

4 Separatoren in planaren Graphen

Eine Menge $S \subset V$ heißt *Separator* von $G = (V, E)$, falls der durch $V \setminus S$ induzierte Subgraph von G unzusammenhängend ist. Der Separator S *trennt* die Knoten $u, v \in V \setminus S$, falls u und v in dem durch $V \setminus S$ induzierten Subgraph (bezeichnet mit $G - S$) in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen.

Separatoren spielen beispielsweise bei Graphenalgorithmien, die auf dem *Divide-and-Conquer Prinzip* beruhen eine wichtige Rolle. Siehe dazu die Vorlesung „Algorithmentechnik“. Dazu zerlegt man einen Graphen durch Wegnahme eines Separators und wendet den Algorithmus rekursiv auf die entstandenen Subgraphen an. Da die Größe des Separators beim Zusammensetzen der „Teillösungen“ in die Laufzeit eingeht, benutzt man typischerweise *kleine Separatoren*. Für die Gesamtlaufzeit eines solchen Divide-and-Conquer Algorithmus ist jedoch auch die *Rekursionstiefe* des Verfahrens wichtig. Diese hängt von der Größe der entstehenden Subgraphen ab. Ideal wären balancierte Zerlegungen, bei denen die Subgraphen der Zerlegung etwa gleich groß sind. Dies führt zu folgendem Optimierungsproblem.

MINIMUM-BALANCED-SEPARATOR-PROBLEM

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Finde eine Partition von V in drei Mengen V_1, V_2 und S , wobei S Separator minimaler Kardinalität ist, der V_1 und V_2 trennt mit $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot |V|$ und $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ konstant.

Das Problem ist für beliebige Graphen \mathcal{NP} -schwer. Ist $\alpha = \frac{1}{2}$, so nennt man das Problem **MINIMUM-BISECTION-PROBLEM**. Es ist nicht bekannt, ob das **MINIMUM-BISECTION-PROBLEM** auch für planare Graphen \mathcal{NP} -schwer ist. Allerdings lässt sich für planare Graphen in linearer Laufzeit ein Separator finden, für dessen Größe und Balanciertheit der Zerlegung sich noch eine gewisse Garantie beweisen lässt. Dahinter steht der folgende *Satz von Lipton & Tarjan* (bewiesen 1977), der auch als **PLANAR-SEPARATOR-THEOREM** bezeichnet wird.

Satz 4.1 (PLANAR-SEPARATOR-THEOREM). *Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass*

1. $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
2. S Separator, der V_1 und V_2 trennt,
3. $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$.

4 Separatoren in planaren Graphen

Diese Partition kann in Laufzeit $\mathcal{O}(n)$ berechnet werden.

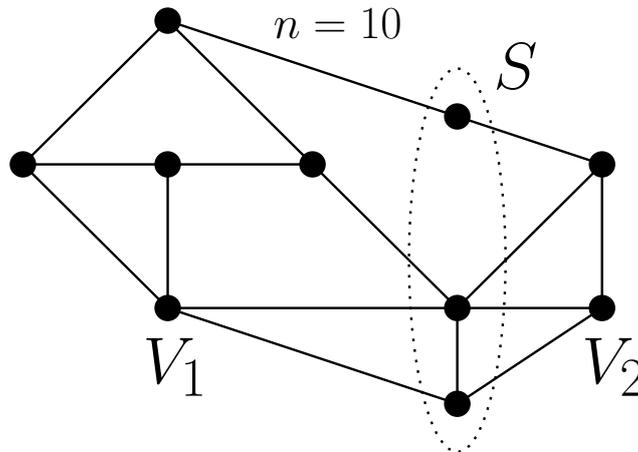


Abbildung 4.1: Ein Separator, der die Bedingungen des PLANAR-SEPARATOR-THEOREMS erfüllt.

