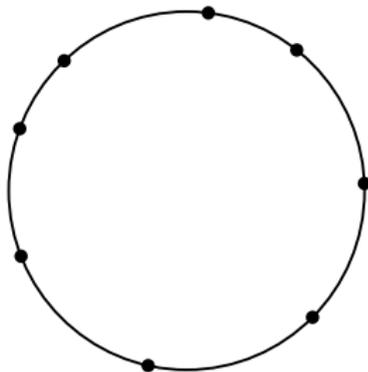
$G$  ist außenplanar  $\Leftrightarrow G$  enthält keine Unterteilung von  $K_4$  oder  $K_{2,3}$ .



- Füge Knoten  $v$  hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus  $G \rightarrow G'$ .
- $G'$  enthält weder  $K_5$  noch  $K_{3,3}$  als Unterteilung.
- $\Rightarrow G'$  ist planar.
- Betrachte planare Einbettung von  $G'$  mit  $v$  auf der äußeren Facette.

# 1.1 – Außenplanare Graphen

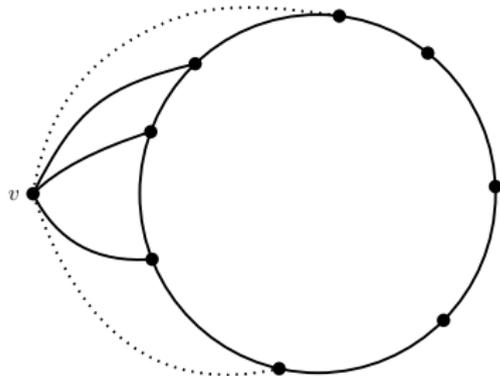
$G$  ist außenplanar  $\Leftrightarrow G$  enthält keine Unterteilung von  $K_4$  oder  $K_{2,3}$ .



- Füge Knoten  $v$  hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten aus  $G \rightarrow G'$ .
- $G'$  enthält weder  $K_5$  noch  $K_{3,3}$  als Unterteilung.
- $\Rightarrow G'$  ist planar.
- Betrachte planare Einbettung von  $G'$  mit  $v$  auf der äußeren Facette.
- Lösche  $v \Rightarrow$  alle Knoten von  $G$  liegen auf der äußeren Facette.

## 1.2 – Außenplanare Graphen

Ein außenplanarer Graph  $G$  enthält höchstens  $2n - 3$  Kanten.

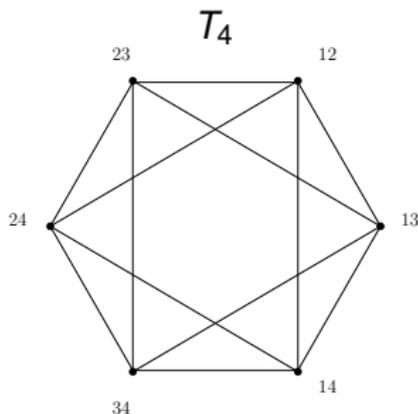


- Füge Knoten  $v$  hinzu und verbinde ihn mit allen Knoten von  $G \rightarrow G'$ .
- $G'$  hat  $m' = m + n$  Kanten und  $n' = n + 1$  Knoten.
- Da  $G'$  planar ist gilt:  $m' \leq 3n' - 6$
- Also:  $n + m \leq 3(n + 1) - 6$   
 $\Rightarrow m \leq 2n - 3$

## 2.1 – Der Petersengraph

Definition:  $T_n$

- Die Knoten sind alle zweielementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ .
- Zwei Knoten sind genau dann verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist.

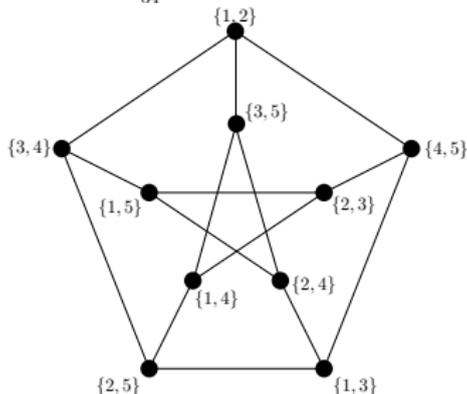
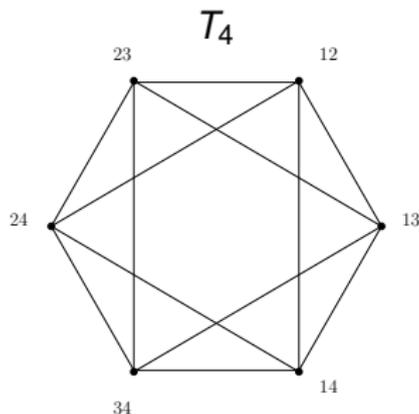


## 2.1 – Der Petersengraph

Definition:  $T_n$

- Die Knoten sind alle zweielementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ .
- Zwei Knoten sind genau dann verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist.

Der Komplementgraph  $P$  von  $T_5$  heißt Petersengraph.

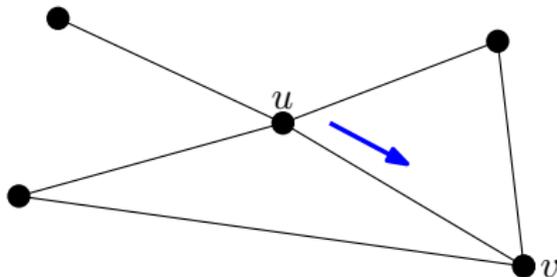


Es gibt zwei Varianten des Satzes von Kuratowski:

- Ein einfacher Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung von  $K_{3,3}$  noch eine Unterteilung von  $K_5$  als Teilgraph enthält. (Topologischer Minor)
- Ein einfacher Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er weder  $K_{3,3}$  noch  $K_5$  als Minor enthält. (Wagner)

Kontraktion der Kante  $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante  $e$ .
- Identifiziere  $u$  und  $v$ .
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



Minor

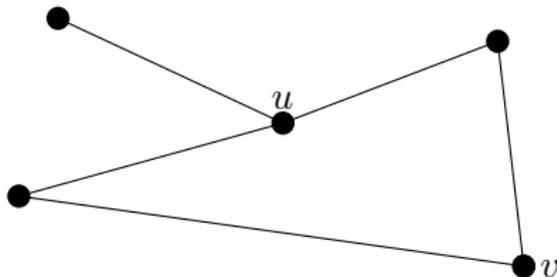
- $G$  ist Minor von  $H$ , wenn  $H$  einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion  $G$  hervorgeht.

Topologischer Minor

- $G$  ist topologischer Minor von  $H$ , wenn  $H$  einen Unterteilungsgraphen von  $G$  enthält.

Kontraktion der Kante  $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante  $e$ .
- Identifiziere  $u$  und  $v$ .
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



Minor

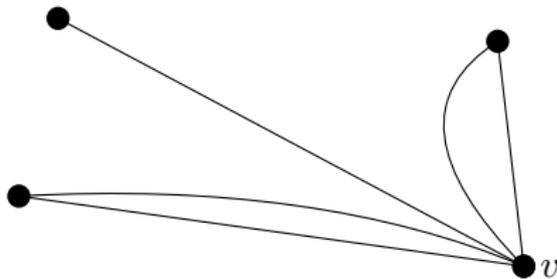
- $G$  ist Minor von  $H$ , wenn  $H$  einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion  $G$  hervorgeht.

Topologischer Minor

- $G$  ist topologischer Minor von  $H$ , wenn  $H$  einen Unterteilungsgraphen von  $G$  enthält.

Kontraktion der Kante  $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante  $e$ .
- Identifiziere  $u$  und  $v$ .
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



Minor

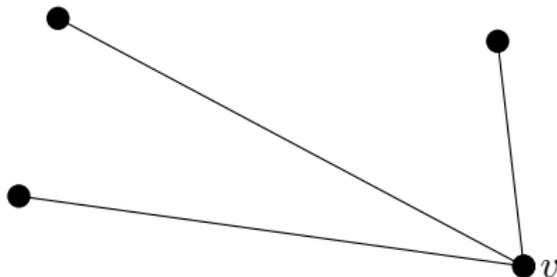
- $G$  ist Minor von  $H$ , wenn  $H$  einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion  $G$  hervorgeht.

Topologischer Minor

- $G$  ist topologischer Minor von  $H$ , wenn  $H$  einen Unterteilungsgraphen von  $G$  enthält.

Kontraktion der Kante  $e = \{u, v\}$

- Lösche Kante  $e$ .
- Identifiziere  $u$  und  $v$ .
- Lösche entstehende Mehrfachkanten.



Minor

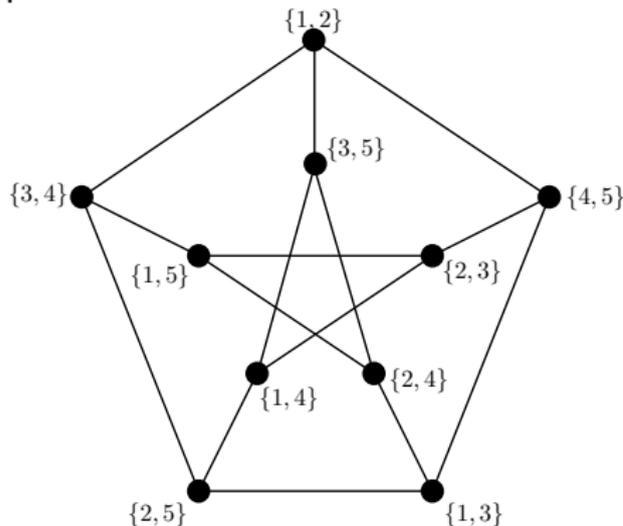
- $G$  ist Minor von  $H$ , wenn  $H$  einen Teilgraphen enthält, aus dem durch Kantenkontraktion  $G$  hervorgeht.

Topologischer Minor

- $G$  ist topologischer Minor von  $H$ , wenn  $H$  einen Unterteilungsgraphen von  $G$  enthält.

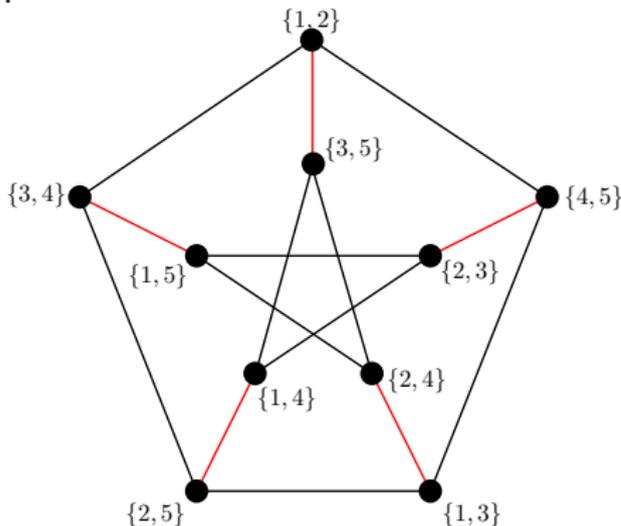
## 2.2 – Der Petersengraph

Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



## 2.2 – Der Petersengraph

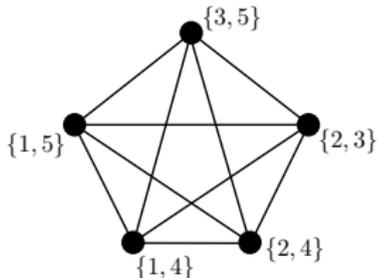
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält  $K_5$  als Minor.

## 2.2 – Der Petersengraph

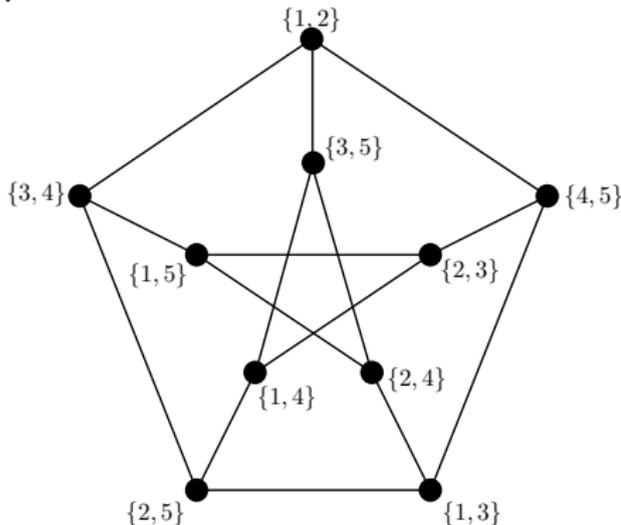
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält  $K_5$  als Minor.

