

# 1 Planare Graphen – eine anschauliche Einführung

Wir betrachten einen Graph  $G = (V, E)$  mit endlicher Menge von Knoten  $V$  endlicher Menge von Kanten  $E$ .

*Beispiel:*

$$K_4 = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$$

Der  $K_4$  ist „der“ *vollständige* (ungerichtete einfache) Graph über 4 Knoten.

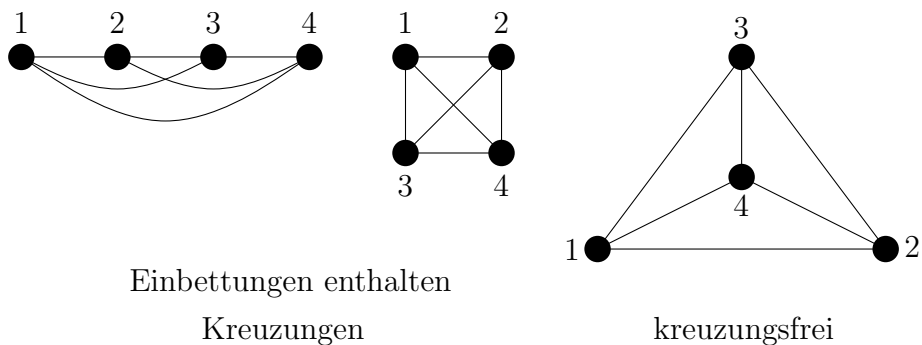


Abbildung 1.1: Verschiedene Einbettungen des  $K_4$

Ein Graph, der kreuzungsfrei (in die Ebene) eingebettet werden kann, heißt *planar*. Der  $K_4$  ist planar. Sind alle (endlichen, einfachen) Graphen planar? Wir „beweisen“, dass  $K_5$  und  $K_{3,3}$  nicht planar sind.

$$K_5 = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$E = \{\{i, j\} : 1 \leq i, j \leq 5, i \neq j\}$$

Angenommen, der  $K_5$  ist planar. Bette o.B.d.A. Knoten 1 und alle zu 1 inzidenten Kanten planar ein. Es gibt die Kante  $\{2, 4\}$ , und diese induziert eine Zerlegung der

# 1 Planare Graphen – eine anschauliche Einführung

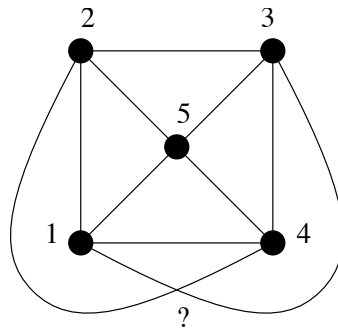


Abbildung 1.2: Einbettung des  $K_5$ . Ist die Kreuzung notwendig?

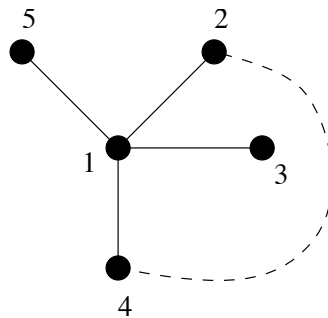


Abbildung 1.3: Zerlegung der Ebene in zwei Gebiete.

Ebene in zwei „Gebiete“, das Innere des Kreises  $\{1, 2, 3, 4\} \equiv 1241$  und dessen Äußeres.

Jeder Weg aus dem Inneren von 1241 in das Äußere von 1241 muss den „Rand“ (1241) kreuzen. Die Kante  $\{3, 5\}$  kann also nicht kreuzungsfrei gezogen werden. (Jordan'scher Kurvensatz).

Wir betrachten nun den *vollständig bipartiten* Graphen auf sechs Knoten, den  $K_{3,3}$ .

$$\begin{aligned}
 K_{3,3} &= (V, E) \\
 V &= \{1, 2, 3, w, g, s\} \\
 E &= \{\{i, j\} : 1 \leq i \leq 3, j \in \{w, g, s\}\}
 \end{aligned}$$

Der  $K_{3,3}$  modelliert das „Wasser-Gas-Strom-Problem“, d.h. es gibt drei „Quellen“  $w, g, s$  und drei „Häuser“  $1, 2, 3$ . Jedes Haus braucht Leitungen zu allen drei Quellen.

Angenommen der  $K_{3,3}$  ist planar. Bette o.B.d.A. den Kreis  $w1g2s3w$  kreuzungsfrei ein, wobei  $\{1, s\}$  im Inneren eingebettet werde. Dann muss  $\{2, w\}$  ins Äußere eingebettet werden. Unabhängig davon wie die Kante  $\{3, g\}$  eingebettet wird, kreuzt sie den Kreis  $w1s2w$ . Damit folgt Lemma 1.1:

## 1 Planare Graphen – eine anschauliche Einführung

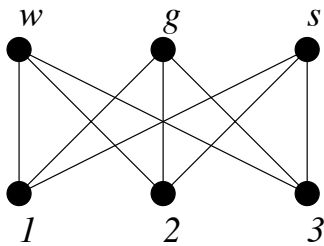


Abbildung 1.4: Eine Einbettung des  $K_{3,3}$ .

