5 Matchings

Das MATCHING-PROBLEM ist auch für beliebige Graphen in $\mathcal{P}$. Unter Anwendung des PLANAR-SEPARATOR-THEOREMS kann allerdings ein Divide-and-Conquer Algorithmus für das MATCHING-PROBLEM in planaren Graphen entworfen werden, der eine kleinere Laufzeit hat, als der effizienteste bekannte Algorithmus zur Bestimmung eines maximalen Matchings in beliebigen Graphen.

In einem Graph $G = (V, E)$ nennt man eine Menge $M \subseteq E$ *Matching*, falls keine zwei Kanten aus M denselben Endknoten haben. Ein Knoten v heißt *ungematcht*, falls v zu keiner Kante aus M inzident ist, ansonsten heißt v *gematcht*.

> MATCHING-PROBLEM
> Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit Kantengewichtsfunktion $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$.
> Finde in G ein Matching M maximalen Gewichts, d.h.
>
> $$w(M) := \sum_{e \in M} w(e)$$
>
> sei maximal unter allen Matchings von G.

Ein Spezialfall dieses Problems besteht darin, ein MATCHING MAXIMALER KARDINALITÄT zu berechnen (d.h. $w(e) := 1$ für alle $e \in E$).

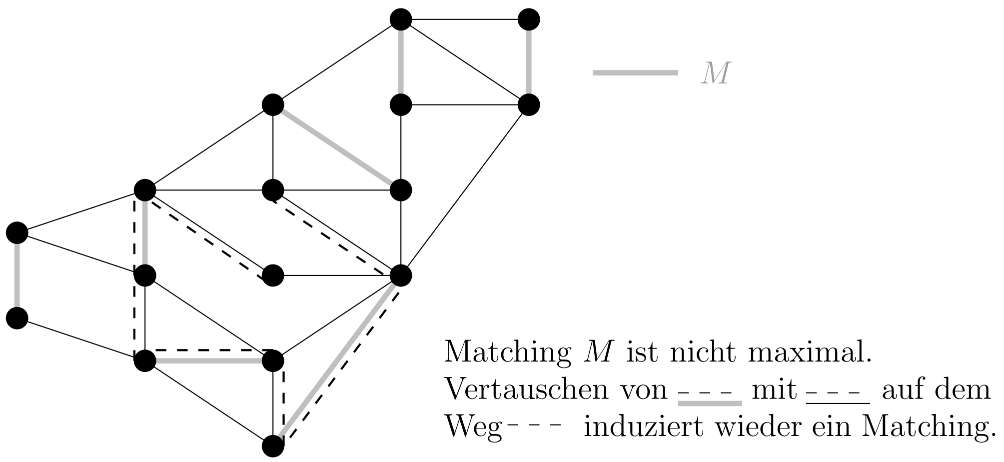

Abbildung 5.1: Illustration der Begriffe Matching und erhöhender Weg.

Ein (bezüglich M) *alternierender Weg* ist ein einfacher Weg oder einfacher Kreis, dessen Kanten abwechselnd in M und in $E \backslash M$ sind. Ein alternierender Weg P, wobei P die Menge der Kanten des Weges bezeichnet, heißt (bezüglich M) *erhöhend* falls

$$\sum_{\substack{e \text{ auf } P, \\ e \in E \backslash M}} w(e) - \sum_{\substack{e \text{ auf } P, \\ e \in M}} w(e) > 0$$

ist, und P entweder ein Kreis gerader Länge ist oder ein Weg, dessen erste und letzte Kante jeweils in M oder inzident zu einem ungematchten Knoten ist (siehe Abb. 5.1).

Beobachtung. *Sei M ein Matching in G und P ein (bezüglich M) erhöhender Weg. Dann ist $M' := (M \setminus P) \cup (P \setminus M)$ ein Matching von G mit $w(M') > w(M)$.*

Lemma 5.1. *Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichtsfunktion $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Ein Matching M von G hat genau dann maximales Gewicht, wenn es bzgl. M in G keinen erhöhenden Weg gibt.*