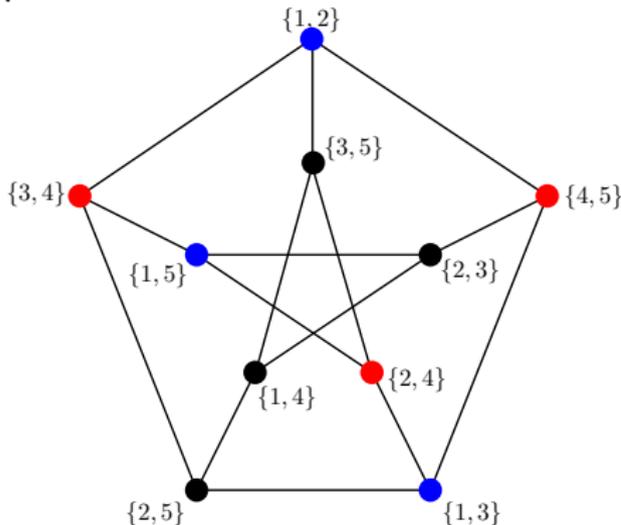
## 2.2 – Der Petersengraph

Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



## 2.2 – Der Petersengraph

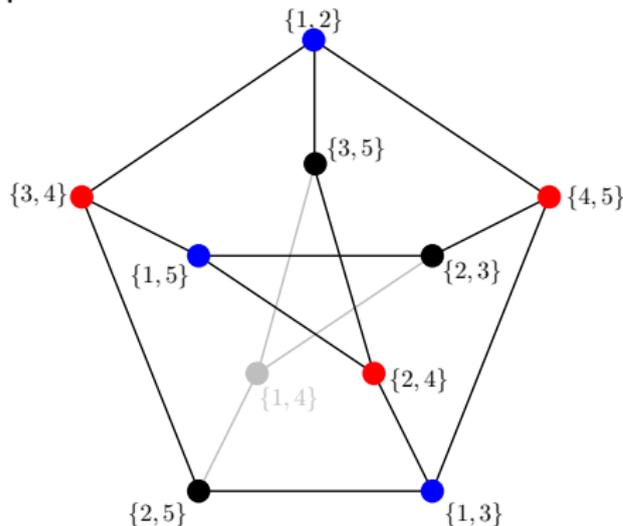
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des  $K_{3,3}$ .

## 2.2 – Der Petersengraph

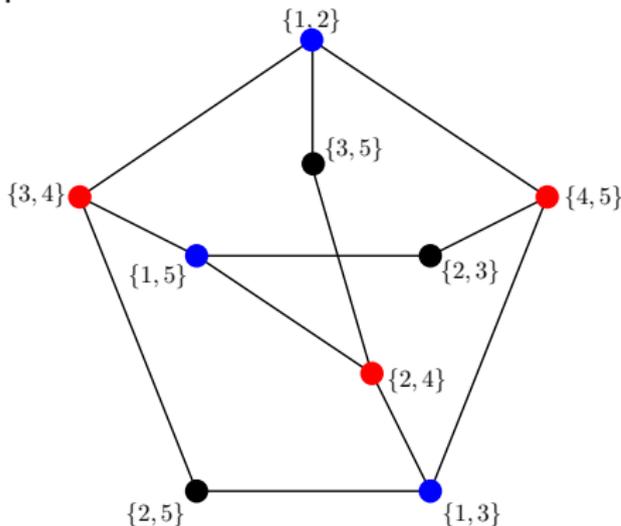
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des  $K_{3,3}$ .

## 2.2 – Der Petersengraph

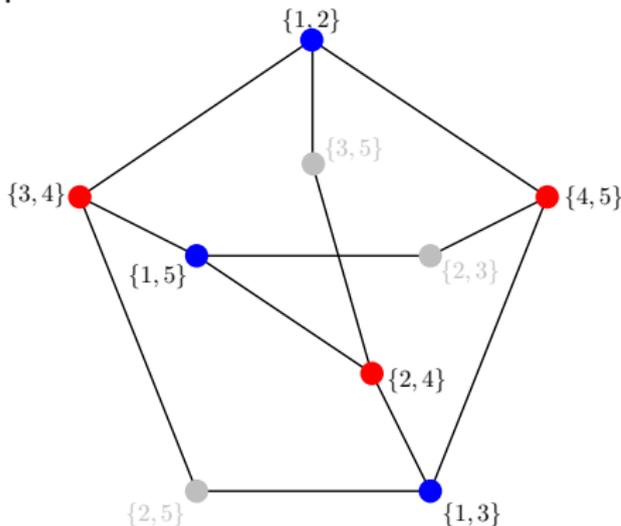
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des  $K_{3,3}$ .

## 2.2 – Der Petersengraph

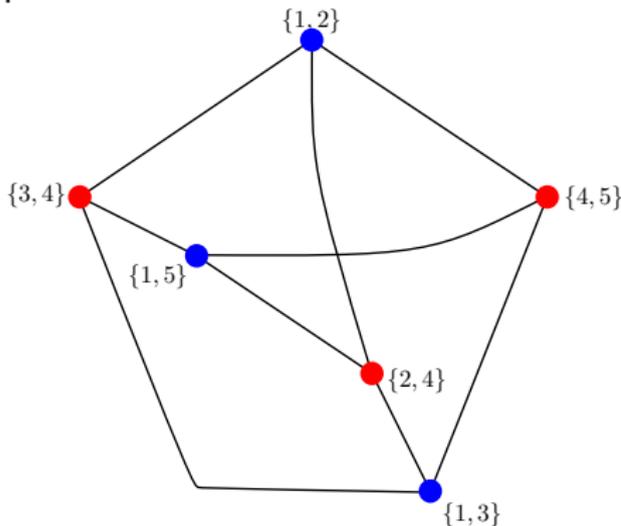
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des  $K_{3,3}$ .

## 2.2 – Der Petersengraph

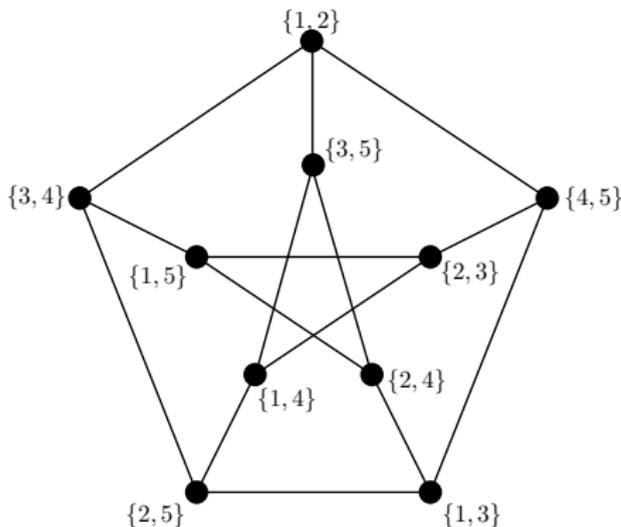
Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Enthält eine Unterteilung des  $K_{3,3}$ .

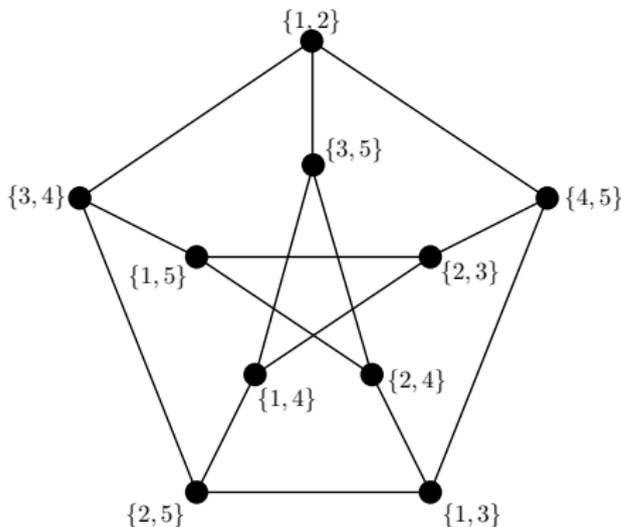
## 2.2 – Der Petersengraph

Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



## 2.2 – Der Petersengraph

Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.



- Der kürzeste Kreis im Petersengraph hat Länge 5.
- Jede Kante gehört zu einem Kreis.
- Angenommen  $P$  wäre planar.
  - Jede Facette wird durch mindestens 5 Kanten begrenzt.
  - $f = m - n + 2 = 15 - 10 + 2 = 7$
  - $P$  hat mindestens  $(5 \cdot 7)/2 = 17$  Kanten.
- $P$  hat aber nur 15 Kanten. ⚡

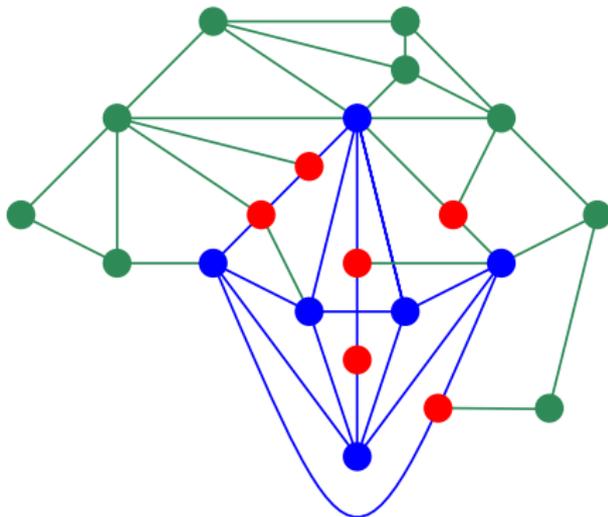
## 2.3 – Der Petersengraph

Wenn ein einfacher Graph  $H$  eine Unterteilung eines einfachen Graphen  $G$  als Teilgraph enthält, dann enthält  $H$  den Graphen  $G$  auch als Minor.

## 2.3 – Der Petersengraph

Wenn ein einfacher Graph  $H$  eine Unterteilung eines einfachen Graphen  $G$  als Teilgraph enthält, dann enthält  $H$  den Graphen  $G$  auch als Minor.

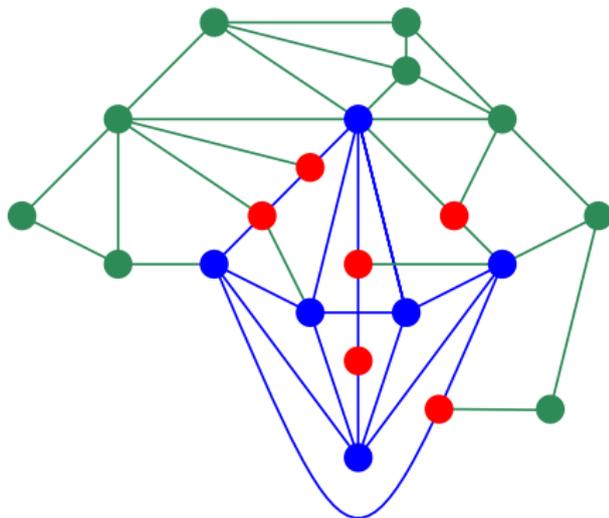
- Angenommen  $H$  enthält Unterteilung  $U$  von  $G$ .



## 2.3 – Der Petersengraph

Wenn ein einfacher Graph  $H$  eine Unterteilung eines einfachen Graphen  $G$  als Teilgraph enthält, dann enthält  $H$  den Graphen  $G$  auch als Minor.

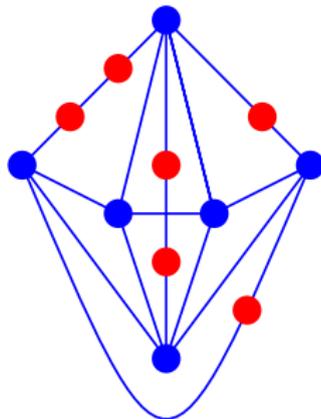
- Angenommen  $H$  enthält Unterteilung  $U$  von  $G$ .
- Lösche alle Kanten aus  $H$  die nicht zur Unterteilung von  $G$  gehören.



## 2.3 – Der Petersengraph

Wenn ein einfacher Graph  $H$  eine Unterteilung eines einfachen Graphen  $G$  als Teilgraph enthält, dann enthält  $H$  den Graphen  $G$  auch als Minor.