Zur Illustration des Satzes siehe Abb. 4.1. Bevor wir Satz 4.1 beweisen, benötigen wir noch einige Begriffe. Ein Subgraph $T = (V(T), E(T))$ eines Graphen $G = (V, E)$, heißt *aufspannender Baum* von G , falls T Baum ist und $V(T) = V$. Ein beliebiger Knoten eines Baumes T kann als *Wurzel* w ausgezeichnet sein. Dann ist das *Level* oder die *Höhe eines Knotens* v definiert als die Länge des eindeutigen Weges vom Knoten v zur Wurzel und wird mit $\text{level}(v)$ bezeichnet. Die *Höhe von T* ist die Länge des längsten Weges von w zu einem Knoten aus T . Sei $G = (V, E)$ ein planarer (eingebetteter) Graph. Ein Graph $G' = (V, E')$ heißt *Triangulierung von G* , falls G' ein kantenmaximaler planarer Graph ist, der G als Subgraph enthält. In einer Einbettung von G' sind alle Facetten Dreiecke. Zu einem eingebetteten planaren Graphen kann in $\mathcal{O}(n)$ Zeit eine Triangulierung konstruiert werden (Übung).

Für den Beweis von Satz 4.1 werden wir folgendes Lemma verwenden.

Lemma 4.2. *Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass*

1. $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
2. S Separator, der V_1 und V_2 trennt,
3. $|S| \leq 2 \cdot h + 1$.

Eine solche Partition kann in $\mathcal{O}(n)$ Zeit konstruiert werden.

Beweis. G wird zunächst durch Hinzufügen von Kanten trianguliert, d.h. die Facetten werden zu Dreiecken gemacht. Dies ist in $\mathcal{O}(n)$ Zeit möglich. Der so konstruierte Graph

4 Separatoren in planaren Graphen

enthält also genau $3n - 6$ Kanten. Dementsprechend hat er nach dem Satz von Euler genau $2n - 4$ Facetten. Ein aufspannender Baum T des Ausgangsgraphen ist natürlich auch ein aufspannender Baum des triangulierten Graphen.

Basierend auf einem aufspannenden Baum T der Höhe h mit ausgezeichneter Wurzel suchen wir einen Kreis im triangulierten Graphen, der höchstens Länge $2 \cdot h + 1$ hat, und dessen Inneres und Äußeres jeweils höchstens $\frac{2}{3}n$ Knoten enthalten. Die Knoten dieses Kreises bilden dann den gewünschten Separator S von G . Siehe Abb. 4.2.

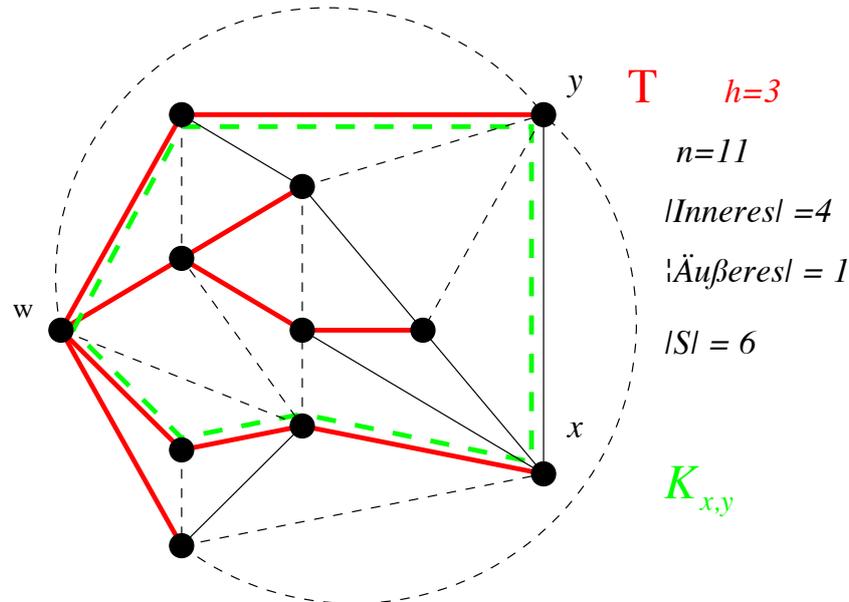


Abbildung 4.2: Illustration eines aufspannenden Baumes in einem planaren Graphen und dem durch eine Nichtbaumkante $\{x, y\}$ induzierten Kreis $K_{x,y}$. Die gestrichelten Kanten sind bei der Triangulierung zum Graphen hinzugefügt worden, die roten, fetten Kanten bilden einen aufspannenden Baum.