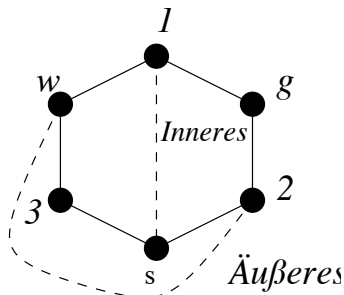


Abbildung 1.5: Inneres und Äußeres des Kreis  $w1s2w$ .

**Lemma 1.1.**  $K_5$  und  $K_{3,3}$  sind nicht planar.

Allgemeine Fragen im Zusammenhang mit planaren Graphen sind:

- Woran erkennt man planare Graphen? Kann man „effizient“ entscheiden, ob ein gegebener Graph planar ist?
- Falls man weiß, dass der gegebene Graph planar ist, kann man dann „effizient“ eine kreuzungsfreie/planare Einbettung konstruieren?
- „straight-line embedding“: Ist jeder planare Graph so planar einbettbar, dass alle Kanten gerade sind? .
- Wieviele planare Einbettungen gibt es zu einem planaren Graph?

Es ist leicht zu sehen, dass eine planare Einbettung nicht notwendig eindeutig ist, siehe [Abbildung 1.6](#).

### Das Landkartenfärbungsproblem

Färbe jedes Land so, dass benachbarte Länder verschiedene Farben bekommen. Betrachte dazu den *Nachbarschaftsgraphen* (auch Konfliktgraph genannt), bei dem jedes Land einem Knoten entspricht, und zwei Knoten durch eine Kante verbunden werden, wenn sie eine gemeinsame Grenze haben. Der Nachbarschaftsgraph „entspricht“ dem

## 1 Planare Graphen – eine anschauliche Einführung

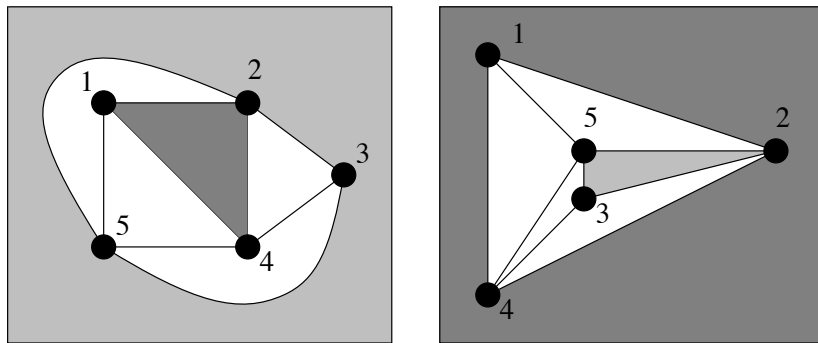


Abbildung 1.6: Das innere Gebiet von 5235 wird zum äußeren Gebiet der Einbettung gemacht.

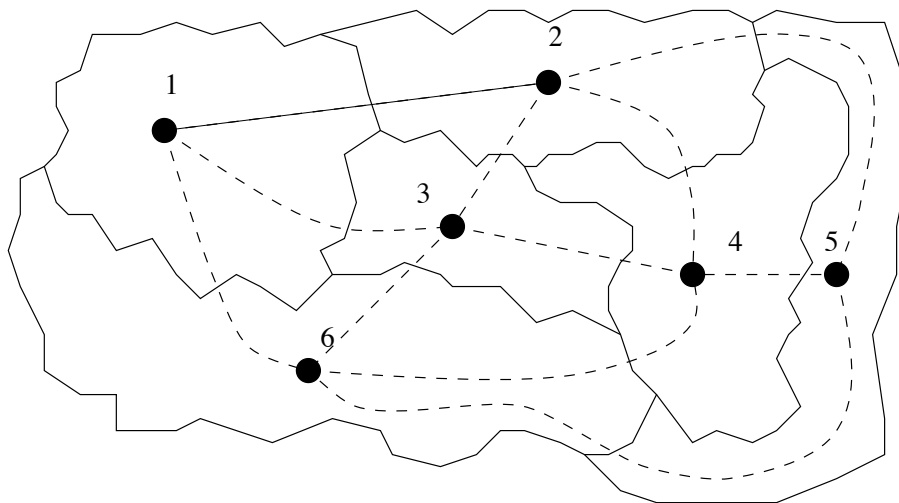


Abbildung 1.7: Landkarte mit Hauptstädten und dem Nachbarschaftsgraphen.

