

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

2.1 Grundlegende Eigenschaften

Ein *Graph* $G = (V, E)$ besteht aus einer endlichen Menge V von *Knoten* und einer endlichen Menge E von *Kanten*, sowie einer Vorschrift, die jeder Kante $e \in E$ genau zwei Knoten $u, v \in V$, ihre *Endknoten*, zuordnet ($u = v$ möglich). Sind die beiden Endknoten u, v von e identisch, so heißt e *Schlinge*; wir sagen allgemein, dass Kante e Knoten u und v *verbindet*.

Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, heißen *benachbart*. Zu $v \in V$ definiere die *Nachbarschaft* $N(v) := \{u \in V : u \text{ ist zu } v \text{ benachbart}\}$. Ist der Knoten v ein Endknoten der Kante e , so heißen v und e *inzident*. Ebenso heißen zwei Kanten, die einen gemeinsamen Endknoten haben, *inzident*. Haben Kanten e_1, \dots, e_k , $k \geq 2$ beide Endknoten gemeinsam, so heißen sie *Mehrfachkanten*. Falls $G = (V, E)$ keine Schlingen und keine Mehrfachkanten besitzt, so heißt G *einfach*. In diesem Fall kann E als Teilmenge von $\{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ aufgefasst werden. Der *Grad von v* , bezeichnet mit $d(v)$, ist die Anzahl der zu v inzidenten Kanten. In einem einfachen Graphen ist also $d(v) := |N(v)|$.

Eine Folge $v_0 e_1 v_1 e_2 \dots v_{k-1} e_k v_k$ von Knoten und Kanten in G , für die v_{i-1} und v_i Endknoten von e_i sind und $e_i \neq e_{i+1}$, ist ein *Weg* von v_0 (Anfangsknoten) nach v_k (Endknoten). Die *Länge* des Weges ist die Anzahl der durchlaufenen Kanten. Ist G einfach, so geben wir bei einem Weg in G die Kanten nicht explizit an. Ein Weg ohne Knotenwiederholung heißt *einfach*. Ein Weg, für den Anfangs- und Endknoten identisch sind, heißt *Kreis* oder *Zykel*. Ein Kreis, an dem (außer Anfangs- und Endknoten) alle Knoten verschieden sind, heißt wiederum *einfach*. $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend*, wenn es zwischen je zwei Knoten aus V einen Weg in G gibt, ansonsten ist G *unzusammenhängend*. Da die „Wegverbundenheit“ eine Äquivalenzrelation ist, zerfällt jeder Graph eindeutig in zusammenhängende Komponenten, seine *Zusammenhangskomponenten*.

Ein Graph $G = (V, E)$ kann *dargestellt* werden, indem man die Knoten aus V auf Punkte in der Ebene abbildet, und die Kanten aus E als Jordan-Kurven (stetige, sich selbst nicht kreuzende Kurven) zwischen den Endpunkten.

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, wenn es eine Darstellung von G gibt, in der sich die Kanten nicht kreuzen, also nur in Knoten treffen. Eine solche Darstellung nennen

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

wir dann auch *planare Einbettung*. Eine planare Einbettung eines Graphen zerlegt die Ebene in *Facetten* (*Gebiete*, *Flächen*).

Offensichtlich gibt es zu jedem Knoten v bzw. zu jeder Kante e eines planaren Graphen eine Einbettung, bei der v bzw. e auf dem Rand der äußeren Facette liegt:

Betrachte eine Einbettung auf der Kugel und „rolle“ diese so in der Ebene aus, dass die/eine Facette, die v bzw. e auf ihrem Rand hat, zur äußeren Facette wird.

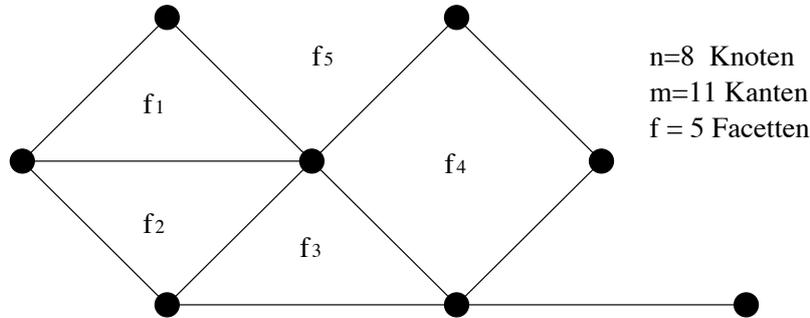


Abbildung 2.1: Knoten, Kanten und Facetten eines planaren Graphen.

Jede Kante, die auf einem einfachen Kreis liegt, grenzt an genau zwei Facetten an; alle anderen an genau eine Facette.

Im folgenden bezeichne immer $n = |V|$, $m = |E|$ und f die Anzahl der Facetten. Der *Satz von Euler* (bewiesen 1750) beschreibt den Zusammenhang zwischen n , m und f in einem planaren Graphen.

Satz 2.1. Satz von Euler

In einem zusammenhängenden planaren Graph $G = (V, E)$, mit $|V| = n$, $|E| = m$ und f Anzahl der Facetten gilt für jede seiner planaren Einbettungen

$$n - m + f = 2.$$

Beweis. Wir führen eine Induktion über m durch. Für $m = 0$ besteht G aus einem einzelnen Knoten und $n - m + f = 1 + 1 = 2$ gilt. Sei nun $m \geq 1$.

Fall 1: Wenn G einen Kreis enthält, so gibt es eine Kante e , die wir aus G entfernen können, so dass $G' = (V, E \setminus \{e\})$ immer noch zusammenhängend ist. Die beiden Facetten von G , die an e angrenzen, werden durch Wegnahme von e zu einer Facette, d.h. die Anzahl der Facetten f' von G' erfüllt $f' = f - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung ist

$$n - (m - 1) + f' = 2,$$

also folgt die Behauptung für G .

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

Fall 2: Enthält G keinen Kreis, so besitzt er genau eine Facette und zerfällt durch Wegnahme einer beliebigen Kante e in zwei zusammenhängende Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $n_1 = |V_1|$, $n_2 = |V_2|$, $m_1 = |E_1|$, $m_2 = |E_2|$ und $n_1 + n_2 = n$, $m_1 + m_2 = m - 1$. Für G_1 bzw. G_2 gilt nach Induktionsvoraussetzung, dass

$$\begin{aligned} n - m + f &= (n_1 + n_2) - (m_1 + m_2 + 1) + 1 \\ &= n_1 - m_1 + n_2 - m_2 \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned} \quad \square$$

Folgerung 2.2. *Ein zusammenhängender, planarer Graph ohne Kreise besitzt $n - 1$ Kanten.*

Ein zusammenhängender Graph ohne Kreis heißt *Baum* und ist offensichtlich immer planar.