Jede Kante $\{x, y\} \in E$ ist entweder auch in $E(T)$, also eine *Baumkante*, oder in $E \setminus E(T)$, also eine *Nichtbaumkante*. Jede Nichtbaumkante $\{x, y\} \in E \setminus E(T)$ induziert einen Kreis, den Kreis $K_{x,y}$ bestehend aus $\{x, y\}$ und den Wegen von x bzw. y zum gemeinsamen Vorgänger maximalen Levels im Baum. Die Anzahl der Knoten auf $K_{x,y}$ ist höchstens $2 \cdot h + 1$.

Betrachte $\text{Inneres}(K_{x,y})$ und $\text{Äußeres}(K_{x,y})$, d.h. die Knoten und Kanten, die im Inneren von $K_{x,y}$ bzw. in dessen Äußeren eingebettet sind, und bezeichne mit $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ bzw. $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ die Anzahl der Knoten im Inneren bzw. Äußeren von $K_{x,y}$. Wir wählen eine beliebige Nichtbaumkante $\{x, y\} \in E \setminus E(T)$, wobei o.B.d.A. $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \geq |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$. Wenn zusätzlich gilt, dass $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ ist, sind wir fertig.

Sei also $|\text{Inneres}(K_{x,y})| > \frac{2}{3}n$ (beachte: dies impliziert $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| < \frac{1}{3}n$). Wir verkleinern nun systematisch das Innere, indem wir eine geeignete Nichtbaumkante e im

4 Separatoren in planaren Graphen

Inneren von $K_{x,y}$ suchen, für die $|\text{Inneres}(K_e)| \leq \frac{2}{3}n$ wird, und $|\text{Äußeres}(K_e)| \leq \frac{2}{3}n$ bleibt.

Die Kante $\{x, y\}$ begrenzt zwei Dreiecke, von denen eines im Inneren von $K_{x,y}$ liegt. Betrachte den Knoten t , der mit x und y dieses Dreieck bildet.

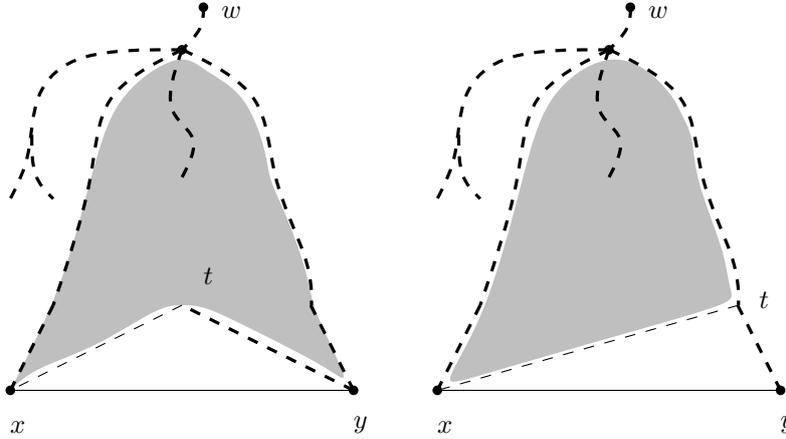


Abbildung 4.3: Illustration von Fall 1, $t \notin K_{x,y}$ bzw. $t \in K_{x,y}$.

Fall 1: Eine der beiden Kanten ist eine Baumkante, o.B.d.A. $\{y, t\} \in E(T)$ (siehe Abb. 4.3).

Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$ und betrachte nun $K_{x,t}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{Falls } t \notin K_{x,y}: \quad & |\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})| && \text{und} \\ & |\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Falls } t \in K_{x,y}: \quad & |\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})| + 1 && \text{und} \\ & |\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})| \end{aligned}$$

Ersetzung von $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$ verkleinert also $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ bzw. lässt $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ zumindest unverändert, und lässt $|\text{Äußeres}(K_{x,t})|$ klein genug.

Fall 2: Beide Kanten $\{x, t\}$ und $\{y, t\}$ sind Nichtbaumkanten (siehe Abb. 4.4).

O.b.d.A. sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{y,t})|$. Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\text{Äußeres}(K_{x,t})| &\leq n - \frac{1}{2} |\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n && \text{und} \\ |\text{Inneres}(K_{x,t})| &\leq |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1 . \end{aligned}$$

Ersetzung von $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$ verkleinert also $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und lässt $|\text{Äußeres}(K_{x,t})|$ klein genug. Dies kann nun so lange wiederholt werden, bis auch $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ gilt.