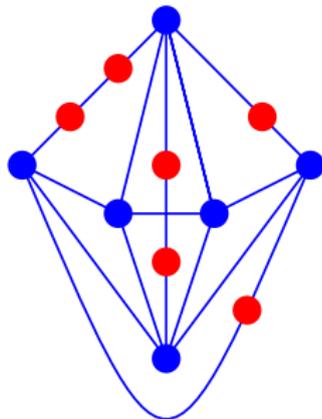
- Angenommen  $H$  enthält Unterteilung  $U$  von  $G$ .
- Lösche alle Kanten aus  $H$  die nicht zur Unterteilung von  $G$  gehören.
- Es gibt Knoten mit Grad 2, die eingefügt wurden, um  $U$  aus  $G$  zu erhalten.



## 2.3 – Der Petersengraph

Wenn ein einfacher Graph  $H$  eine Unterteilung eines einfachen Graphen  $G$  als Teilgraph enthält, dann enthält  $H$  den Graphen  $G$  auch als Minor.

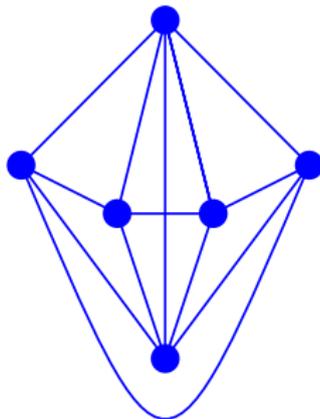
- Angenommen  $H$  enthält Unterteilung  $U$  von  $G$ .
- Lösche alle Kanten aus  $H$  die nicht zur Unterteilung von  $G$  gehören.
- Es gibt Knoten mit Grad 2, die eingefügt wurden, um  $U$  aus  $G$  zu erhalten.
- Kontrahiere jeden dieser Knoten mit einem seiner Nachbarn.



## 2.3 – Der Petersengraph

Wenn ein einfacher Graph  $H$  eine Unterteilung eines einfachen Graphen  $G$  als Teilgraph enthält, dann enthält  $H$  den Graphen  $G$  auch als Minor.

- Angenommen  $H$  enthält Unterteilung  $U$  von  $G$ .
- Lösche alle Kanten aus  $H$  die nicht zur Unterteilung von  $G$  gehören.
- Es gibt Knoten mit Grad 2, die eingefügt wurden, um  $U$  aus  $G$  zu erhalten.
- Kontrahiere jeden dieser Knoten mit einem seiner Nachbarn.



## 2.4 – Der Petersengraph

Wenn ein einfacher Graph  $H$  einen Graphen  $G$  als Minor enthält, dann enthält  $H$  auch eine Unterteilung von  $G$  als Teilgraph.

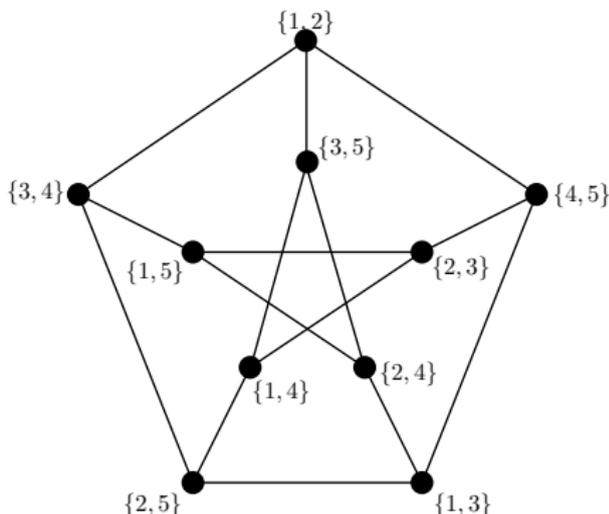
## 2.4 – Der Petersengraph

Wenn ein einfacher Graph  $H$  einen Graphen  $G$  als Minor enthält, dann enthält  $H$  auch eine Unterteilung von  $G$  als Teilgraph. Stimmt nicht!

## 2.4 – Der Petersengraph

Wenn ein einfacher Graph  $H$  einen Graphen  $G$  als Minor enthält, dann enthält  $H$  auch eine Unterteilung von  $G$  als Teilgraph. Stimmt nicht!

- Der Petersen-Graph  $P$  enthält  $K_5$  als Minor.
- Unterteilung erhält den Knotengrad der ursprünglichen Knoten.
- Würde  $P$  den Graph  $K_5$  als Unterteilung enthalten, müsste  $P$  mindestens 5 Knoten mit Grad 4 haben.



## 3.1 – Färbung von Graphen

Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad  $\Delta$  gilt  $\chi(G) \leq \Delta + 1$ .

## 3.1 – Färbung von Graphen

Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad  $\Delta$  gilt  $\chi(G) \leq \Delta + 1$ .

- Färbe die Knoten iterativ.
- Gib jedem Knoten eine Farbe, die noch keiner seiner Nachbarn hat.
- Es gibt maximal  $\Delta$  Nachbarn.
- $\Rightarrow$  Es gibt immer eine Farbe, die noch nicht verwendet wird.

## 3.2 – Färbung von Graphen

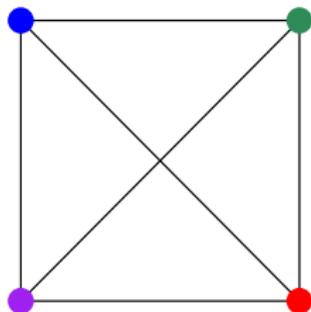
Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Versuchen Sie Familien von Graphen anzugeben, für die  $\chi(G) = \Delta + 1$  gilt.

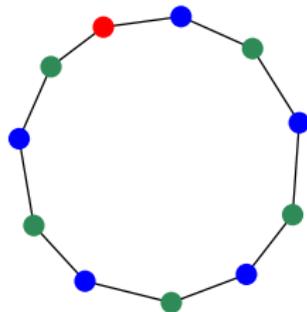
## 3.2 – Färbung von Graphen

Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Versuchen Sie Familien von Graphen anzugeben, für die  $\chi(G) = \Delta + 1$  gilt.



$K_n$



Kreise ungerader Länge

## 3.3 – Färbung von Graphen

Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Zeigen Sie: Ein Graph  $G$  ist genau dann 2-färbbar, wenn  $G$  keine Kreise ungerader Länge enthält.

## 3.3 – Färbung von Graphen

Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Zeigen Sie: Ein Graph  $G$  ist genau dann 2-färbbar, wenn  $G$  keine Kreise ungerader Länge enthält.

“ $\Rightarrow$ ”

- Angenommen wir haben eine 2-Färbung von  $G$ , mit Knotenmenge  $R$  ist rot und Knotenmenge  $B$  ist blau.
- Jede Kante führt von  $R$  nach  $B$  oder von  $B$  nach  $R$ .
- Um mit einem Pfad durch  $G$  am Startknoten zu enden, muss man eine gerade Anzahl an Schritten gemacht haben.

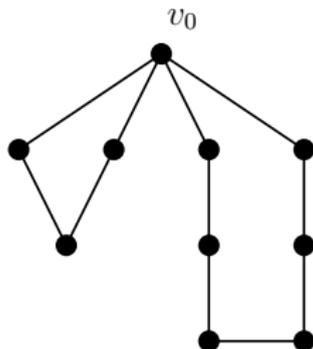
## 3.3 – Färbung von Graphen

Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Zeigen Sie: Ein Graph  $G$  ist genau dann 2-färbbar, wenn  $G$  keine Kreise ungerader Länge enthält.

“ $\Leftarrow$ ”

- Angenommen jeder Kreis in  $G$  hat gerade Länge.
- Für jede Zusammenhangskomponente:
  - Wähle beliebigen Knoten  $v_0$ .
  - $d(v)$ : Abstand von  $v$  zu  $v_0$ .
  - Färbe  $v$  mit  $d(v)$  gerade blau, sonst rot.
  - Wäre die Färbung ungültig, wird ein Kreis ungerader Länge induziert.



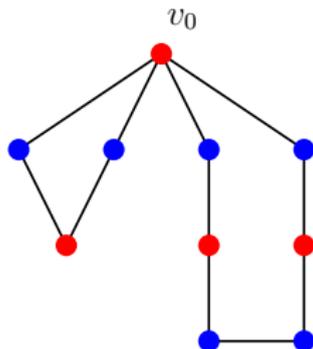
## 3.3 – Färbung von Graphen

Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Zeigen Sie: Ein Graph  $G$  ist genau dann 2-färbbar, wenn  $G$  keine Kreise ungerader Länge enthält.

“ $\Leftarrow$ ”

- Angenommen jeder Kreis in  $G$  hat gerade Länge.
- Für jede Zusammenhangskomponente:
  - Wähle beliebigen Knoten  $v_0$ .
  - $d(v)$ : Abstand von  $v$  zu  $v_0$ .
  - Färbe  $v$  mit  $d(v)$  gerade blau, sonst rot.
  - Wäre die Färbung ungültig, wird ein Kreis ungerader Länge induziert.



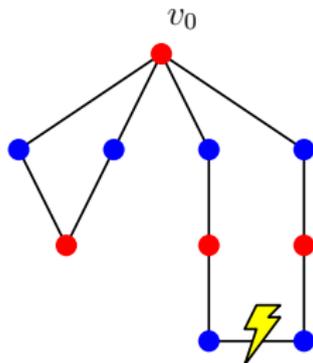
## 3.3 – Färbung von Graphen

Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Zeigen Sie: Ein Graph  $G$  ist genau dann 2-färbbar, wenn  $G$  keine Kreise ungerader Länge enthält.

“ $\Leftarrow$ ”

- Angenommen jeder Kreis in  $G$  hat gerade Länge.
- Für jede Zusammenhangskomponente:
  - Wähle beliebigen Knoten  $v_0$ .
  - $d(v)$ : Abstand von  $v$  zu  $v_0$ .
  - Färbe  $v$  mit  $d(v)$  gerade blau, sonst rot.
  - Wäre die Färbung ungültig, wird ein Kreis ungerader Länge induziert.



## 4.1 – Verschiedene Bäume

In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  und Höhe höchstens  $2\sqrt{n}$ .

## 4.1 – Verschiedene Bäume

In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  und Höhe höchstens  $2\sqrt{n}$ .

- Stimmt nicht!
- Betrachte Pfad mit 25 Knoten.
- Breitensuchbaum hat mindestens Höhe 12.
- Nach Behauptung dürfte er nur Höhe 10 haben.



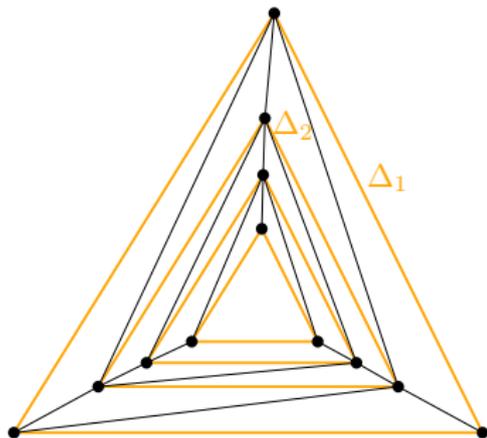
## 4.1 – Verschiedene Bäume

In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  und Höhe höchstens  $2\sqrt{n}$ .  
Und für Triangulierte Graphen?

## 4.1 – Verschiedene Bäume

In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  und Höhe höchstens  $2\sqrt{n}$ .  
Und für Triangulierte Graphen? Stimmt auch nicht!

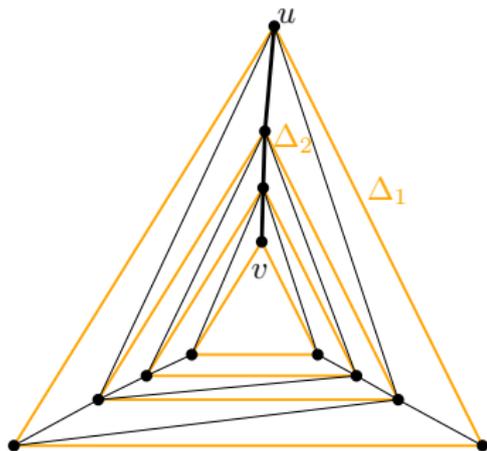
- Betrachte ineinander geschachtelte Dreiecke  $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ , sodass  $\Delta_j$  die Dreiecke  $\Delta_{j-1}$  und  $\Delta_{j+1}$  trennt.



## 4.1 – Verschiedene Bäume

In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  und Höhe höchstens  $2\sqrt{n}$ .  
Und für Triangulierte Graphen? Stimmt auch nicht!