Folgerung 2.3. *Ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten hat höchstens $3n - 6$ Kanten.*

Beweis. Betrachte einen planaren Graphen G . Wir können annehmen, dass G maximal planar ist, d.h. unter allen Graphen mit n Knoten maximale Kantenzahl hat. In einer Einbettung von G muss dann jede Facette durch genau drei Kanten begrenzt sein. Insbesondere ist G zusammenhängend. Da jede Kante zwei Facetten begrenzt, gilt $3 \cdot f = 2 \cdot m$. Also gilt mit Satz 2.1, dass $m = 3n - 6$. \square

Lemma 2.4. *Sei G ein planarer, einfacher Graph mit $n \geq 3$ Knoten, $d_{\max}(G)$ bezeichne den Maximalgrad in G und n_i die Anzahl der Knoten in G mit Grad i , $0 \leq i \leq d_{\max}(G)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} 6 \cdot n_0 + 5 \cdot n_1 + 4 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + 2 \cdot n_4 + n_5 \geq \\ n_7 + 2 \cdot n_8 + 3 \cdot n_9 + \dots + (d_{\max}(G) - 6) \cdot n_{d_{\max}} + 12. \end{aligned}$$

Beweis. Offensichtlich ist $n = \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} n_i$ und $2 \cdot m = \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} i \cdot n_i$.

Da wegen Folgerung 2.3 gilt, dass $6n \geq 2m + 12$ ist, folgt

$$6 \cdot \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} n_i \geq \sum_{i=0}^{d_{\max}(G)} i \cdot n_i + 12. \quad \square$$

Folgerung 2.5. *Jeder planare, einfache Graph enthält einen Knoten v mit $d(v) \leq 5$.*

2.2 Charakterisierung planarer Graphen

Wir wollen nun untersuchen, wie sich planare Graphen charakterisieren lassen. Eine zentrale Rolle spielt dabei der *Satz von Kuratowski*, der planare Graphen anhand von verbotenen Subgraphen charakterisiert. Ein Graph $H = (V(H), E(H))$ heißt *Subgraph* (*Teilgraph*) von $G = (V, E)$, falls $V(H) \subseteq V$ und $E(H) \subseteq E$. Eine Teilmenge $V' \subseteq V$ induziert einen Subgraph $H = (V', E(H))$ von G durch $E(H) := \{e \in E : \text{beide Endknoten von } e \text{ sind in } V'\}$, genannt *knoteninduzierter Subgraph*. Jede Teilmenge $E' \subseteq E$ induziert einen Subgraph $H = (V(H), E')$ von G durch $V(H) := \{v \in V : \text{es gibt eine Kante } e \in E' \text{ mit Endknoten } v\}$, genannt *kanteninduzierter Subgraph*.

Ein Graph H ist eine *Unterteilung* von G , wenn H aus G entsteht, indem Kanten von G durch einfache Wege über neu eingefügte Knoten ersetzt werden. Alle neu eingefügten Knoten haben also Grad 2 (siehe Abbildung 2.2).

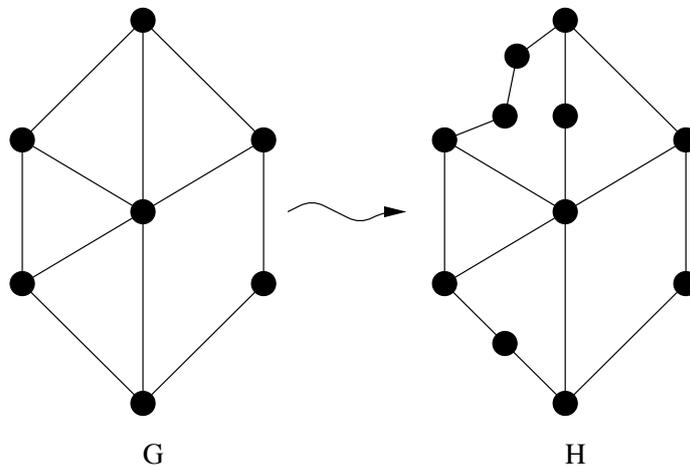


Abbildung 2.2: H ist eine Unterteilung von G.

Bemerkung.

1. Ein Graph, der einen nicht planaren Subgraph besitzt, ist nicht planar.
2. Ein Graph, der eine Unterteilung eines nicht planaren Graphen ist, ist nicht planar.
3. Ein Graph, der eine Unterteilung eines nicht planaren Graphen als Subgraph besitzt, ist nicht planar.

Wir wollen nun die planaren Graphen vollständig durch verbotene Subgraphen charakterisieren. Vorab benötigen wir noch den Begriff des k -fachen Zusammenhangs. Eine Menge $S \subset V$ heißt *Separator* von $G = (V, E)$, falls der durch $V \setminus S$ induzierte Subgraph von G unzusammenhängend ist. S trennt die Knoten $u, v \in V \setminus S$, falls u und v in dem

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

durch $V \setminus S$ induzierten Subgraph (bezeichnet mit $G - S$) in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen (siehe Abbildung 2.3).

Wir definieren den *Knotenzusammenhang* $\kappa_G(u, v)$ zweier Knoten u und v bzw. den *Knotenzusammenhang* $\kappa(G)$ des Graphen G wie folgt.

$$\kappa_G(u, v) := \begin{cases} |V| - 1, & \text{falls } \{u, v\} \in E \\ \min_{\substack{S \subseteq V, \\ S \text{ trennt } u \text{ und } v}} |S|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\kappa(G) := \min_{\substack{S \subseteq V, \\ S \text{ Separator von } G}} \{|S|, |V| - 1\} = \min_{u, v \in V} \kappa_G(u, v)$$

Eine Menge $S \subseteq E$ heißt *Schnitt* von $G = (V, E)$, falls der durch $E \setminus S$ induzierte Subgraph von G unzusammenhängend ist, d.h. in Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ zerfällt, mit $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, wobei alle Kanten aus S einen Endknoten in V_1 und einen Endknoten in V_2 haben. S trennt die Knoten $u, v \in V$, falls u und v in dem durch $E \setminus S$ induzierten Subgraph (bezeichnet mit $G - S$) in verschiedenen Zusammenhangskomponenten liegen.