4 Separatoren in planaren Graphen

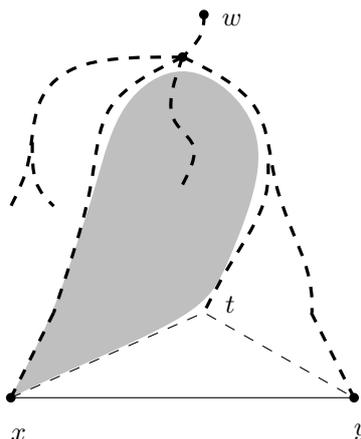


Abbildung 4.4: Illustration von Fall 2.

Damit haben wir bewiesen, dass sich eine Partition mit den gewünschten Eigenschaften konstruieren lässt. Wir müssen nun noch deren Implementation in linearer Laufzeit sicherstellen.

Implementation in linearer Laufzeit: Da beim Übergang von einer Nichtbaumkante zu einer neuen Nichtbaumkante im Inneren des betrachteten Kreises sich die Anzahl der Dreiecke im Inneren reduziert, endet das Verfahren nach spätestens $2n - 4$ solchen Übergängen. Wäre also jede der Verkleinerungsoperationen in konstanter Zeit realisierbar, wäre damit auch die gesamte Konstruktion in Gesamtlaufzeit $\mathcal{O}(n)$ möglich.

Alle Operationen, bis auf die Entscheidung welches Innere, $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ oder $|\text{Inneres}(K_{y,t})|$ größer ist in Fall 2, bzw. zu entscheiden wann das Innere des betrachteten Kreises nur noch höchstens $\frac{2}{3}n$ Knoten enthält, sind in konstanter Zeit möglich. Allerdings kann eine einzelne Entscheidung ob $|\text{Inneres}(K_{x,t})| < |\text{Inneres}(K_{y,t})|$ bzw. $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ mehr als konstante Zeit erfordern. Daher führen wir eine amortisierte Analyse durch. Wir überlegen uns zunächst genauer, wie wir für einen Kreis $K_{x,y}$ die Größe $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ bestimmen können.

Zu Beginn des Verfahrens wird der Baum T von den Blättern zur Wurzel w hin durchlaufen, und für jede ausgehende Kante jedes Knotens gespeichert, wieviele Knoten der bezüglich dieser Kante rechte bzw. linke Unterbaum des Knotens enthält. Beginnend mit der gewählten Nichtbaumkante $\{x, y\}$ werden alle Knoten auf dem Weg von x bzw. y zum gemeinsamen Vorgänger im Baum markiert, und gleichzeitig aus den Unterbäumen im Inneren von $K_{x,y}$ der Wert $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ berechnet.

Bei jedem Verkleinerungsschritt entsprechend Fall 2 wird nun zunächst vom Knoten t im Baum nach oben gelaufen bis zum ersten markierten Knoten. Dieser ist der Vorgänger v von t auf $K_{x,y}$. Alle Knoten auf dem Weg von t zu v werden dabei markiert und die Anzahl a_t dieser Knoten sowie die Anzahl r_t der Knoten rechts und l_t links des Weges berechnet (siehe Abb. 4.5).

4 Separatoren in planaren Graphen

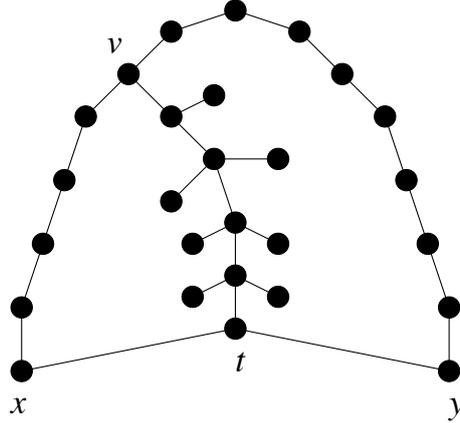


Abbildung 4.5: Illustration der „Aufsummierung“ der Knoten rechts und links des Weges von t zu $K_{x,y}$.