Beweis. Falls es zu M einen erhöhenden Weg gibt, so kann M natürlich nicht maximales Gewicht haben. Umgekehrt nehmen wir an, dass M ein Matching ist, zu dem es einerseits keinen erhöhenden Weg gibt, für das aber andererseits $w(M)$ nicht maximal ist. Dann gibt es ein Matching M^* mit $w(M^*) > w(M)$. Betrachte den Subgraph von G, der durch die Menge $M \Delta M^* := (M \cup M^*) \backslash (M \cap M^*)$ induziert wird. Dieser Graph hat nur Knoten vom Grad 1 oder 2, besteht also aus einfachen Kreisen und Wegen. Wenn nun keiner der Kreise erhöhend bzgl. M ist, so muss es einen inklusionsmaximalen bezüglich M alternierenden Weg P geben mit $w(P \cap M^*) > w(P \cap M)$, da $w(M^*) > w(M)$. Wenn eine Endkante des Weges nicht in M ist, so ist sie in M^*, und daher der entsprechende Endknoten v nicht von M gematcht. Also ist P bzgl. M erhöhend. Widerspruch.

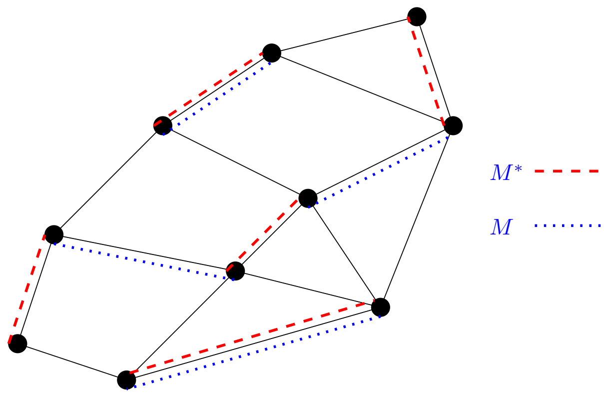

Abbildung 5.2: Illustration von Lemma 5.1.

Lemma 5.2. *Sei $G = (V, E)$ Graph mit Kantengewichtsfunktion $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$ und $v \in V$. Weiter sei M ein Matching maximalen Gewichts in $G - v$ (dem durch $V \backslash \{v\}$ induzierten Subgraph von G).*

– *Falls* G *keinen erhöhenden Weg bzgl.* M *mit Endknoten* v *enthält, so ist* M *auch Matching maximalen Gewichts in* G*.*

– *Ansonsten sei* P *Kantenmenge eines erhöhenden Weges bzgl.* M *in* G *mit* $w(P \cap E \backslash M) - w(P \cap M)$ *maximal unter allen erhöhenden Wegen. Dann ist* $M \Delta P$ *ein Matching maximalen Gewichts in* G*.*

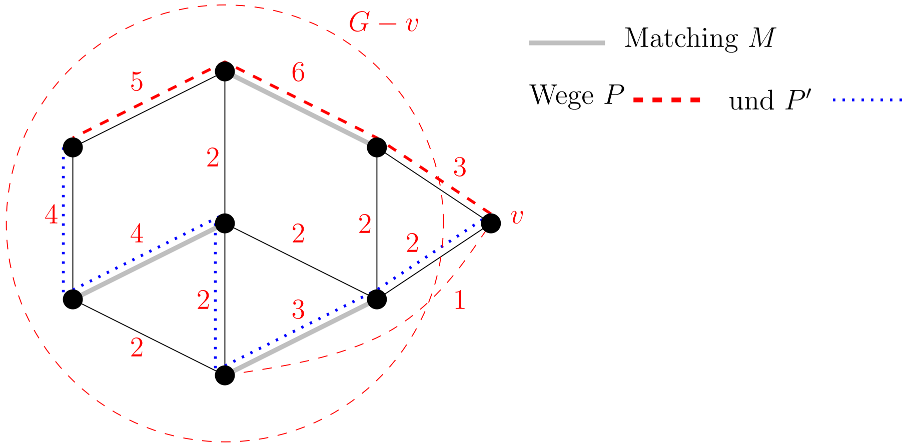

Abbildung 5.3: Illustration von Lemma 5.2.

Beweis. Betrachte ein Matching M maximalen Gewichts in $G - v$. Dann ist M natürlich auch Matching in G. Jeder erhöhende Weg bzgl. M in G muss als Endknoten v haben, ansonsten hätte M nicht maximales Gewicht in $G - v$.