Entsprechend definieren wir den *Kantenzusammenhang* $\lambda_G(u, v)$ zweier Knoten u und v , bzw. den *Kantenzusammenhang* $\lambda(G)$ des Graphen G wie folgt.

$$\lambda_G(u, v) := \min_{\substack{S \subseteq E, \\ S \text{ trennt } u \text{ und } v}} |S|$$

$$\lambda(G) := \min_{\substack{S \subseteq E, \\ S \text{ Schnitt von } G}} |S| = \min_{u, v \in V} \lambda_G(u, v)$$

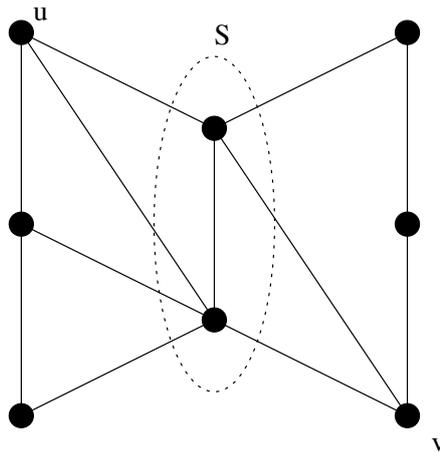


Abbildung 2.3: S trennt u und v .

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

Ein Schnitt S mit $|S| = 1$ heißt *Brücke*. G heißt *k-fach knoten- bzw. kantenzusammenhängend*, falls $k \leq \kappa(G)$ bzw. $k \leq \lambda(G)$. Zwei Wege in einem Graphen G heißen (*intern*) *knotendisjunkt*, wenn sie (außer den Endknoten) keine gemeinsamen Knoten enthalten und *kantendisjunkt*, wenn sie keine gemeinsame Kante enthalten.

Satz 2.6 (Satz von Menger (1927), ohne Beweis).

Seien s und t zwei Knoten eines Graphen G , s und t nicht adjazent bei der knotendisjunkten Version.

- $\kappa_G(s, t) \geq k$ genau dann, wenn es k paarweise intern knotendisjunkte Wege zwischen s und t in G gibt.
- $\lambda_G(s, t) \geq k$ genau dann, wenn es k paarweise kantendisjunkte Wege zwischen s und t in G gibt.

Der Satz von Menger ist ein typisches Beispiel einer *Dualitätsaussage*, d. h. Dualität zwischen einem Minimum (hier Größe des Separators bzw. Schnittes) und einem Maximum (hier Anzahl disjunkter Wege). Die kantendisjunkte Version des Satzes ist ein Spezialfall des Max-Flow-Min-Cut-Theorems (alle Kantenkapazitäten sind eins), das in der Vorlesung „Algorithmentechnik“ bewiesen wurde.

Folgerung 2.7. Ist $S \subset V$ ein Separator, der s und t trennt und $|S| = \kappa_G(s, t) = k$, so gibt es auch zwei „Bündel“ von jeweils k intern knotendisjunkten Wegen von s nach S und von t nach S , die jeweils zu verschiedenen Knoten in S führen.

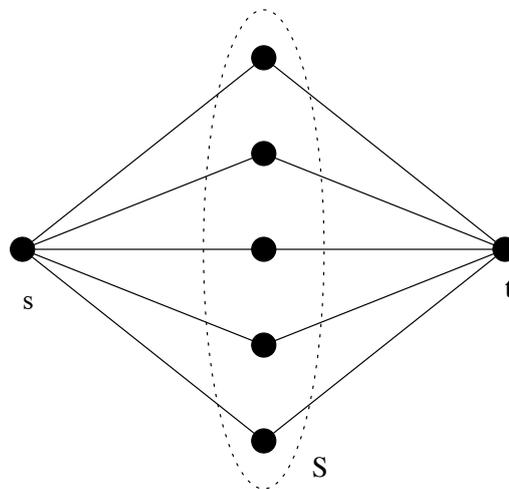


Abbildung 2.4: Illustration zu Folgerung 2.7.

Satz 2.8 (Satz von Kuratowski (1930)).

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ als Subgraph enthält.

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass K_5 und $K_{3,3}$ nicht planar sind. Damit ist klar, dass ein planarer Graph keine Unterteilung des K_5 bzw. $K_{3,3}$ als Subgraph enthalten kann. Es bleibt zu zeigen, dass jeder Graph, der keine Unterteilung des K_5 bzw. $K_{3,3}$ als Subgraph enthält, planar ist.

Wir führen eine Induktion über die Anzahl n der Knoten des Graphen $G = (V, E)$ durch. Für $n \leq 4$ gilt die Behauptung, da K_4 planar ist. Für $n \geq 5$ führen wir eine Induktion über die Anzahl m der Kanten des Graphen durch.

Wenn der Graph $m = 0$ Kanten enthält, ist G trivialerweise planar. Gelte also die Behauptung für alle Graphen mit weniger als n Knoten oder n Knoten und echt weniger als m Kanten. $G = (V, E)$ sei ein Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $|E| = m$. Wir machen eine Fallunterscheidung nach $\kappa(G)$.

Fall 1: $\kappa(G) = 0$

Nach Induktionsvoraussetzung kann jede Zusammenhangskomponente von G planar eingebettet werden; also ist auch G planar. ■

Fall 2: $\kappa(G) = 1$

Es gibt einen Knoten v , so dass $\{v\}$ ein Separator von G ist. G kann also auch zerlegt werden in zwei kantendisjunkte Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $E_1 \cup E_2 = E$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Nach Induktionsvoraussetzung können G_1 und G_2 planar eingebettet werden, und zwar so, dass v jeweils auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Aus diesen Einbettungen erhält man dann auch eine planare Einbettung von G (siehe Abbildung 2.5). ■

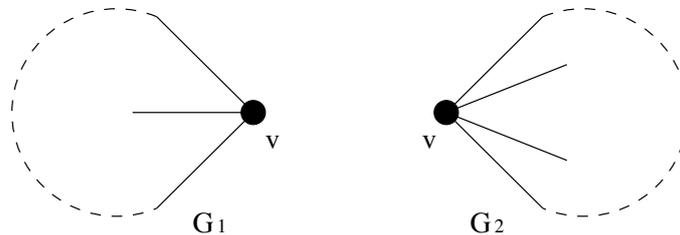


Abbildung 2.5: $\{v\}$ ist Separator von G .