- Betrachte ineinander geschachtelte Dreiecke  $\Delta_1, \dots, \Delta_s$ , sodass  $\Delta_i$  die Dreiecke  $\Delta_{i-1}$  und  $\Delta_{i+1}$  trennt.
- Der kürzeste Pfad zwischen  $u$  und  $v$  hat Länge  $s - 1$ .
- Für jeden Breitensuchbaum mit Höhe  $h$  gilt:  
$$h \geq \frac{s-1}{2} = \frac{\frac{n}{3}-1}{2} = \frac{n}{6} - \frac{1}{2}$$
- Für hinreichend große  $n$  gilt:  
$$\frac{n}{6} - \frac{1}{2} > 2\sqrt{n}$$



## Satz (Planar-Separator-Theorem)

[Lipton & Tarjan 1977]

Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen  $G = (V, E)$ ,  $n = |V| \geq 5$ , kann so in drei Mengen  $V_1, V_2, S \subseteq V$  partitioniert werden, dass

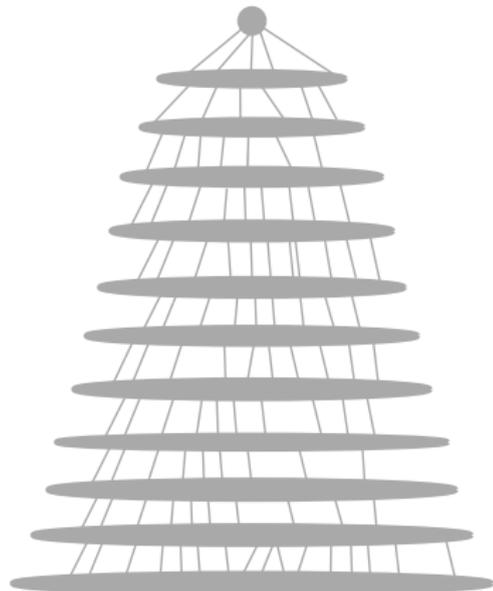
- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$ ,
- $S$  ist ein Separator, der  $V_1$  von  $V_2$  trennt,
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.

# Beweis Planar-Separator-Theorem

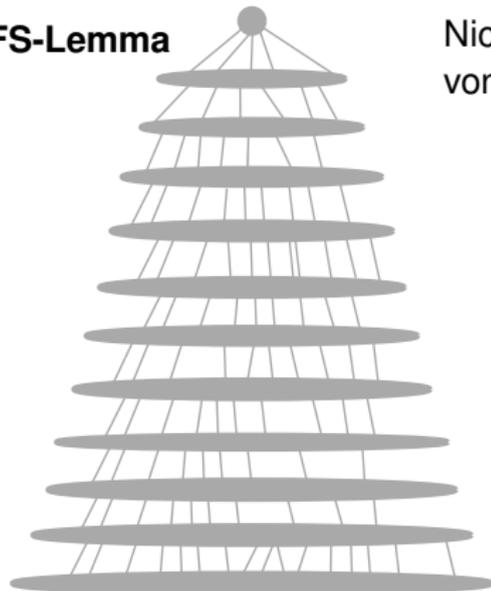
- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.

## BFS-Lemma

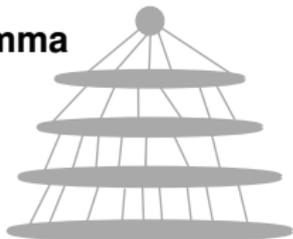


Nicht-Baumkanten verbinden nur Knoten von gleichen oder benachbarten Leveln.

# Beweis Planar-Separator-Theorem

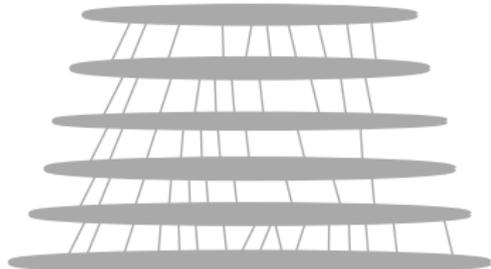
- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.

## BFS-Lemma



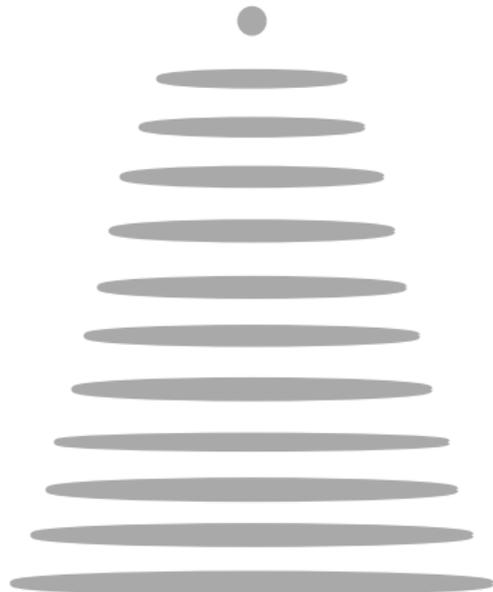
Nicht-Baumkanten verbinden nur Knoten von gleichen oder benachbarten Leveln.

⇒ Jedes Level ist ein Separator.



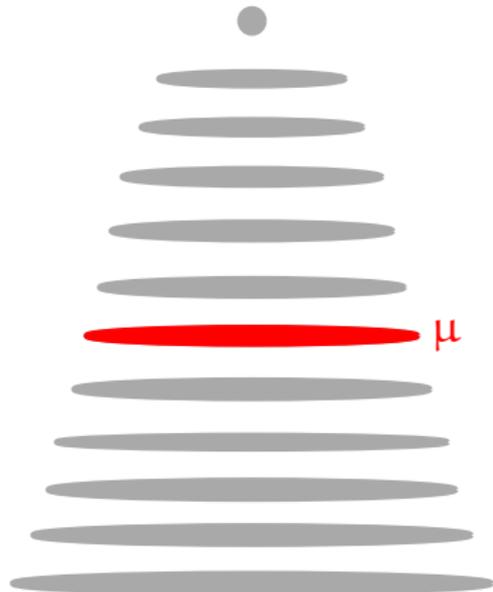
# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



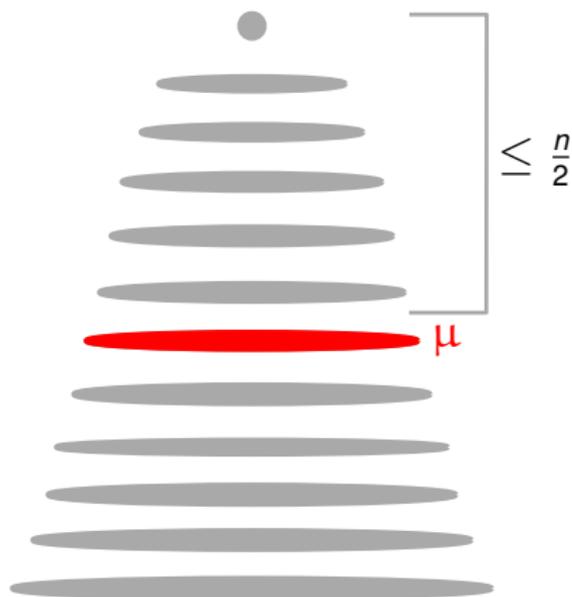
# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



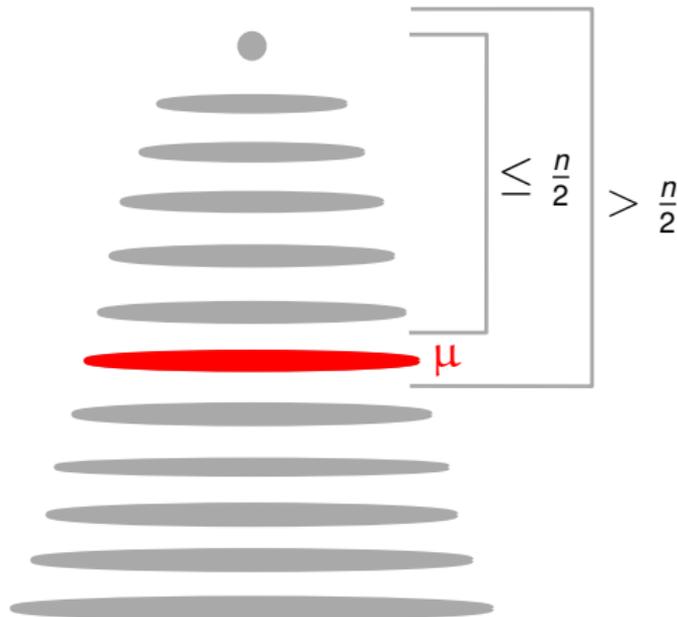
# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



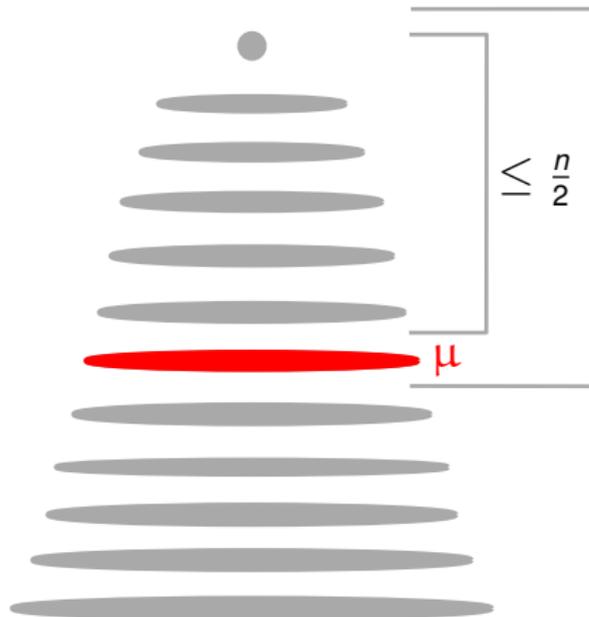
# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



# Beweis Planar-Separator-Theorem

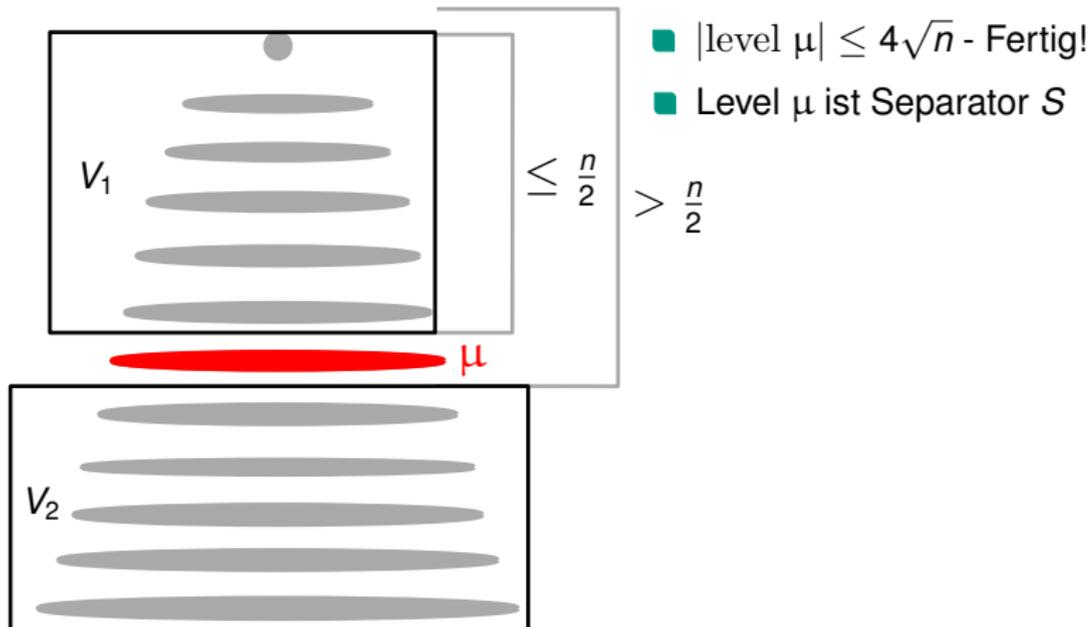
- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- $|\text{level } \mu| \leq 4\sqrt{n}$  - Fertig!