Um $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{y,t})|$ zu berechnen, werden gleichzeitig die Ränder der beiden Kreise bis v entlanggelaufen und zwar abwechselnd Knoten für Knoten beginnend mit x bzw. y , und die Anzahl der Knoten im Inneren zu I_x bzw. I_y aufaddiert. Sobald mit Erreichen von v der Rand eines der beiden Kreise vollständig abgelaufen ist, wird abgebrochen. Die Anzahl der Knoten im Inneren des anderen Kreises kann nun mit den Werten $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und α_t „rückgerechnet“ werden: Sei o.B.d.A der Knoten v von x aus zuerst erreicht worden, dann gilt

$$\begin{aligned} |\text{Inneres}(K_{x,t})| &= I_x + \ell_t && \text{und} \\ |\text{Inneres}(K_{y,t})| &= I_y + r_t = |\text{Inneres}(K_{x,y})| - I_x - \alpha_t - \ell_t \end{aligned}$$

Entscheidend ist nun, dass die Anzahl der Schritte bei dieser Vorgehensweise proportional zur Anzahl der Knoten in dem Teil von $K_{x,y}$ ist, der nicht weiter betrachtet wird. Insgesamt ist die Anzahl der Schritte also amortisiert linear in der Anzahl der Knoten von G , also in $\mathcal{O}(n)$. \square

Im Beweis zu Satz 4.1 benutzen wir folgende Eigenschaft eines Breitensuchbaumes (BFS-Baum).

Lemma 4.3. *Zu einem Graph $G = (V, E)$ sei $T = (V, E(T))$ ein BFS-Baum ausgehend von einer beliebigen Wurzel. Eine Nichtbaumkante verbindet Knoten desselben Levels oder direkt aufeinander folgender Level, d.h. für $\{u, v\} \in E \setminus E(T)$ gilt $|\text{level}(u) - \text{level}(v)| \leq 1$.*

Beweis. Angenommen $\{u, v\}$ sei Nichtbaumkante zu einem BFS-Baum mit $|\text{level}(v) - \text{level}(u)| > 1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\text{level}(u) < \text{level}(v)$. Der unmittelbare Vorgänger von v in T muss nach u durchsucht werden, da sein Level mindestens um 1 größer ist als Level u . Wenn $\{u, v\} \in E$ muss v dann in der BFS aber bereits von u aus „entdeckt“ worden sein, siehe Abbildung 4.6. \square

4 Separatoren in planaren Graphen

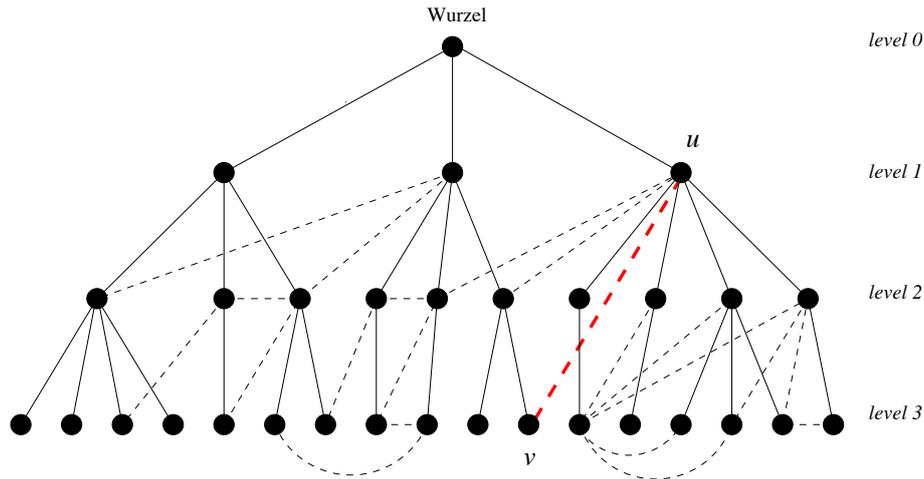


Abbildung 4.6: Illustration zu Lemma 4.3.

Wir können nun Satz 4.1 beweisen:

Beweis. Konstruiere eine Triangulierung von G und einen BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel. Seien dessen Level angefangen mit der Wurzel die Level $0, 1, \dots, h$ und bezeichne S_i ($0 \leq i \leq h$) die Menge der Knoten in Level i . Sei μ ($0 \leq \mu \leq h$) das Level mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=0}^{\mu-1} |S_i| \leq \frac{n}{2} \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{\mu} |S_i| > \frac{n}{2}.$$

Falls $|S_\mu| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$ und $\mu < h$, so setze $S := S_\mu$, $V_1 := \bigcup_{i=0}^{\mu-1} S_i$ und $V_2 := \bigcup_{i=\mu+1}^h S_i$. Dann ist V_1 , V_2 und S eine Partition von V mit den gewünschten Eigenschaften.