Fall 3: $\kappa(G) = 2$

Es gibt einen Separator $\{u, v\}$ und G kann zerlegt werden in $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \{u, v\}$, $E = E_1 \cup E_2$ und $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ bzw. $E_1 \cap E_2 = \{\{u, v\}\}$, falls $\{u, v\} \in E$, siehe Abbildung 2.6.

Falls $\{u, v\} \in E$, so können nach Induktionsvoraussetzung G_1 und G_2 so planar eingebettet werden, dass $\{u, v\}$ jeweils auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Daraus erhält man dann auch eine planare Einbettung von G .

Falls $e := \{u, v\} \notin E$, so betrachte $G_1 + e (= (V_1, E_1 \cup \{e\}))$ und $G_2 + e$. Wir zeigen, dass auch $G_1 + e$ und $G_2 + e$ planar sind. Nach Induktionsvoraussetzung genügt

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

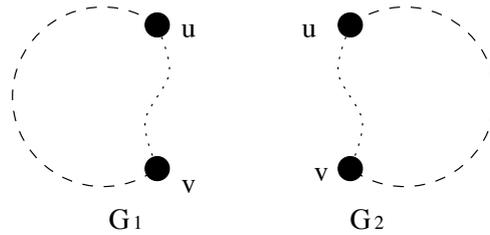


Abbildung 2.6: $\{u, v\}$ ist Separator von G .

es dazu, zu zeigen, dass sie keine Unterteilung des K_5 bzw. $K_{3,3}$ enthalten. Falls $G_i + e$ eine Unterteilung des K_5 oder des $K_{3,3}$ enthalten würde, so müsste diese die Kante e enthalten. Da $\kappa(G) = 2$, ist auch $\kappa(G_i + e) \geq 2$. Es gibt also in G_i jeweils einen Weg P_i von u nach v , $i = 1, 2$. Dann enthielte aber auch $G_i + P_j$, mit $i \neq j$ eine Unterteilung des K_5 bzw. des $K_{3,3}$, die P_i enthält und somit enthielte G eine solche Unterteilung. Dies ist ein Widerspruch.

Wir können also wieder $G_i + e$ so planar einbetten, dass e auf dem Rand der äußeren Facette liegt, und erhalten daraus eine planare Einbettung für G . ■

Fall 4: $\kappa(G) \geq 3$

Sei $e = \{u, v\}$ eine beliebige Kante und $G' := G - e$. Wir unterscheiden die beiden Fälle $\kappa_{G'}(u, v) = 2$ und $\kappa_{G'}(u, v) \geq 3$.

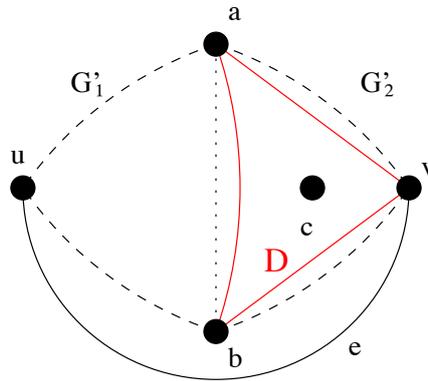


Abbildung 2.7: Illustration von Fall 4.1: $\{a, b\}$ ist Separator von $G - e$.

Fall 4.1: $\kappa_{G'}(u, v) = 2$

Es gibt einen Separator $\{a, b\}$, der u und v in G' trennt. G' kann dann an den Knoten a, b zerlegt werden in Subgraphen $G'_1 = (V_1, E_1)$ und $G'_2 = (V_2, E_2)$ bestehend aus den durch Wegnahme von $\{a, b\}$ induzierten Subgraphen jeweils zusammen mit a, b und den dazu inzidenten Kanten zu Knoten im Subgraph. Es ist also $V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \{a, b\}$, $u \in V_1$, $v \in V_2$, $E_1 \cup E_2 = E \setminus \{e\}$ und $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ bzw. $E_1 \cap E_2 = \{\{a, b\}\}$, falls $\{a, b\} \in E$.

Da $n \geq 5$ ist, existiert ein weiterer Knoten c , wobei o. B. d. A. c in G'_2 sei. Füge,

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

falls noch nicht vorhanden, die Kanten $\{a, b\}$, $\{a, v\}$ und $\{b, v\}$ ein, und nenne dieses „Dreieck“ D (siehe Abbildung 2.7).

Setze $G_1 := G'_1 + D + e$ und $G_2 := G'_2 + D$. Dann haben G_1 und G_2 genau D gemeinsam. Für G_1 und G_2 ist die Induktionsvoraussetzung erfüllt, da sie beide echt weniger Knoten als G haben. Wir gehen nun folgendermaßen vor:

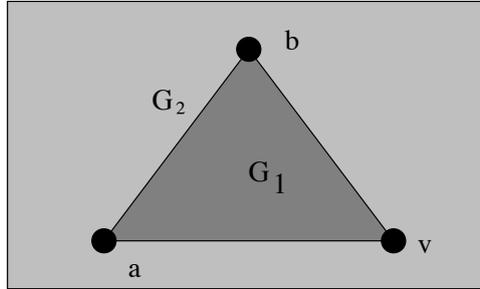


Abbildung 2.8: Illustration von Fall 4.1. Einbettung von G_1 in das Dreieck von G_2 .

G_1 und G_2 werden so eingebettet, dass D jeweils eine Facette ist, und zwar die äußere Facette von G_1 und eine innere von G_2 . Für G wird dann bewiesen, dass basierend auf diesen Einbettungen ebenfalls eine planare Einbettung existiert. Dabei wird G_1 in G_2 eingebettet (siehe Abbildung 2.8).

Zunächst muss natürlich gezeigt werden, dass G_1 und G_2 planar sind, d.h. D keinen K_5 oder $K_{3,3}$ „zulässt“, und darüber hinaus, dass G_1 , G_2 geeignet (wie oben) einbettbar sind.

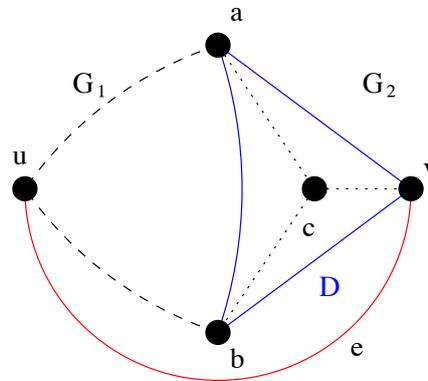


Abbildung 2.9: Illustration von Fall 4.1. $\{a, b, v\}$ ist ein Separator, der u und c trennt.