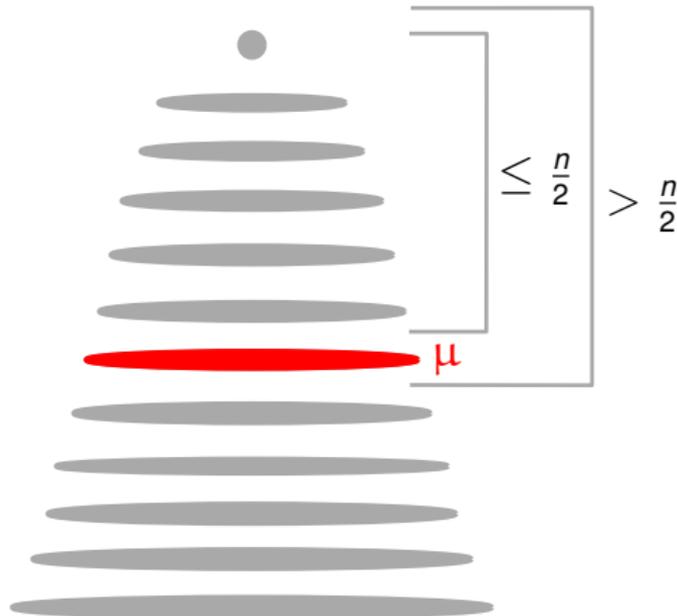
# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



# Beweis Planar-Separator-Theorem

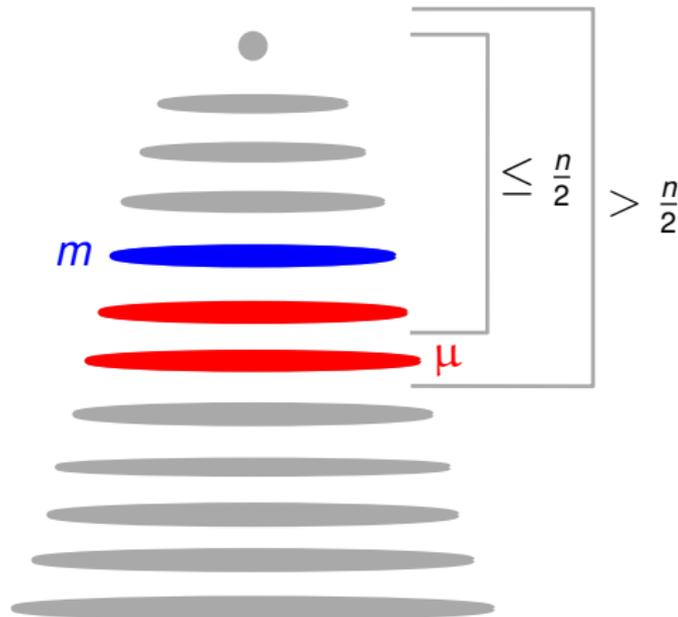
- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

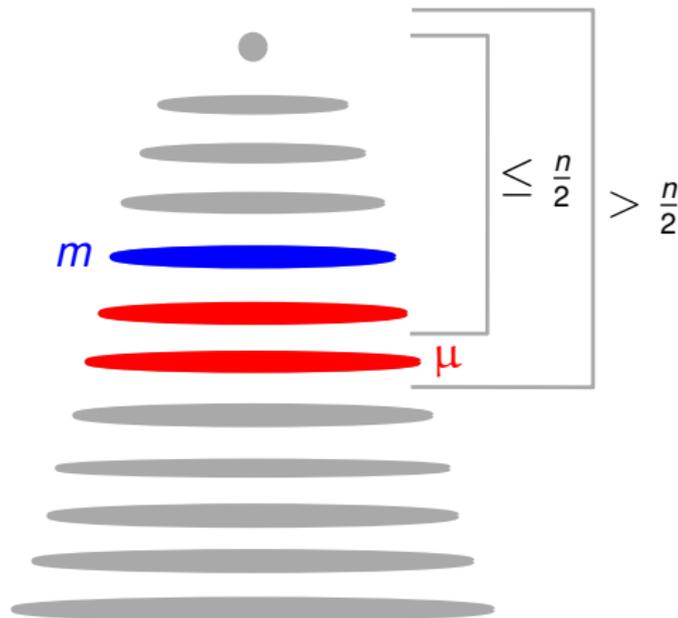
- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

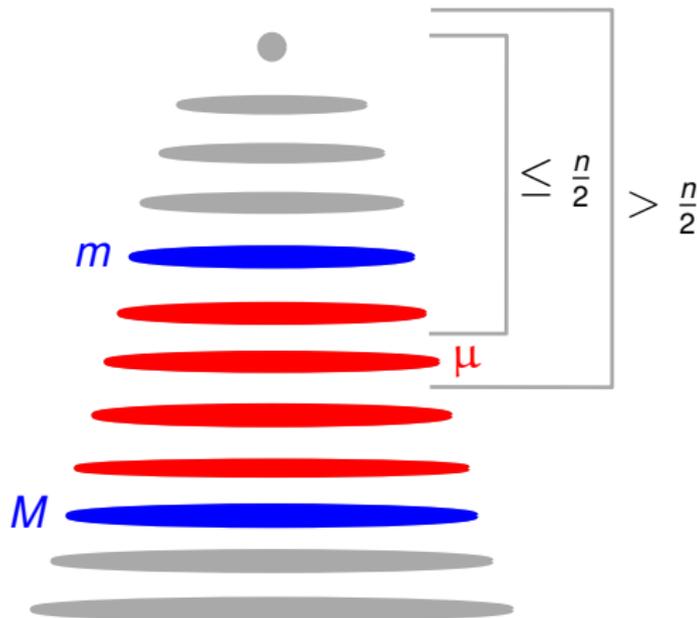
- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

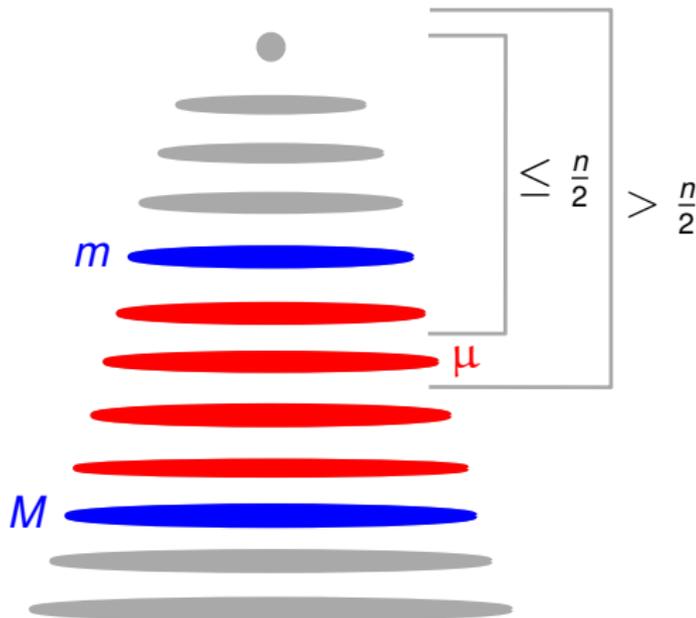
- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

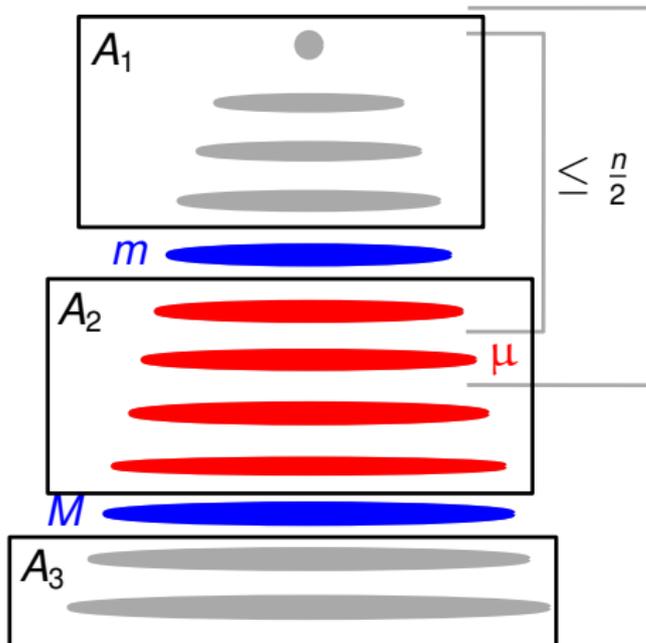
- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

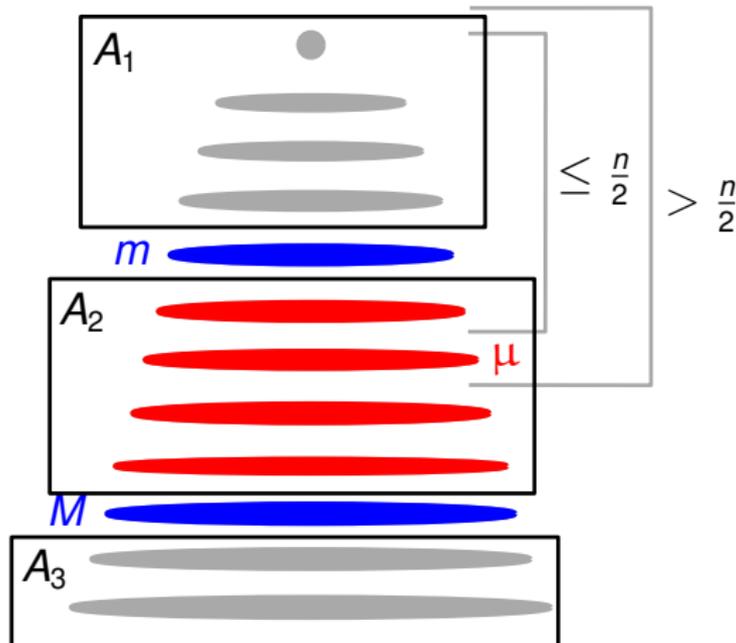
- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

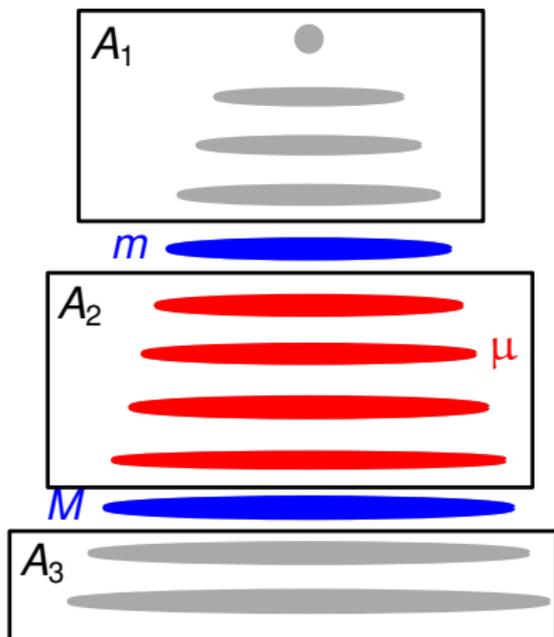
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

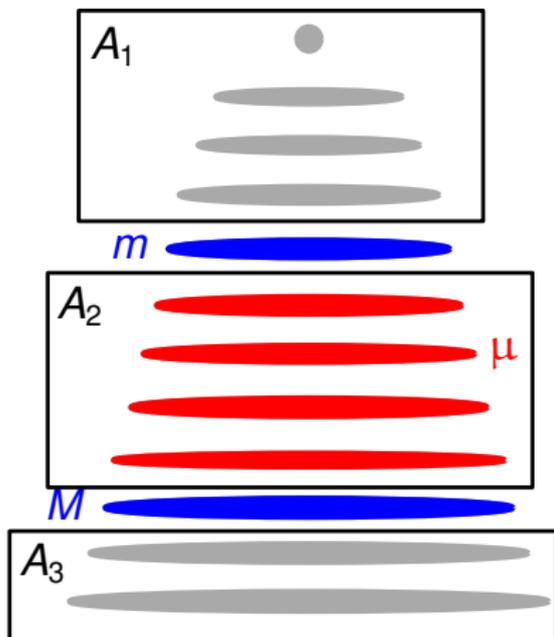
- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