Ansonsten sei m das unterste Level oberhalb von Level μ und M das oberste Level unterhalb von Level μ ($0 \leq m \leq \mu \leq M \leq h+1$) mit $|S_m| \leq \sqrt{n}$ und $|S_M| \leq \sqrt{n}$. Beachte, dass möglicherweise $M = h+1$ und $S_M = \emptyset$ ist. Setze (siehe Abb. 4.7)

$$A_1 := \bigcup_{i=0}^{m-1} S_i, \quad A_2 := \bigcup_{i=m+1}^{M-1} S_i \quad \text{und} \quad A_3 := \bigcup_{i=M+1}^h S_i.$$

Basierend auf S_m, S_M und gegebenenfalls weiteren Knoten wird nun ein Separator S mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert. Dabei hängt von der Größe von A_2 ab, ob noch weitere Knoten aus dem Bereich zwischen S_m und S_M zu S hinzugefügt werden müssen. Um diese zusätzlichen Knoten zu bestimmen, wird Lemma 4.2 angewendet.

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

Setze $S := S_m \cup S_M$. S ist Separator von G und zerlegt V in die Knotenmengen

4 Separatoren in planaren Graphen

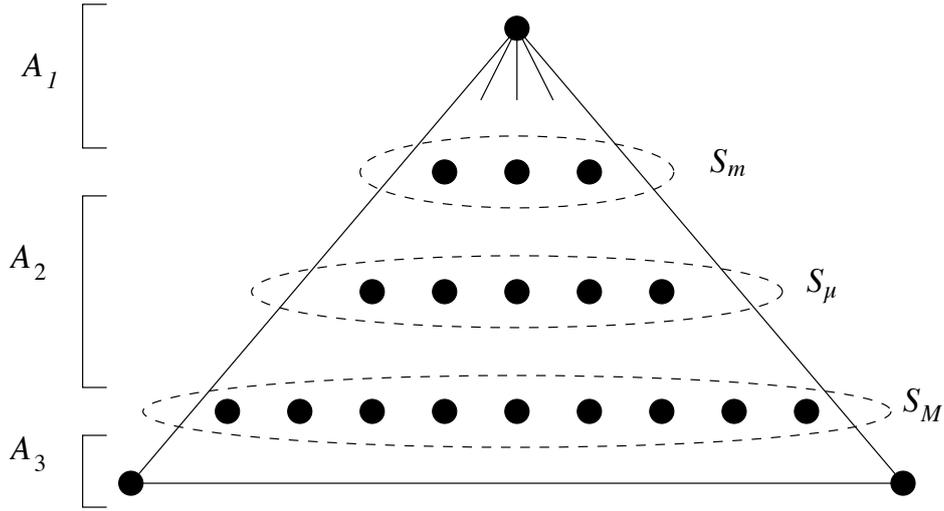


Abbildung 4.7: Illustration der Aufteilung der Level.

A_1 , A_2 und A_3 . Setze dann $V_1 := A_i$ mit A_i kardinalitätsmaximal unter A_1 , A_2 und A_3 , und $V_2 := V \setminus (V_1 \cup S)$. Nach Wahl von μ , m und M gilt $|A_1| \leq \frac{n}{2}$ und $|A_3| < \frac{n}{2}$ und nach Voraussetzung $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$. Also ist $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$. Zudem gilt

$$|V_2| \leq n - |V_1| \leq n - \frac{|V_2|}{2}, \quad \text{da}$$

$$|V_1| = \max\{|A_1|, |A_2|, |A_3|\} \geq \frac{|V_2|}{2}.$$

Also ist $\frac{3}{2}|V_2| \leq n$ und S , V_1 und V_2 eine Partition von V mit den gewünschten Eigenschaften.

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

Verschmelze die Knoten in $A_1 \cup S_m$ zu einem Knoten s durch sukzessives Zusammenziehen von Kanten zwischen Knoten aus $A_1 \cup S_m$. Entferne alle Knoten aus $S_M \cup A_3$. Dadurch entsteht ein Graph $G' = (V', E')$ mit

$$V' := V \setminus \left(\bigcup_{i=0}^m S_i \cup \bigcup_{i=M}^h S_i \right) \cup \{s\} = A_2 \cup \{s\}$$

und $\{x, y\} \in E'$ genau dann, wenn entweder $x, y \in V' \setminus \{s\}$ und $\{x, y\} \in E$, oder $x, y \in V'$, wobei o.B.d.A. $x = s$ und es existiert ein $z \in S_m$ mit $\{z, y\} \in E$. Dann ist entsprechend $n' := |V'| = |A_2| + 1$. Siehe Abb. 4.8.