Da $\kappa(G) \geq 3$ ist, gibt es drei knotendisjunkte Wege in G , die u und c verbinden. Die Menge $\{a, b, v\}$ muss in G ein Separator sein, der u und c trennt. Also gehen alle drei Wege von u nach c durch diesen Separator. Entsprechend existieren die beiden Bündel knotendisjunkter Wege von c nach $\{a, b, v\}$ und von u nach $\{a, b, v\}$ (siehe Abbildung 2.9).

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

Wir zeigen: Enthielte nun G_1 oder G_2 eine Unterteilung des K_5 oder $K_{3,3}$, die Kanten aus D benutzt, so gäbe es auch in G eine Unterteilung des K_5 bzw. des $K_{3,3}$, die gegebenenfalls über geeignete Wege von c nach a, b und v , bzw. von u nach a, b und v gingen.

Annahme 4.1.1: G_1 enthält eine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$, die Kanten aus D benutzt.

Wenn sie nur eine der Kanten aus D benutzt, so kann diese leicht durch einen entsprechenden Weg über c in G simuliert werden. Alle drei Kanten aus D können nur bei einem K_5 benutzt werden, in dem v nicht Unterteilungsknoten ist. Ein solcher K_5 kann aber nicht existieren, da $d_{G_1}(v) = 3$. Ebenso kann es keinen K_5 oder $K_{3,3}$ geben, der zwei Kanten aus D benutzt und den zu diesen beiden Kanten inzidenten Knoten a, b oder v nicht als Unterteilungsknoten benutzt (K_5 führt zu Unterteilung von $K_{3,3}$. Werden zwei Kanten aus D für einen K_5 oder $K_{3,3}$ benutzt, so können diese zusammen mit dem Knoten (a, b oder v), der zu beiden Kanten inzident ist, durch c mit geeigneten Wegen simuliert werden. Also führt die Annahme zu einem Widerspruch. \diamond

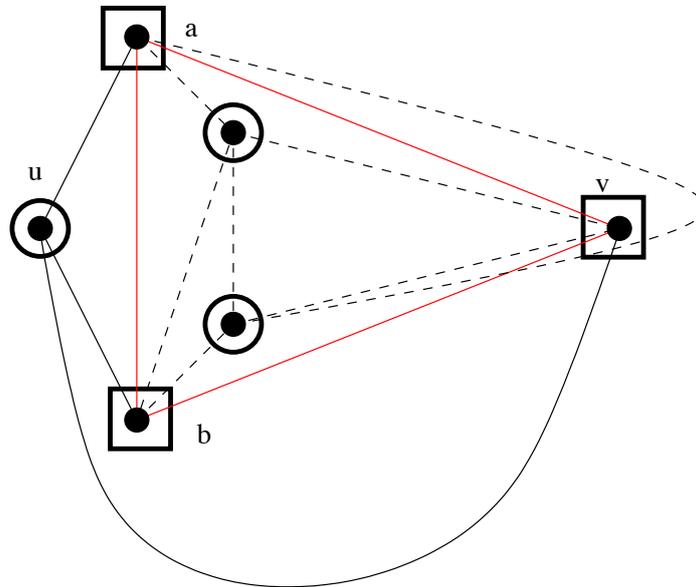


Abbildung 2.10: Illustration zu Fall 4.1.2.

Annahme 4.1.2 G_2 enthält eine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$, die Kanten aus D benutzt.

Eine einzelne Kante aus D kann wiederum leicht durch einen Weg über u simuliert werden. Wenn alle drei Kanten aus D benutzt werden, so gibt es einen K_5 , also zwei weitere Knoten in G_2 , die knotendisjunkte Wege zu a, b und v haben. Dann würde aber u mit diesen beiden Knoten und den Knoten a, b, v und den entsprechenden Wegen eine Unterteilung des $K_{3,3}$ in G sein (siehe Abbildung 2.10).

Werden zwei Kanten aus D für eine Unterteilung des K_5 benutzt, so kann wiederum

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

ähnlich wie eben eine Unterteilung des $K_{3,3}$ in G konstruiert werden. Zwei Kanten aus D zusammen mit dem Knoten, der zu diesen beiden Kanten in einer Unterteilung des $K_{3,3}$ inzident ist, können durch entsprechende Wege über u zusammen mit u simuliert werden. \diamond

Wir können nun G_1 und G_2 so planar einbetten, dass D eine Facette begrenzt. Betrachte dazu eine planare Einbettung von G_1 . Angenommen in dieser Einbettung gibt es Knoten x und y im Inneren bzw. Äußeren von D . Da $\kappa_G(x, y) \geq 3$ ist, gibt es drei disjunkte Wege in G von x zu a, b, v bzw. y zu a, b, v . Zusammen mit den Wegen (die nicht in G_1 liegen) von c zu a, b und v gibt es dann aber einen $K_{3,3}$ in G . Die Argumentation ist analog für G_2 . \diamond

Fall 4.2: $\kappa_{G'}(u, v) \geq 3$

Nach Induktionsvoraussetzung ist G' planar. Betrachte also eine planare Einbettung von G' . Liegen u und v auf dem Rand einer gemeinsamen Facette, so kann die Kante $\{u, v\} = e$ innerhalb dieser Facette ebenfalls planar eingefügt werden.

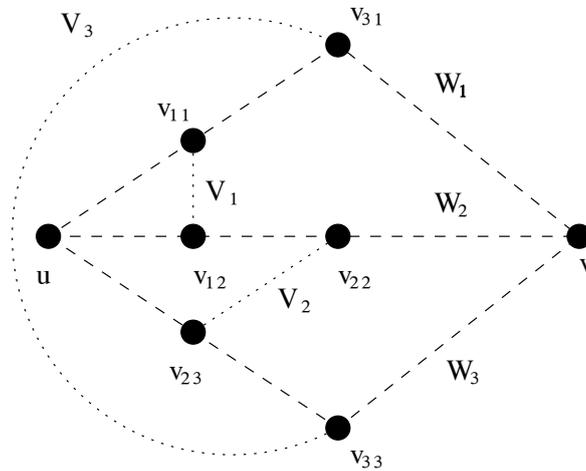


Abbildung 2.11: Illustration zu Fall 4.2.