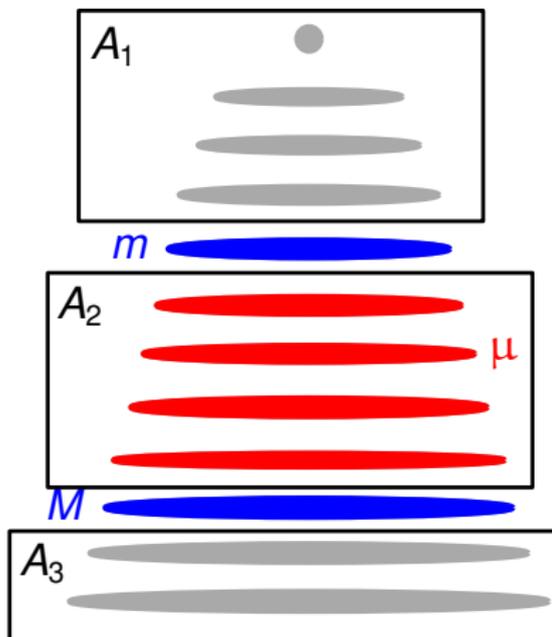
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 1:**  $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

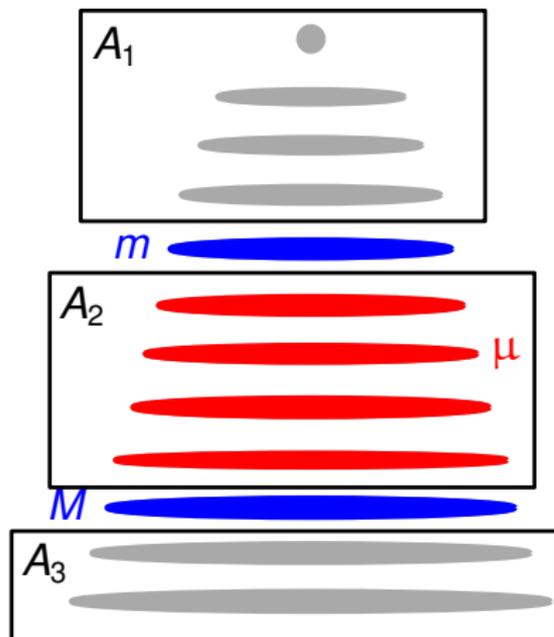
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 1:**  $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$  ist Separator

# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

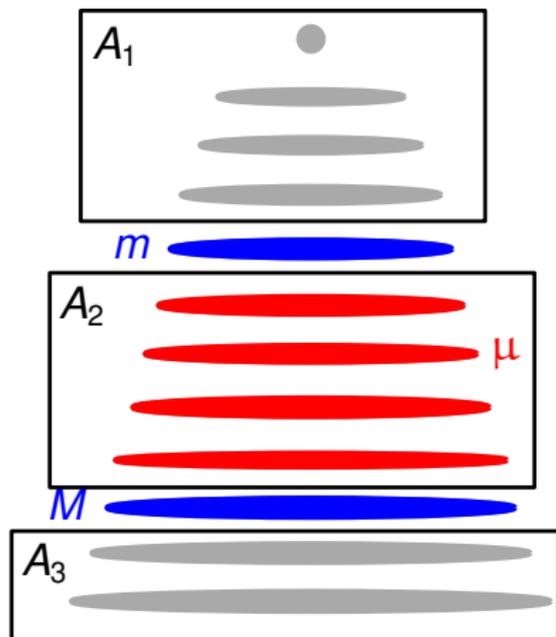
**Fall 1:**  $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$  ist Separator

- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 1:**  $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

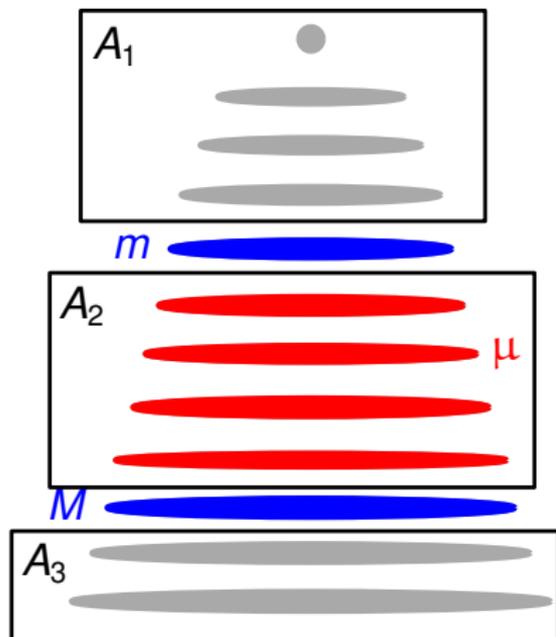
- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$  ist Separator

- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$

- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 1:**  $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

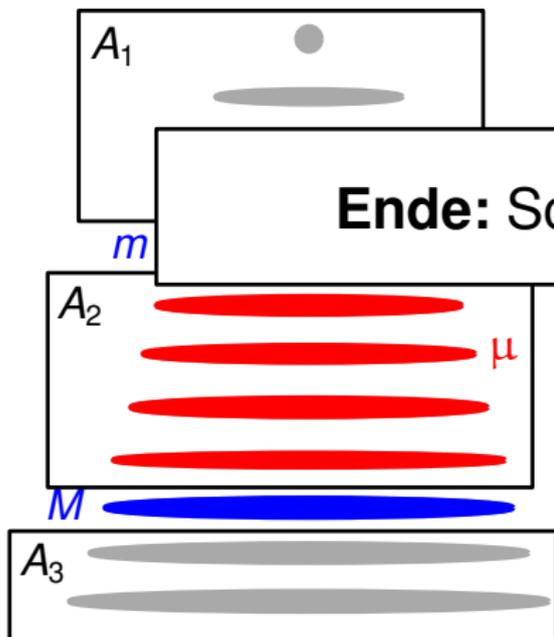
- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$  ist Separator

- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$

- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1), |V_2| < \frac{2}{3}n$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von  $G$  und ein BFS-Baum  $T$  mit beliebiger Wurzel.



- Sei  $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

$|\text{level } M| < \sqrt{n}$

$|A_1| \leq \frac{n}{3}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 1:**  $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$  ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1), |V_2| < \frac{2}{3}n$

# Beweis Planar-Separator-Theorem



$m$



$M$

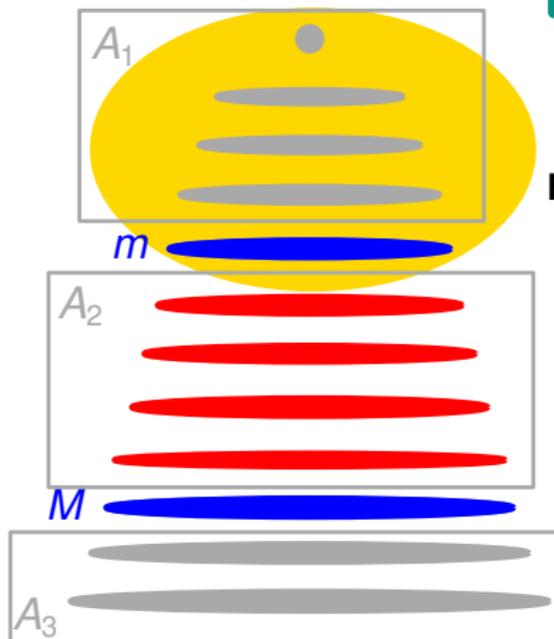


■  $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

■  $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

# Beweis Planar-Separator-Theorem



- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

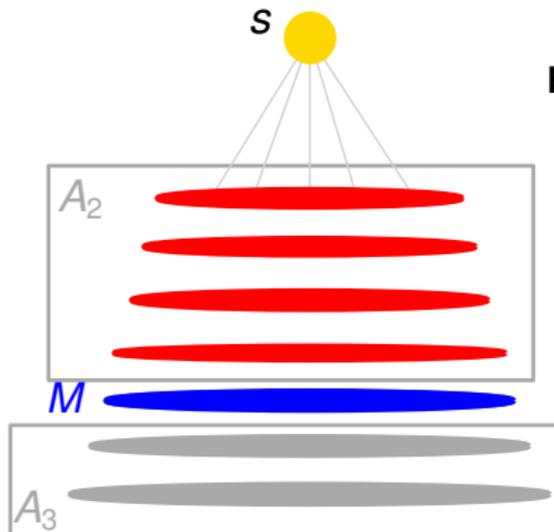
**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

# Beweis Planar-Separator-Theorem

- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

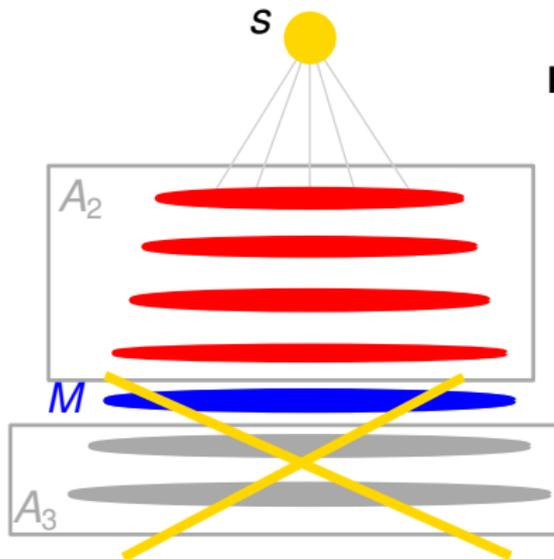


# Beweis Planar-Separator-Theorem

- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

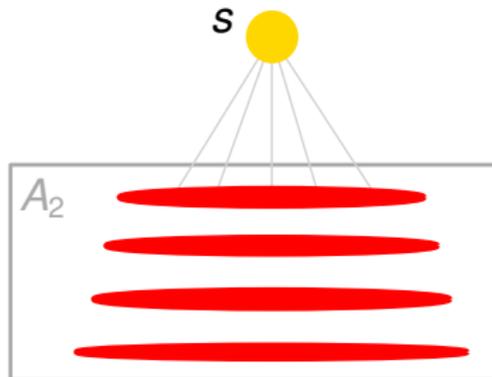


# Beweis Planar-Separator-Theorem

- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

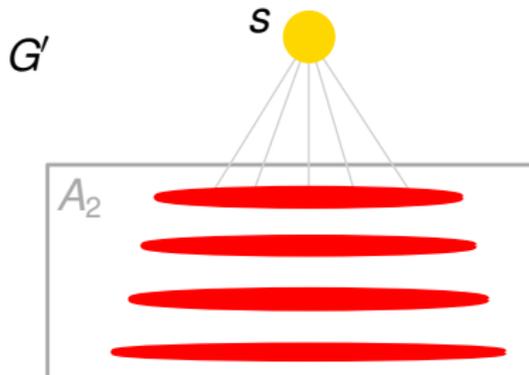


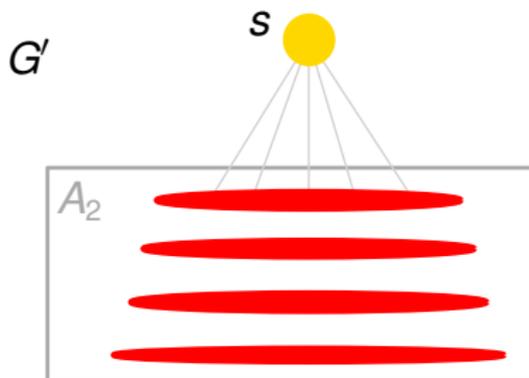
# Beweis Planar-Separator-Theorem

- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$



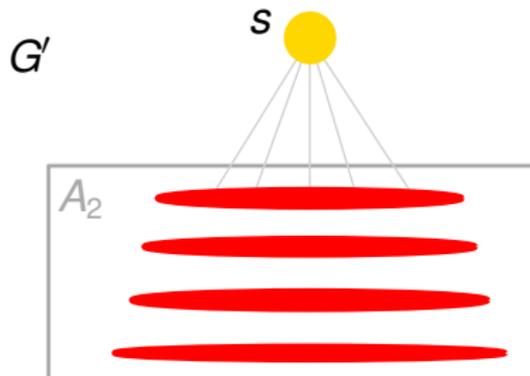


- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum  $T$  induziert BFS-Baum  $T'$  in  $G'$



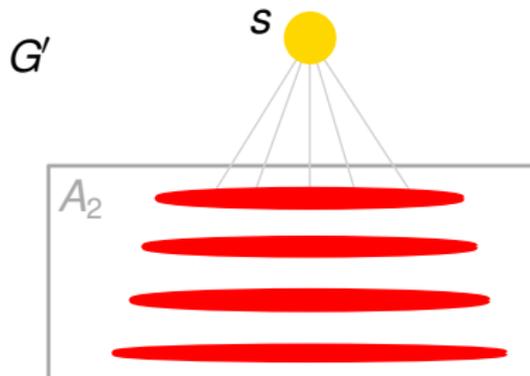
- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum  $T$  induziert BFS-Baum  $T'$  in  $G'$

