

### 3 Färbung planarer Graphen

In der Einführung haben wir bereits das Färbungsproblem angesprochen. In diesem Kapitel werden wir beweisen, dass jeder planare Graph mit fünf Farben gefärbt werden kann. Tatsächlich ist jeder planare Graph sogar vierfärbbar. Der Beweis des Vierfarbensatzes ist allerdings zu aufwendig, um ihn in der Vorlesung zu behandeln.

**KNOTENFÄRBUNGSPROBLEM**

Gegeben sei ein Graph  $G = (V, E)$ . Färbe die Knoten aus  $V$  mit möglichst wenigen Farben so ein, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

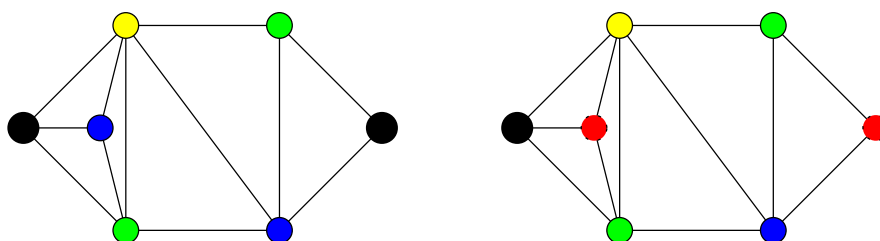


Abbildung 3.1: Beispiele von Knotenfärbungen

Bezeichne  $\chi(G)$  die minimale Anzahl an Farben, die benötigt wird um  $G$  zulässig zu färben ( $\chi(G)$  heißt auch „chromatische Zahl“ von  $G$ ) und  $cl(G)$  die Cliquenzahl von  $G$ , d.h. das maximale  $t \leq |V|$ , so dass  $G$  einen  $K_t$  als knoteninduzierten Subgraphen enthält. Offensichtlich ist  $\chi(G) \geq cl(G)$ .

**Satz 3.1.** *Jeder planare Graph kann mit fünf Farben zulässig gefärbt werden.*

**Beweis.** Wir führen eine Induktion über die Anzahl der Knoten  $n$ . Für  $n \leq 5$  gilt die Behauptung trivialerweise. Sei also jeder planare Graph mit höchstens  $n - 1$  Knoten fünffärbbar, und  $G$  habe  $n$  Knoten.  $G$  enthält mindestens einen Knoten  $v$  mit  $d(v) \leq 5$ .

**Fall 1:** Es existiert ein Knoten  $v$  mit  $d(v) \leq 4$ . Betrachte Einbettung von  $G$ , mit  $v, w_1, \dots, w_4$  wie folgt:

Entferne  $v$  und die entsprechenden Kanten  $\{v, w_i\}$  aus  $G$ . Dann entsteht der Graph  $G - v$  mit  $n - 1$  Knoten, der per Induktionsannahme fünffärbbar ist. Eine Fünffärbung von  $G - v$  induziert dann eine Fünffärbung von  $G$ , wobei  $v$  gerade mit der Farbe gefärbt wird, die für keinen der  $w_i$  benutzt wurde.

### 3 Färbung planarer Graphen

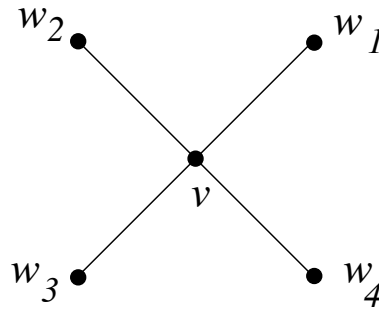


Abbildung 3.2: Illustration von Fall 1.

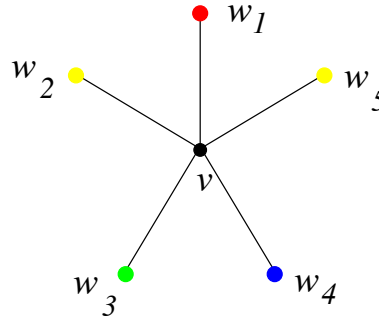


Abbildung 3.3: Illustration zu Fall 2.

**Fall 2:** Der minimale Grad in  $G$  ist fünf und  $v$  sei ein Knoten mit  $d(v) = 5$ . Betrachte wieder eine Einbettung von  $G$  wie in Abbildung 3.3.

Entferne  $v$  und die entsprechenden Kanten  $\{v, w_i\}$  und färbe wieder  $G$  induktiv basierend auf einer Fünffärbung von  $G - v$ .

**Fall 2.1:** Falls für  $w_1, \dots, w_5$  nicht alle fünf Farben bei einer Fünffärbung von  $G - v$  verwendet werden, kann  $G$  wie in Fall 1 gefärbt werden.

**Fall 2.2:** Jedes  $w_i$  hat eine eigene Farbe  $i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ . Betrachte den Subgraph  $H$  von  $G - v$ , der durch die Knoten mit Farben 1 und 4 induziert wird.

Falls  $w_1$  und  $w_4$  in  $H$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten  $H_1$  bzw.  $H_4$  liegen, so vertausche in  $H_1$  die Farben 1 und 4 und färbe  $v$  in  $G$  mit Farbe 1.

Falls  $w_1$  und  $w_4$  in  $H$  verbunden sind, betrachte analog  $w_2$  und  $w_5$  und den durch Farben 2 und 5 induzierten Subgraph  $H'$ . Wegen der Planarität von  $G$  sind  $w_2$  und  $w_5$  in  $H'$  nicht verbunden. Durch Vertauschen der Farben 2 und 5 in der Zusammenhangskomponente von  $w_2$  in  $H'$  und Färben von  $v$  mit Farbe 2 erhält man dann wieder eine Fünffärbung von  $G$ .