Der BFS-Baum T induziert in G' einen BFS-Baum T' mit Wurzel s . Die Höhe h' von T' ist maximal \sqrt{n} , da für jedes i , $m < i < M$ gilt $|S_i| > \sqrt{n}$ und $|V'| \leq n$.

Mit Lemma 4.2 existiert eine Zerlegung S' , V'_1 und V'_2 von V' mit $|V'_1|, |V'_2| \leq \frac{2}{3}n' \leq \frac{2}{3}n$ und $|S'| \leq 2 \cdot \sqrt{n} + 1$.

4 Separatoren in planaren Graphen

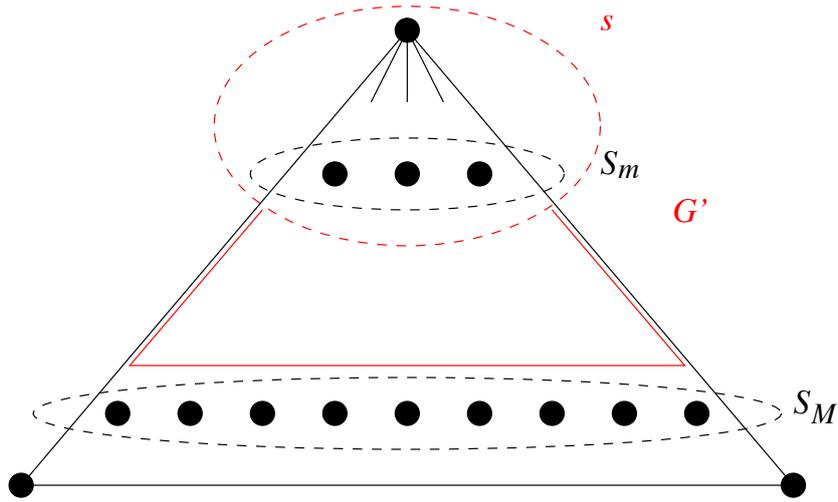


Abbildung 4.8: Illustration zu Fall 2.

Setze $S := (S' \cup S_m \cup S_M) \setminus \{s\}$. Dann ist S ein Separator von G mit $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$, denn sollte $|S'| = 2 \cdot \sqrt{n} + 1$ sein, so enthält S' die Wurzel s von T' .

Wähle V_1 als die größere der Mengen V'_1 und V'_2 (gegebenenfalls ohne s) und den Rest von V als V_2 bzw. falls $|V'_1| = |V'_2|$ wähle die Menge, welche nicht s enthält, als V_1 , den Rest als V_2 (siehe Abb. 4.9). Dann gilt

$$|V_1| \leq \frac{2}{3}n' \leq \frac{2}{3}n \quad \text{und}$$

$$|V_2| \leq n - (|V_1| + |S|) \leq n - \frac{|A_2|}{2} \leq \frac{2}{3}n. \quad \square$$

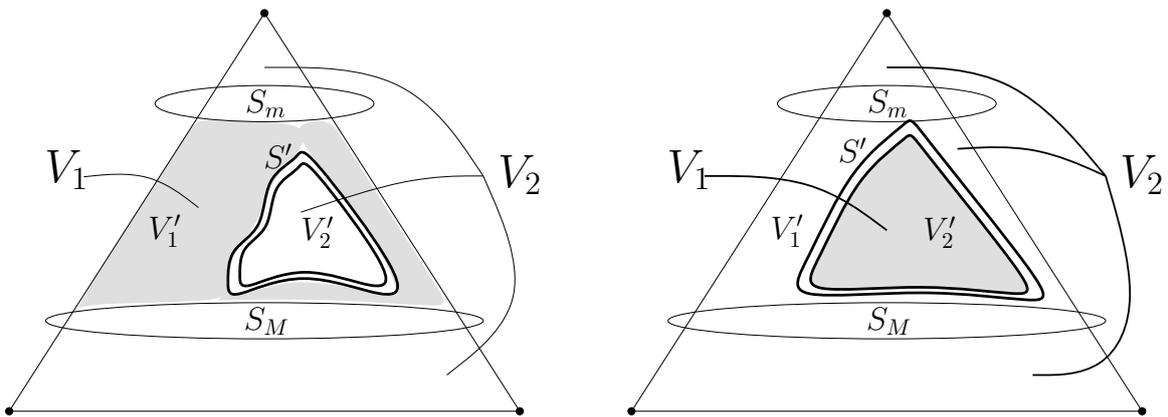


Abbildung 4.9: Konstruktion des Separators im Fall 2; links: $|V'_1| > |V'_2|$, rechts: $|V'_2| > |V'_1|$.