- $\leq \sqrt{n}$  rote levels



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$ ,  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

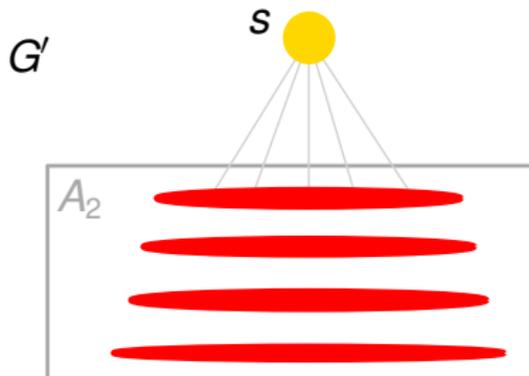
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum  $T$  induziert BFS-Baum  $T'$  in  $G'$

- $\leq \sqrt{n}$  rote levels

- $T'$  hat  $\leq \sqrt{n}$  levels



- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum  $T$  induziert BFS-Baum  $T'$  in  $G'$

- $\leq \sqrt{n}$  rote levels

- $T'$  hat  $\leq \sqrt{n}$  levels

- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf  $G'$  und  $T'$  an und bekommen  $S'$ ,  $U_1$ ,  $U_2$

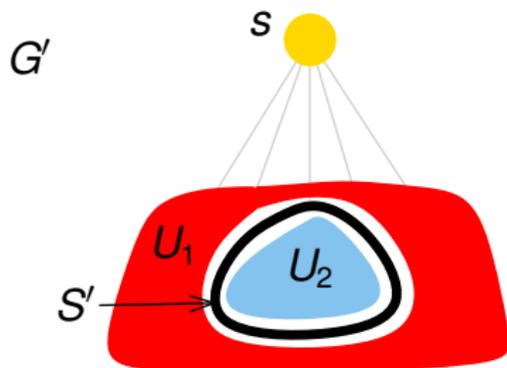
$$\blacksquare \quad |\text{rote level}| > 4\sqrt{n}, \quad |\text{level } m| < \sqrt{n},$$

**Lemma** Sei  $G = (V, E)$  ein planarer, zusammenhängender Graph mit  $|V| = n \geq 5$  und  $T = (V, E(T))$  ein aufspannender Baum von  $G$  mit Wurzel  $w$  und Höhe  $h$ . Die Knotenmenge von  $G$  kann so in drei Mengen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $S$  partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$ ,
- $S$  Separator, der  $V_1$  von  $V_2$  trennt,
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$



- $T'$  hat  $\leq \sqrt{n}$  levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf  $G'$  und  $T'$  an und bekommen  $S', U_1, U_2$



- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

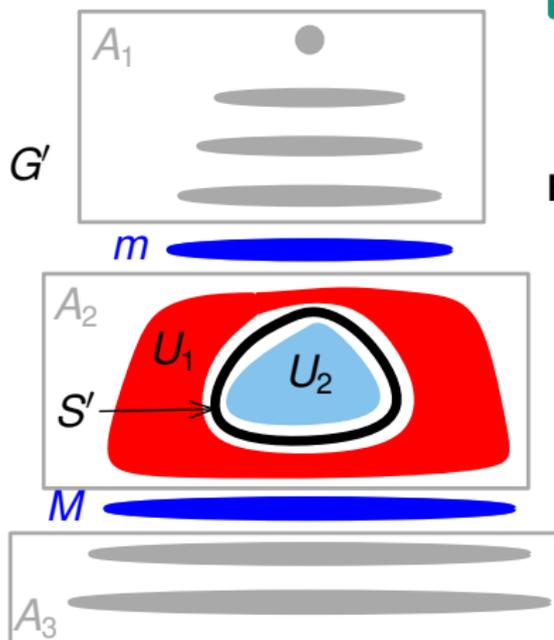
- BFS-Baum  $T$  induziert BFS-Baum  $T'$  in  $G'$

- $\leq \sqrt{n}$  rote levels

- $T'$  hat  $\leq \sqrt{n}$  levels

- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf  $G'$  und  $T'$  an und bekommen  $S'$ ,  $U_1$ ,  $U_2$

# Beweis Planar-Separator-Theorem



- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

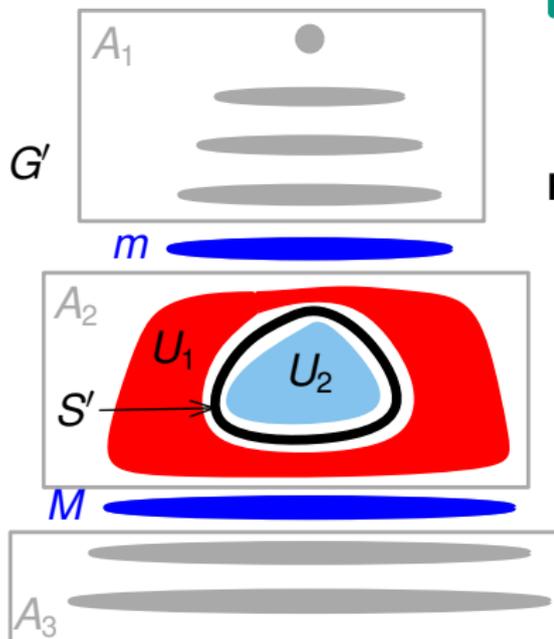
- BFS-Baum  $T$  induziert BFS-Baum  $T'$  in  $G'$

- $\leq \sqrt{n}$  rote levels

- $T'$  hat  $\leq \sqrt{n}$  levels

- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf  $G'$  und  $T'$  an und bekommen  $S'$ ,  $U_1$ ,  $U_2$

# Beweis Planar-Separator-Theorem



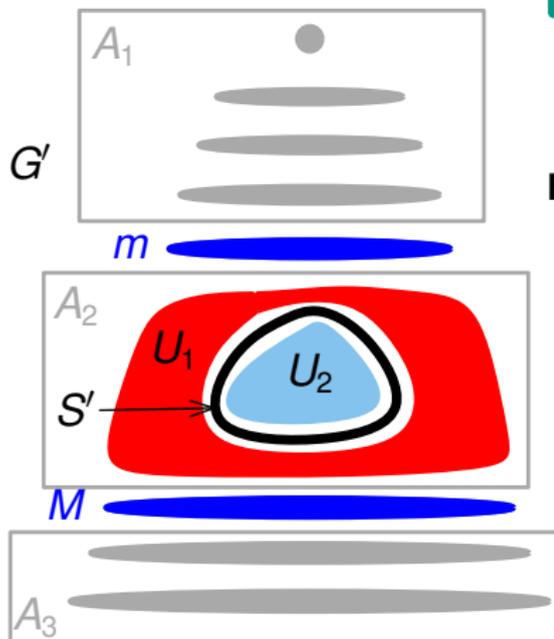
- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei  $S = S' \cup level\ m \cup level\ M$

# Beweis Planar-Separator-Theorem



- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

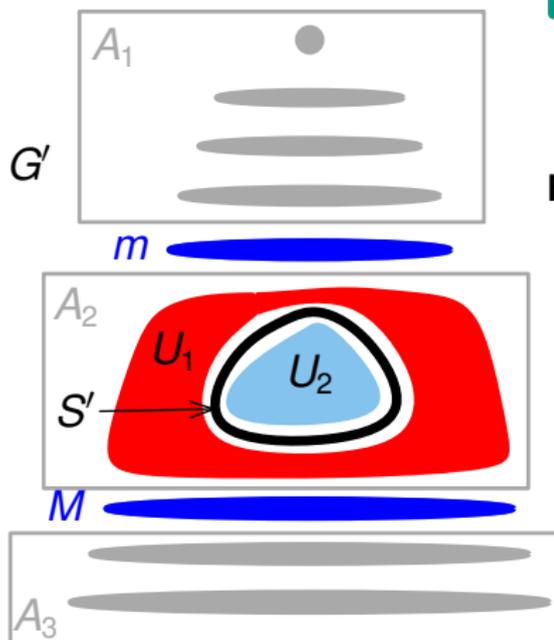
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei  $S = S' \cup level\ m \cup level\ M$

- Nach wichtigem Lemma,  
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$ , dann  $|S| \leq 4\sqrt{n}$

# Beweis Planar-Separator-Theorem



- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

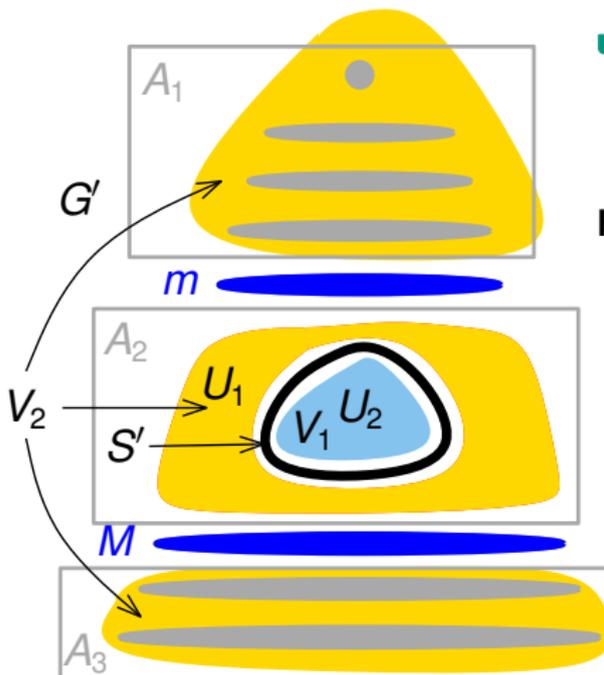
**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei  $S = S' \cup level\ m \cup level\ M$

- Nach wichtigem Lemma,  
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$ , dann  $|S| \leq 4\sqrt{n}$

- Sei  $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$ . Nach wichtigem Lemma,  $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$ .

# Beweis Planar-Separator-Theorem



- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

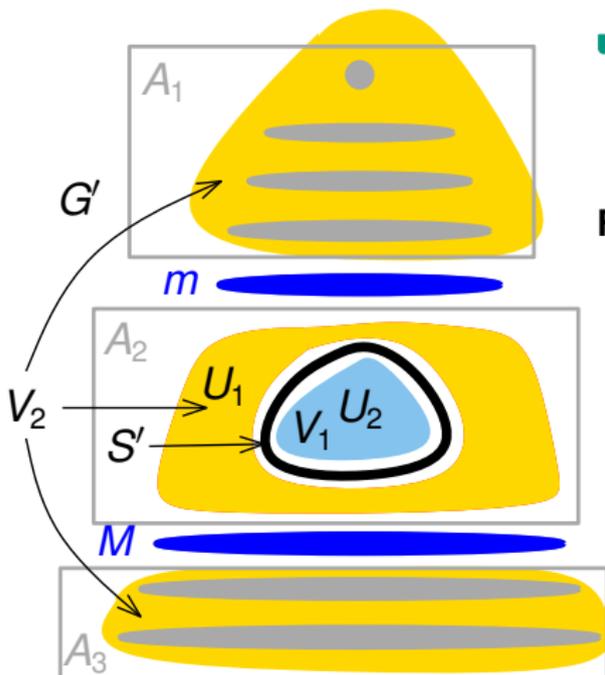
**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei  $S = S' \cup level\ m \cup level\ M$

- Nach wichtigem Lemma,  
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$ , dann  $|S| \leq 4\sqrt{n}$

- Sei  $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$ . Nach wichtigem Lemma,  $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$ .

# Beweis Planar-Separator-Theorem



- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

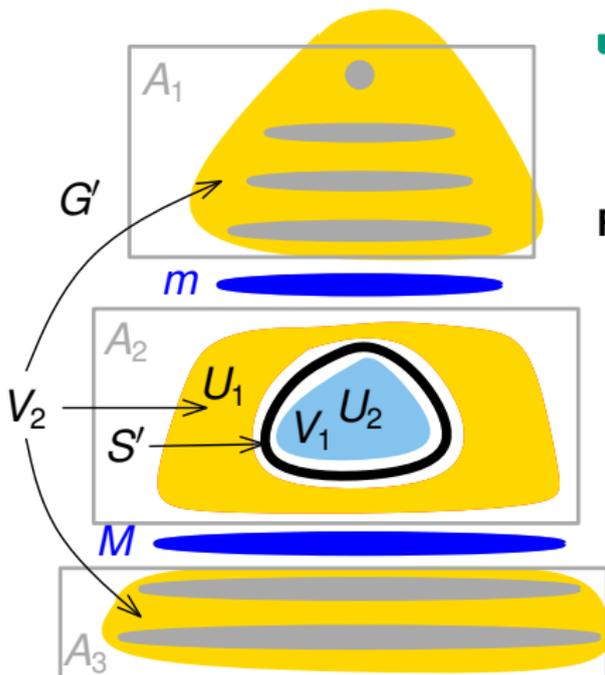
- Sei  $S = S' \cup level\ m \cup level\ M$

- Nach wichtigem Lemma,  
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$ , dann  $|S| \leq 4\sqrt{n}$

- Sei  $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$ . Nach  
wichtigem Lemma,  $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$ .