Den anderen Fall führen wir zum Widerspruch: Betrachte also die Facetten, die an u grenzen. Da $\kappa_{G'}(u, v) \geq 3$, gibt es mindestens drei disjunkte Wege W_1, W_2 und W_3 von u nach v in G' , also auch mindestens drei Facetten, die an u grenzen. Die Ränder dieser Facetten induzieren wiederum mindestens drei Wege V_1, V_2 und V_3 um u herum. Wir führen den Beweis für den Fall, dass es genau drei Facetten gibt, die an u angrenzen. Die Argumentation für den Fall, dass es mehr als drei angrenzende Facetten gibt, ist analog.

Sei v_{ij} jeweils der gemeinsame Knoten von V_i und W_j . Wir zeigen, dass je nachdem ob die entsprechenden beiden Knoten aus W_j identisch sind oder nicht, es nun eine Unterteilung des $K_{3,3}$ oder des K_5 in G gibt (siehe Abbildung 2.11).

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

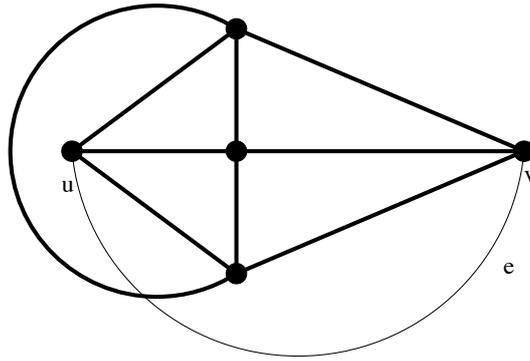


Abbildung 2.12: Fall 4.2 a).

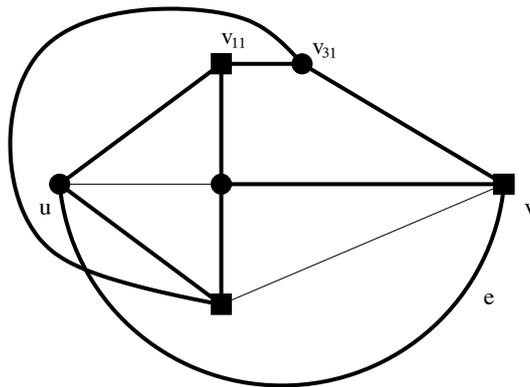


Abbildung 2.13: Fall 4.2 b).

- a) $v_{ij} = v_{lj}$ für alle $j \in \{1, 2, 3\}$
Dies ist Unterteilung des K_5 .
- b) $v_{ij} = v_{lj}$ für genau zwei der $j \in \{1, 2, 3\}$
Dann ergibt sich eine Unterteilung des $K_{3,3}$.
- c) $v_{ij} = v_{lj}$ für genau ein $j \in \{1, 2, 3\}$
Dann ergibt sich eine Unterteilung des $K_{3,3}$.
- d) keine Gleichheit
Dann ergibt sich eine Unterteilung des $K_{3,3}$. ◇ ■

Somit haben wir gezeigt, dass sich G planar einbetten lässt, falls G keine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ enthält. □

Zu einem beliebigen Graphen $G = (V, E)$ können wir den dazu korrespondierenden einfachen Graphen betrachten, der entsteht, indem alle Schleifen aus G entfernt werden und Kanten mit denselben Endknoten zu einer Kante zusammengefasst werden.

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

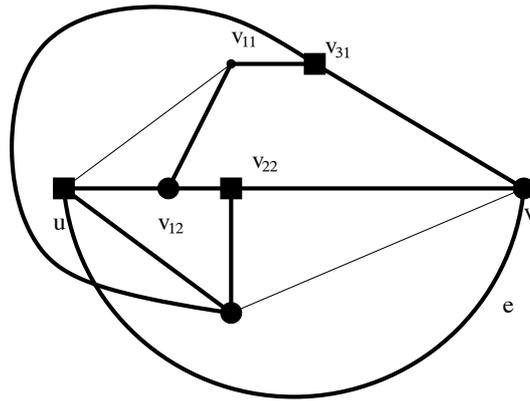


Abbildung 2.14: Fall 4.2 c).

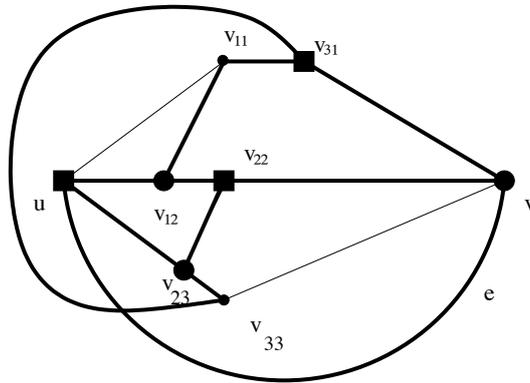


Abbildung 2.15: Fall 4.2 d).

Offensichtlich ist ein Graph planar genau dann, wenn der korrespondierende einfache Graph planar ist.

Der Satz von Kuratowski liefert also auch eine Charakterisierung nicht einfacher, planarer Graphen. Mit dem Satz von Kuratowski haben wir die planaren bzw. nicht planaren Graphen vollständig charakterisiert. Wie nützlich ist der Satz von Kuratowski aus algorithmischer Sicht?

Ein Algorithmus, der basierend auf der Aussage dieses Satzes für einen beliebigen Graphen untersucht, ob dieser planar ist, würde Subgraphen betrachten, und entscheiden, ob diese Unterteilungen des $K_{3,3}$ oder K_5 sind. Es gibt mindestens 2^m Subgraphen. Dieses Verfahren scheint also nicht effizient zu sein. Man könnte anhand des Beweises einen effizienten Algorithmus angeben. Es gibt verschiedene effiziente Algorithmen zum Testen auf Planarität mit Laufzeit $\mathcal{O}(n)$ [].