Sei nun M^* ein Matching maximalen Gewichts in G. Wiederum bildet $M \Delta M^*$ eine Menge einfacher bezüglich M^* bzw. M alternierender Wege und Kreise in G. Jeder bezüglich M erhöhende Weg im durch $M \Delta M^*$ induzierten Graph ist auch erhöhend in G. Der durch $M \Delta M^*$ induzierte Graph kann jedoch höchstens einen bezüglich M erhöhenden Weg und zwar mit Endknoten v enthalten, da ansonsten v zu mindestens zwei Kanten aus M^* inzident wäre. Falls P^* ein solcher Weg ist, so hat das durch Erhöhung entlang P^* konstruierte Matching Gewicht

$$w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap E \backslash M) = w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap M^*).$$

Da im durch $M \Delta M^*$ induzierten Graph kein weiterer bezüglich M erhöhender Weg existiert, hat die Menge der Kanten aus M, die nicht auf P^* liegen dasselbe Gewicht wie die Menge der Kanten aus M^*, die nicht auf P^* liegen, d.h. $w(M) - w(P^* \cap M) = w(M^*) - w(P^* \cap M^*)$. Dann hat also das durch Erhöhung entlang P^* konstruierte Matching Gewicht

$$w(M) - w(P^* \cap M) + w(P^* \cap M^*) = w(M^*).$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Basierend auf diesem Lemma kann in einem beliebigen Graph $G = (V, E)$, $|E| = m$, aus einem Matching maximaler Kardinalität bzw. maximalen Gewichts in $G - v$ (für beliebiges $v \in V$) ein Matching maximaler Kardinalität bzw. maximalen Gewichts in G konstruiert werden. Die Laufzeit ist $\mathcal{O}(m)$ bzw. $\mathcal{O}(m \log n)$ (siehe Übung (teilweise)). Dies führt für planare Graphen zu einer Laufzeit von $\mathcal{O}(n)$ bzw. $\mathcal{O}(n \log n)$.

Der folgende rekursive Algorithmus findet in planaren Graphen ein Matching maximalen Gewichts bzw. Kardinalität unter Benutzung des „Planar-Separator-Theorems" und Lemma 5.2.

Divide-and-Conquer-Algorithmus Max-Matching

Schritt 1: Falls G höchstens drei Knoten enthält, bestimme direkt ein Matching maximalen Gewichts.

Schritt 2: Ansonsten zerlege V in V_1, V_2 und S entsprechend dem Planar-Separator-Theorem.
G_1, G_2 bezeichne die durch V_1 bzw. V_2 induzierten Subgraphen von G.
Wende den Algorithmus rekursiv auf G_1 und G_2 an, und berechne so Matchings maximalen Gewichts M_1 bzw. M_2 von G_1 bzw. G_2.
Sei $M := M_1 \cup M_2$, $V' := V_1 \cup V_2$.

Schritt 3: Solange $S \neq \emptyset$ ist, führe aus:
Wähle $v \in S$, und setze $S := S \backslash \{v\}$ und $V' := V' \cup \{v\}$.
Wende Lemma 5.2 an um in dem durch V' induzierten Subgraph von G ein Matching maximalen Gewichts zu berechnen.

Wenn $t'(n)$ die Laufzeit zur Berechnung eines Matchings maximalen Gewichts in einem Graph G mit n Knoten aus einem Matching maximalen Gewichts von $G - v$ ist, und $t(n)$ Laufzeit des Divide-and-Conquer-Algorithmus bezeichnet, so gilt:

$$\begin{aligned} t(n_0) &= c_0, \text{für geeignetes } n_0 \in \mathbb{N} \\ t(n) &\leq t(c_1 \cdot n) + t(c_2 \cdot n) + c_3 \cdot \sqrt{n} \cdot t'(n), \text{für } n > n_0, \end{aligned}$$

wobei c_0, c_1, c_2, c_3 konstant, $c_1, c_2 \leq \frac{2}{3}$ und $c_1 + c_2 < 1$. Man kann mit Techniken zur Analyse von Rekursionabschätzungen (siehe dazu Vorlesung „Algorithmentechnik") beweisen, dass

$$\begin{aligned} t(n) &\in \mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}}) \text{ falls } t'(n) \in \mathcal{O}(n), \\ \text{und } t(n) &\in \mathcal{O}(n^{\frac{3}{2}} \cdot \log n) \text{ falls } t'(n) \in \mathcal{O}(n \log n). \end{aligned}$$