- $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2}|A_2|$ .

# Beweis Planar-Separator-Theorem



- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$ ,  $|level\ m| < \sqrt{n}$ ,  
 $|level\ M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ ,  $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

**Fall 2:**  $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei  $S = S' \cup level\ m \cup level\ M$

- Nach wichtigem Lemma,  
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$ , dann  $|S| \leq 4\sqrt{n}$

- Sei  $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$ . Nach  
wichtigem Lemma,  $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$ .

- $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2}|A_2|$ .

- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$ ,  $|V_2| =$   
 $n - |V_1| - |S| < n - \frac{1}{2}|A_2| < \frac{2}{3}n$

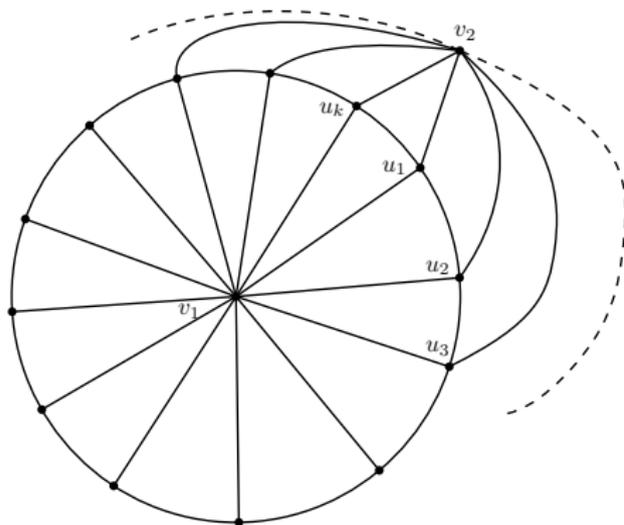


## 4.2 – Verschiedene Bäume

In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  so, dass der PLANAR-SEPARATOR-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit  $S = S_m \cup S_M$  einen gültigen Separator findet.

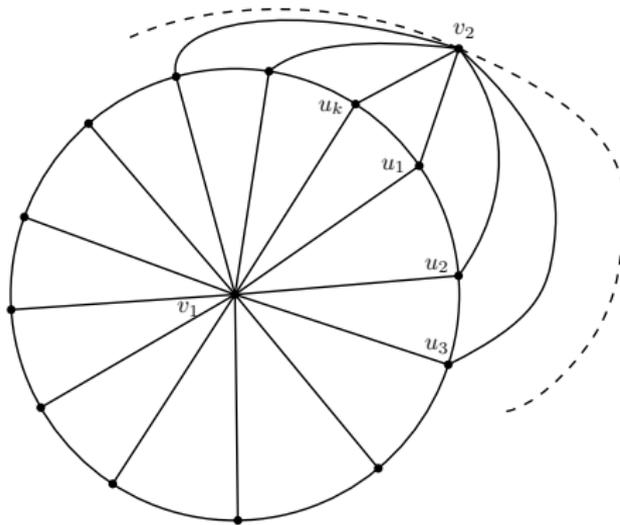
## 4.2 – Verschiedene Bäume

In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  so, dass der PLANAR-SEPARATOR-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit  $S = S_m \cup S_M$  einen gültigen Separator findet. **Stimmt nicht!**

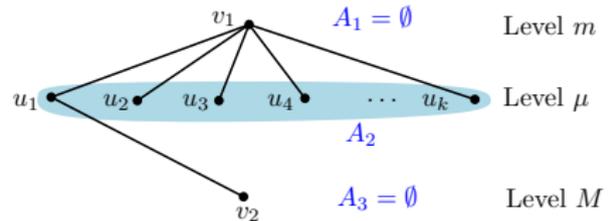


# 4.2 – Verschiedene Bäume

In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  so, dass der PLANAR-SEPARATOR-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit  $S = S_m \cup S_M$  einen gültigen Separator findet. **Stimmt nicht!**

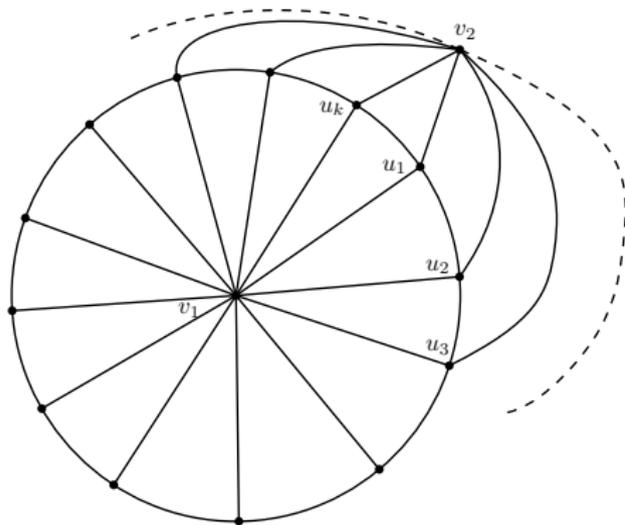


Fall 1:  $w \in \{v_1, v_2\}$ , oBdA:  $w = v_1$

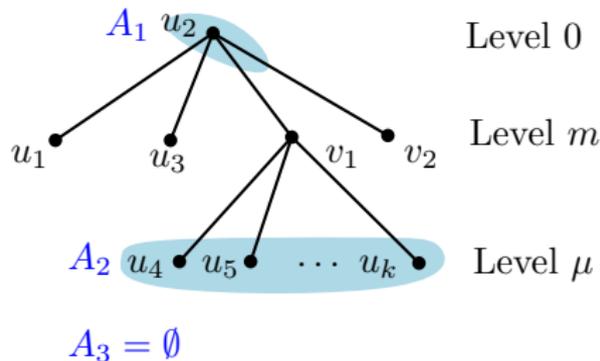


## 4.2 – Verschiedene Bäume

In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  so, dass der PLANAR-SEPARATOR-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit  $S = S_m \cup S_M$  einen gültigen Separator findet. **Stimmt nicht!**



Fall 2:  $w \in \{u_1, \dots, u_k\}$ , oBdA:  
 $w = u_2$



# 5 – Folgerung aus dem PLANAR SEPARATOR THEOREM:

Zeigen Sie: Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit  $n \geq 5$  Knoten und maximalem Knotengrad  $\Delta$  gibt es einen Schnitt  $S \subseteq E$  von  $G$  mit  $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$ , so dass  $G - S = (V, E \setminus S)$  aus zwei disjunkten Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  mit  $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$ ,  $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$ ,  $V_1 \cup V_2 = V$  und  $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$  besteht.

# 5 – Folgerung aus dem PLANAR SEPARATOR THEOREM:

Zeigen Sie: Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit  $n \geq 5$  Knoten und maximalem Knotengrad  $\Delta$  gibt es einen Schnitt  $S \subseteq E$  von  $G$  mit  $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$ , so dass  $G - S = (V, E \setminus S)$  aus zwei disjunkten Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  mit  $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$ ,  $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$ ,  $V_1 \cup V_2 = V$  und  $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$  besteht.

- Sei  $S'$ ,  $V'_1$ ,  $V'_2$  wie im Planar Separator Theorem.
- $S = \{\{u, v\} \in E \mid u \in S' \vee v \in S'\} \Rightarrow |S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$
- Teile  $S'$  in  $S'_1, S'_2$ , so dass  $|V'_1 \cup S'_1| \leq \frac{2}{3}n$  und  $|V'_2 \cup S'_2| \leq \frac{2}{3}n$ .
- $V_1 = V'_1 \cup S'_1$ ,  $V_2 = V'_2 \cup S'_2$

## 6.1 – Umfang

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen  $G$  ist die Länge eines kürzesten Kreises in  $G$ . Enthält  $G$  keinen Kreis, so ist der Umfang  $\infty$ .

Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen Knoten  $v$  von  $G$  entweder

- die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem  $v$  liegt, oder
- entscheidet, dass  $v$  nicht auf einem kürzesten Kreis in  $G$  liegt.

# 6.1 – Umfang

## SHORTCIRCLE( $v$ )

- Breitensuche beginnend bei  $v$
- Wird ein Knoten zum zweiten Mal besucht, ist ein Kreis gefunden.
- Ein kürzester Kreis wird zuerst gefunden.

## 6.1 – Umfang

### SHORTCIRCLE( $v$ )

- Breitensuche beginnend bei  $v$
- Wird ein Knoten zum zweiten Mal besucht, ist ein Kreis gefunden.
- Ein kürzester Kreis wird zuerst gefunden.

Aber:  $v$  liegt nicht notwendigerweise auf diesem Kreis. Deshalb:

## 6.1 – Umfang

### SHORTCIRCLE( $v$ )

- Breitensuche beginnend bei  $v$
- Wird ein Knoten zum zweiten Mal besucht, ist ein Kreis gefunden.
- Ein kürzester Kreis wird zuerst gefunden.

Aber:  $v$  liegt nicht notwendigerweise auf diesem Kreis. Deshalb:

- Nummeriere (“label”) Knoten auf dem ersten Level (Nachbarn von  $v$ )
- Vererbe Label auf neu gefundene Knoten

## 6.1 – Umfang

### SHORTCIRCLE( $v$ )

- Breitensuche beginnend bei  $v$
- Wird ein Knoten zum zweiten Mal besucht, ist ein Kreis gefunden.
- Ein kürzester Kreis wird zuerst gefunden.

Aber:  $v$  liegt nicht notwendigerweise auf diesem Kreis. Deshalb:

- Nummeriere (“label”) Knoten auf dem ersten Level (Nachbarn von  $v$ )
- Vererbe Label auf neu gefundene Knoten
- Wenn sich unterschiedliche Label treffen ist das ein Kreis, der  $v$  enthält.

## 6.2 – Umfang

Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil 6.1, um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

## 6.2 – Umfang

Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil 6.1, um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

- Breitensuche für eine Zusammenhangskomponente liegt in  $\mathcal{O}(|V| + |E|) = \mathcal{O}(|E|)$ .
- Wiederhole für jeden Knoten und gib den kleinsten Kreis aus:  $\mathcal{O}(|V||E|)$ .

## 6.3 – Umfang für planare Graphen

---

### Algorithm PLANARGIRTH

---

$C \leftarrow \infty$

**for** jede Zusammenhangskomponente  $H$  von  $G$  **do**

$(V_1, V_2, S) \leftarrow \text{PLANARSEPARATOR}(H)$

$C \leftarrow \min\{C, \min\{\text{SHORTCIRCLE}(v) \mid v \in S\}\}$

$C \leftarrow \min\{C, \text{PLANARGIRTH}(V_1)\}$

$C \leftarrow \min\{C, \text{PLANARGIRTH}(V_2)\}$

**end for**

**return**  $C$

---

## 6.3 – Umfang für planare Graphen

### Algorithm PLANARGIRTH

$C \leftarrow \infty$

**for** jede Zusammenhangskomponente  $H$  von  $G$  **do**  $\mathcal{O}(n_G^{1,5} \log(n_G))$

$(V_1, V_2, S) \leftarrow \text{PLANARSEPARATOR}(H)$   $\mathcal{O}(n_H)$   $\mathcal{O}(n_H^{1,5})$

$C \leftarrow \min\{C, \min\{\text{SHORTCIRCLE}(v) \mid v \in S\}\}$   $\mathcal{O}(\sqrt{n_H} \cdot n_H)$

$C \leftarrow \min\{C, \text{PLANARGIRTH}(V_1)\}$   $\mathcal{O}(T(|V_1|))$   $\mathcal{O}(T(n_H))$

$C \leftarrow \min\{C, \text{PLANARGIRTH}(V_2)\}$   $\mathcal{O}(T(|V_2|))$

**end for**

**return**  $C$

- $\mathcal{O}(\log(n))$  Rekursionslevel
- Jeder Knoten nur einmal pro Level  $\Rightarrow$  pro Level  $\mathcal{O}(n^{1,5})$  Arbeit
- Insgesamt:  $\mathcal{O}(\log(n) \cdot n^{1,5})$  – besser als  $\mathcal{O}(n^{1,71})$