2.3 Dualgraph

Betrachte einen planaren Graphen $G = (V, E)$ mit einer festen Einbettung. F sei die Menge der Facetten von G bzgl. dieser Einbettung. Definiere dazu einen Graphen $G^* = (V^*, E^*)$ wie folgt:

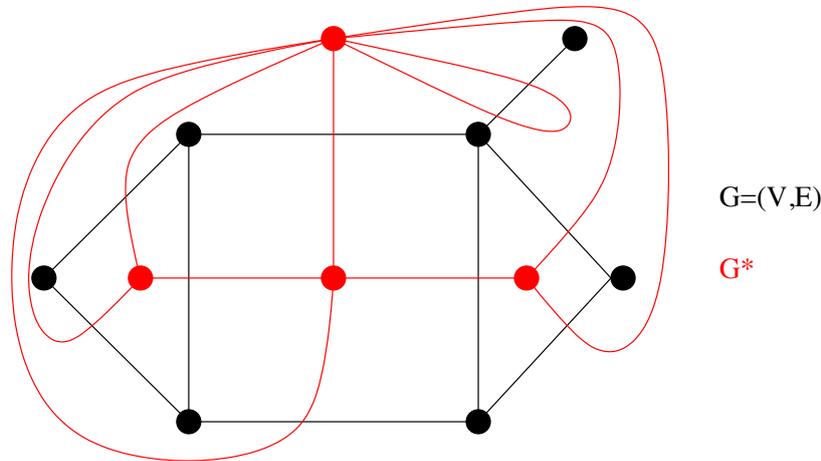


Abbildung 2.16: Ein planar eingebetteter Graph G und sein Dualgraph G^* .

Zu jeder Facette aus F gibt es einen Knoten in V^* , und zu jeder Kante $e \in E$ gibt es genau eine duale Kante $e^* \in E^*$, die die beiden Knoten aus V^* verbindet, welche den Facetten aus F entsprechen, an die e angrenzt. G^* heißt *geometrischer Dualgraph* (oder nur Dualgraph) zu G (siehe Abbildung 2.16).

Beobachtung.

1. Der Dualgraph G^* zu einem einfachen planaren Graphen G ist nicht notwendig einfach. G^* besitzt genau dann Mehrfachkanten, wenn es zwei benachbarte Facetten gibt, die mehr als eine begrenzende Kante gemeinsam haben. G^* enthält genau dann eine Schleife, wenn G eine Brücke enthält.
2. Offensichtlich ist G^* wieder planar und $(G^*)^* = G$. Jedoch nur, wenn man G^* mit seiner „kanonischen“ Einbettung, die durch die Einbettung von G bestimmt wird, betrachtet.
3. Zu einem planaren Graphen G gibt es möglicherweise mehr als einen Dualgraphen G^* , da G ja möglicherweise mehrere verschiedene Einbettungen besitzt.

Lemma 2.9. Sei $G = (V, E)$ ein planarer Graph und $G^* = (V^*, E^*)$ sein Dualgraph (bzgl. einer festen Einbettung).

$S \subseteq E$ bildet einen Schnitt in G genau dann, wenn die Menge der entsprechenden Kanten $S^* \subseteq E^*$ Kreise in G^* bildet.

$S \subseteq E$ bildet Kreise in G genau dann, wenn die Menge der entsprechenden Dualkanten $S^* \subseteq E^*$ einen Schnitt in G^* bildet.

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

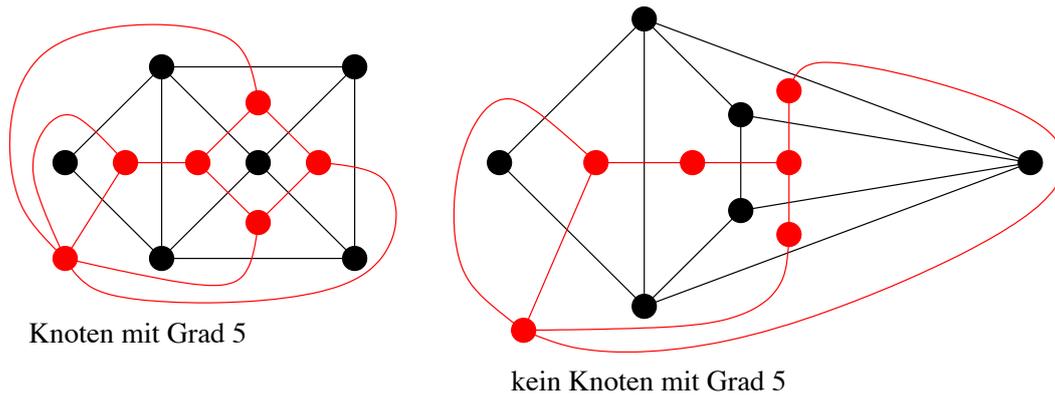


Abbildung 2.17: Verschiedene Dualgraphen desselben Graphen.

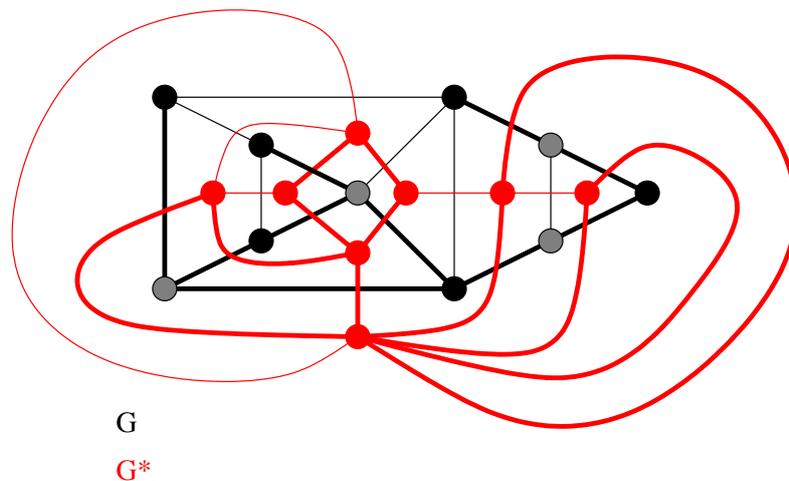


Abbildung 2.18: Illustration zu Lemma 2.9.

Beweis. Da $(G^*)^* = G$ ist, sind die beiden Fälle natürlich äquivalent. Sei o.B.d.A. G zusammenhängend und S^* eine Menge von Kreisen im Dualgraph G^* (bzgl. einer festen Einbettung). Die Kanten aus G , die dual zu S^* sind, trennen gerade alle Knoten von G im Inneren der Kreise S^* von den Knoten des Äußeren der Kreise von S^* . \square

2.4 Suchmethoden in planaren Graphen

Bekannte Suchmethoden in Graphen sind die *Tiefensuche* (DFS) und die *Breitensuche* (BFS), und werden in der Grundvorlesung „Algorithmen und Datenstrukturen“ behandelt.