Dieser Beweis induziert einen einfachen Algorithmus um planare Graphen mit fünf Farben zu färben.

**Fünffärbungsalgorithmus**

**Schritt 1:** Sortiere die Knoten in der Reihenfolge  $v_1, \dots, v_n$ , so dass  $d_{G_i}(v_i) \leq 5$ , wobei  $G_1 := G$  und  $G_i := G - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  für  $i \geq 2$ .

**Schritt 2:** Färbe dann zunächst  $G_n$ , dann  $G_{n-1}$  usw. wie im Beweis von Satz 3.1.

**Versuch einer Vierfärbung mittels der gleichen Technik wie in Satz 3.1.**

Ist diese Vorgehensweise anwendbar um zu einer Vierfärbung eines planaren Graphen zu kommen? Betrachte einen maximal planaren Graphen  $G = (V, E)$ . Existiert ein  $v \in V$ , mit  $d(v) \leq 3$ , so kann wie in Fall 1 vorgegangen werden. Falls ein  $v \in V$ , mit  $d(v) = 4$  existiert, so kann aus einer Vierfärbung von  $G - v$  eine Vierfärbung von  $G$  analog zum Beweis von Satz 3.1, Fall 2 konstruiert werden. Sei also der minimale Grad eines Knoten 5 und  $v \in V$  mit  $d(v) = 5$ . Angenommen alle vier Farben *rot*, *blau*, *gelb*, *grün* würden für die Vierfärbung von  $w_1, \dots, w_5$  verwendet. Seien o.b.d.A. die Knoten  $w_2$  und  $w_5$  mit der Farbe *gelb* gefärbt,  $w_1$  *rot*,  $w_3$  *grün* und  $w_4$  *blau* und sei  $H$  der Subgraph, der durch *rot* und *blau* induziert wird. Sind  $w_1$  und  $w_4$  nicht in  $H$  verbunden, so können *rot* und *blau* in einer der Komponenten vertauscht werden. Ebenso kann man vorgehen, wenn  $w_1$  und  $w_3$  nicht in dem entsprechenden Subgraphen verbunden sind.

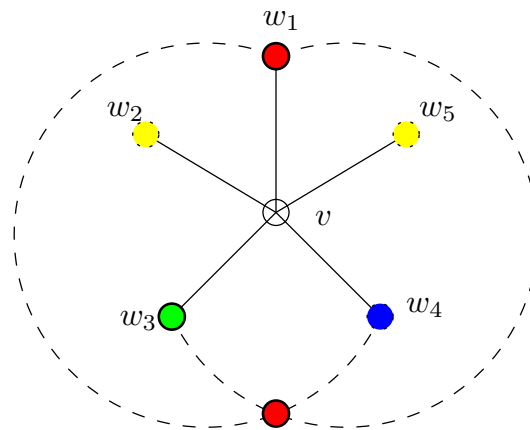


Abbildung 3.4: Illustration zur Vierfärbung.

Seien also  $w_1$  und  $w_4$  und  $w_1$  und  $w_3$  jeweils in dem rot-blauen bzw. rot-grünen Subgraphen verbunden. Dann sind  $w_2$  und  $w_5$  aber weder in dem gelb-blauen noch in dem gelb-grünen Subgraphen verbunden. Die gelb-grüne Komponente  $H_5$ , die  $w_5$  enthält, enthält nicht  $w_2$  und  $w_3$ , und die gelb-blaue Komponente  $H_2$ , die  $w_2$  enthält, enthält nicht  $w_4$  und  $w_5$ .

### 3 Färbung planarer Graphen

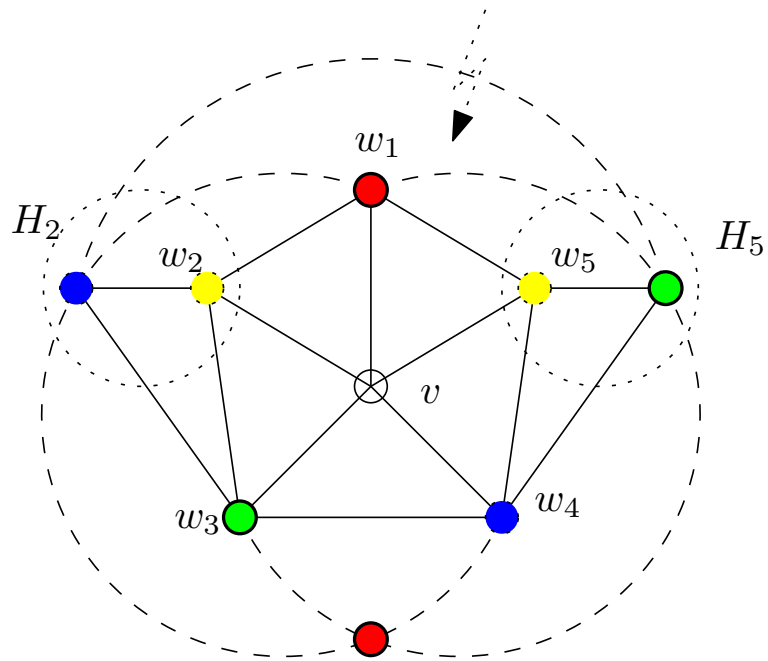


Abbildung 3.5: Gegenbeispiel zur Vierfärbung

Vertausche also in  $H_5$  gelb mit grün und in  $H_2$  gelb mit blau. Dann kann gelb für  $v$  verwendet werden. Dies kann jedoch zu einer unzulässigen Knotenfärbung führen, siehe [Abbildung 3.5](#).