Randfälle des „Planar-Separator-Theorem“:

- Falls $n \leq 2$ oder $G = K_4$ oder $G = K_3$, existiert kein (nichttrivialer) Separator von G . Satz 4.1 ist nur relevant für planare, zusammenhängende Graphen, die einen (nichttrivialen) Separator besitzen, also ab $n \geq 4$ und $G \neq K_4$ bzw. G Pfad mit drei Knoten. Die entsprechenden Fälle für $n \geq 4$ sind Trivialfälle.
- In Fall 1, Beweis zu Satz 4.1 wird immer eine echte Partition S, V_1, V_2 konstruiert, d.h. $S, V_1, V_2 \neq \emptyset$. Zunächst ist per Voraussetzung $|S_\mu| > 4 \cdot \sqrt{n}$ und daher $|A_2| > 4 \cdot \sqrt{n}$. Andererseits ist $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$. Dies ist erst für $n > 36$ möglich. Wäre nun $V_2 = \emptyset$, so müsste $m = 0$ und $M = h$ sein. Da $|S_M| \leq \sqrt{n}$ ist, gilt $|A_2| \geq n - (1 + \sqrt{n})$. Für $n > 36$ gilt $1 + \sqrt{n} < \frac{1}{3} \cdot n$, also ist $|A_2| > \frac{2}{3}n$.

Der Beweis des PLANAR-SEPARATOR-THEOREMS liefert, wie wir gesehen haben, gleichzeitig einen Algorithmus, um einen Separator mit den gewünschten Eigenschaften zu konstruieren. Im Folgenden fassen wir diesen Algorithmus noch einmal zusammen und machen uns dabei klar, dass die Laufzeit tatsächlich in $\mathcal{O}(n)$ ist.

Zusammenfassung des „Separator-Algorithmus“

- Schritt 1:** Trianguliere G . $\mathcal{O}(n)$
- Schritt 2:** Berechne einen BFS-Baum. $\mathcal{O}(n)$
- Schritt 3:** Berechne μ, m und M wie im Beweis zu Satz 4.1. $\mathcal{O}(n)$
- Schritt 4:** Falls $A_2 = \left| \bigcup_{i=m+1}^{M-1} S_i \right| \leq \frac{2}{3}n$, so berechne S, V_1 und V_2 entsprechend Fall 1 des Beweises zu Satz 4.1. $\mathcal{O}(n)$
- Schritt 5:** Ansonsten, d.h. falls $\left| \bigcup_{i=m+1}^{M-1} S_i \right| > \frac{2}{3}n$ ist, konstruiere G' wie in Fall 2 des Beweises zu Satz 4.1. $\mathcal{O}(n)$
- Schritt 6:** Wähle die Nichtbaumkante $\{x, y\}$ und den dadurch induzierten Kreis $K_{x,y}$ in G' wie im Beweis zu Lemma 4.2.
 Berechne die Größen der „Unterbäume“ zu allen Knoten in G' .
 Berechne $|Inneres(K_{x,y})|$ und $|Äußeres(K_{x,y})|$ und sei $\mathcal{O}(n)$
 o.B.d.A. $|Inneres(K_{x,y})| \geq |Äußeres(K_{x,y})|$:
- Schritt 7:** Solange $|Inneres(K_{x,y})| > \frac{2}{3}n$ ist, ersetze $\{x, y\}$ und $K_{x,y}$ wie im Beweis zu Lemma 4.2, Fall 1 bzw. Fall 2.
 Berechne S, V_1 und V_2 geeignet, d.h. $S := S' \cup S_m \cup S_M$ und o.B.d.A. $V_1 := V'_1$ und $V_2 = V \setminus (V_1 \cup \{s\})$. $\mathcal{O}(n)$