Die Grundidee der Tiefensuche besteht darin, dass der Graph systematisch „durchsucht“

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

wird, d.h. Knoten und Kanten werden besucht, wobei in einem „Suchschritt“ wenn möglich weitergegangen wird zu einem „neuen“ Knoten. Die Grundidee der Breitensuche besteht darin, dass der Graph systematisch „durchsucht“ wird, wobei in einem Suchschritt zunächst alle Nachbarn eines Knoten besucht werden, bevor von dem als ersten besuchten Nachbarn aus weitergegangen wird. Konkrete Implementationen einer Tiefen- bzw. Breitensuche hängen u.a. davon ab, welches „Ergebnis“ gewünscht wird.

Knoten-DFS. Wähle einen beliebigen Knoten aus, markiere ihn und lege ihn auf einen „Stapel“. Solange der Stapel noch einen Knoten enthält, betrachte den obersten Knoten v auf dem Stapel.

Suchschritt an v :

Falls v einen unmarkierten Nachbarn besitzt, markiere ihn und lege ihn auf den Stapel, und „speichere“ die entsprechende Kante.

backtrack:

Ansonsten entferne v von dem Stapel.

Wahlfreiheit:

Welcher unmarkierte Nachbar bzw. welche Kante zu einem unmarkierten Nachbar wird ausgewählt?

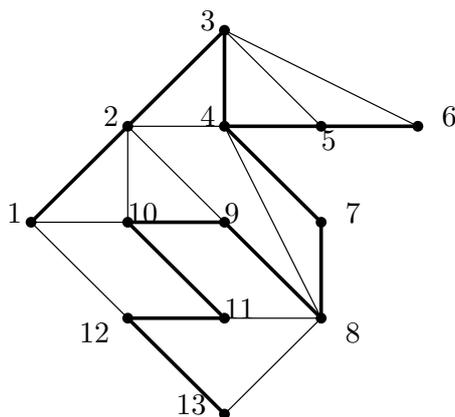


Abbildung 2.19: Ein Beispiel einer Knoten-DFS.

Knoten-BFS. Wähle einen beliebigen Knoten aus, markiere ihn und hänge ihn an eine „Warteschlange“ an. Solange die Warteschlange noch einen Knoten enthält, betrachte den vordersten Knoten v in der Warteschlange.

Suchschritt an v :

Falls v einen unmarkierten Nachbarn besitzt, markiere ihn und hänge ihn an die Warteschlange, und speichere die entsprechende Kante.

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

backtrack:

Ansonsten entferne v aus der Warteschlange.

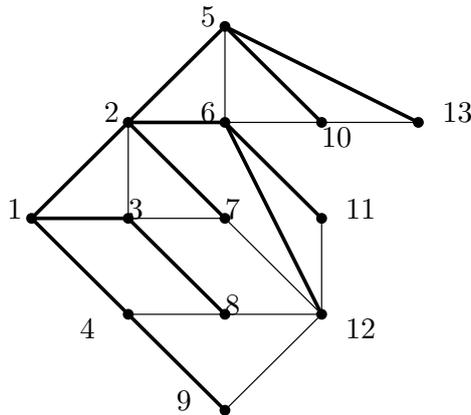


Abbildung 2.20: Ein Beispiel einer Knoten-BFS.

Wieder gibt es Wahlfreiheit in jedem Suchschritt. Üblicherweise kann diese Wahl dadurch festgelegt werden, wie der Graph „organisiert“ ist. Das kann z.B. folgendermaßen sein: Für jeden Knoten gebe es eine Liste seiner Nachbarn. Wähle den nächsten unmarkierten Knoten in der Liste. Bei planaren Graphen könnte diese Liste entsprechend der Einbettung des Graphen im „Gegenuhrzeigersinn“ zyklisch angeordnet sein. Als *nächste* Kante kann dann die Kante direkt *links* neben der vorherigen Kante angesehen werden. Dies ist gleichzeitig die *rechteste* bisher unbesuchte Kante relativ zur vorherigen Kante. Dies führt zur *RIGHT-FIRST* bzw. *LEFT-FIRST* Auswahl.

RIGHT-FIRST-Kanten-DFS. Wähle eine beliebige Kante e mit Endknoten u und v aus. Orientiere sie von $u \rightarrow v$ und lege sie auf einen Stapel. Solange der Stapel noch eine Kante enthält, betrachte die oberste Kante e auf dem Stapel.

Suchschritt an e :

Falls der „Einlaufknoten“ von e inzident ist zu einer nichtorientierten Kante, so orientiere die *rechteste* nichtorientierte Kante relativ zu e und lege sie auf den Stapel.

backtrack:

Ansonsten entferne e vom Stapel.

LEFT-FIRST-Kanten-BFS. Wähle eine beliebige Kante mit Endknoten u und v aus. Orientiere sie von $u \rightarrow v$ und hänge e an eine Warteschlange. Orientiere alle von u ausgehenden Kanten von $u \rightarrow w$, wobei w anderer Endknoten und hänge sie der Reihe nach von links nach rechts relativ zu e an die Warteschlange an (siehe Abb. 2.22). Solange die Warteschlange nicht leer ist, betrachte den Einlaufknoten v der vordersten Kante e .

2 Grundlegende Eigenschaften planarer Graphen

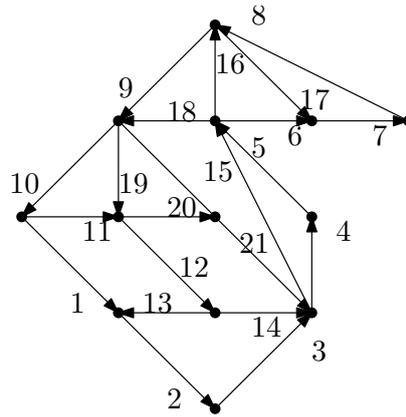


Abbildung 2.21: RIGHT-FIRST Kanten-DFS.

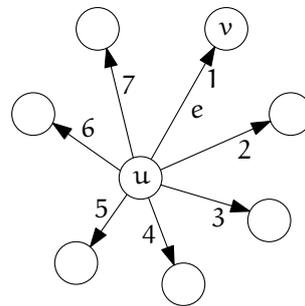


Abbildung 2.22: Reihenfolge der Kanten in der Warteschlange bezüglich Startkante e .

Suchschritt an e :

Falls dieser inzident ist zu einer nichtorientierten Kante, so orientiere die linkeste nichtorientierte Kante relativ zu e von $v \rightarrow u$, wobei u anderer Endknoten und hänge sie an die Warteschlange an.

backtrack:

Ansonsten entferne e aus der Warteschlange.