Konzept des *Dualgraph*, das im Zusammenhang mit planaren Graphen oft verwendet wird.

Äquivalent zum Landkartenfärbungsproblem ist dann folgendes *Graphenfärbungsproblem*: Färbe die Knoten des Nachbarschaftsgraphen so, dass zwei Knoten, die durch eine Kante verbunden sind, verschiedene Farben haben.

Der Nachbarschaftsgraph einer Landkarte ist immer planar. Um dies zu sehen betrachten wir folgende Konstruktion.

Verbinde jede Hauptstadt sternförmig mit den „Mittelpunkten“ der verschiedenen gemeinsamen Grenzabschnitte mit anderen Ländern. Füge je zwei Verbindungen zu einer Kante zusammen.

Dies könnte man auch allgemeiner für Länder auf dem Globus machen, bzw. die Oberfläche des Globus in eine Landkarte „transformieren“, indem ein beliebiges Land zum

## 1 Planare Graphen – eine anschauliche Einführung

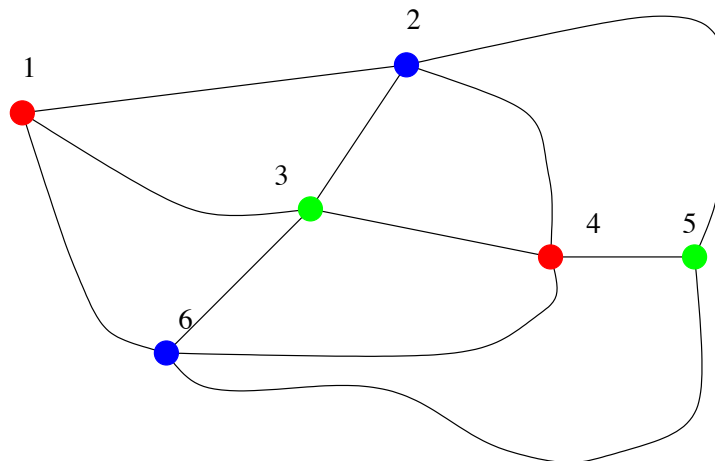


Abbildung 1.8: Färbung des Nachbarschaftsgraphen zur Landkarte aus Abbildung 1.7.

Äußeren gemacht wird. Die Größen der Länder verändern sich dabei, d.h. das Land, das dem Äußeren entspricht, wird unendlich groß. Beachte, dass uns dies zu derselben Einbettungsfrage wie vorhin führt.

Das Landkartenfärbungsproblem bzw. das Graphenfärbungsproblem lässt sich trivial lösen, indem jedes Land eine eigene Farbe erhält. Eigentlich interessiert man sich jedoch für folgende *Optimierungsversion des Färbungsproblems*: Konstruiere eine Färbung mit minimaler Anzahl an Farben. Betrachtet man dabei den Nachbarschaftsgraphen einer Landkarte, so ist dies das „klassische“ Graphenfärbungsproblem eingeschränkt auf planare Graphen. Für beliebige Graphen ist das Graphenfärbungsproblem  $\mathcal{NP}$ -schwer. (Siehe Vorlesung „Theoretische Grundlagen der Informatik“.) Es lässt sich jedoch folgender Satz, der *Vierfarbensatz* beweisen.

**Satz 1.2.** *Jeder planare Graph lässt sich mit höchstens vier Farben färben.*

Dieser Satz wurde bereits 1852 von de Morgan formuliert und 1879 von Kempe der erste falsche Beweis geliefert. Aufgrund dieses „begeisternden“ Resultats wurde Kempe zum „Fellow of the Royal Society“ gewählt. 1890 fand Heawood den Fehler in Kempes Beweis (dazu später mehr). 1977 wurde der Vierfarbensatz von Appel & Haken „endgültig bewiesen“. Dieser Beweis besteht aus einer riesigen Anzahl von Fallunterscheidungen, die durch Computereinsatz gelöst werden und ist daher bei einigen Mathematiker umstritten. 1995 wurde ein wesentlich kürzerer Beweis, der allerdings auch einen Computer benutzt, von Robertson, Sanders, Seymour & Thomas angegeben. Es ist leicht zu sehen, dass man zur Färbung des  $K_4$  auch vier Farben benötigt. Andererseits gibt es planare Graphen, die mit weniger als vier Farben gefärbt werden können. Es ist jedoch auch für planare Graphen  $\mathcal{NP}$ -vollständig, zu entscheiden, ob drei Farben ausreichen. Es ist übrigens wiederum „leicht“ (auch) für beliebige Graphen zu entscheiden, ob sie mit zwei Farben gefärbt werden können. Die zweifärbbaren Graphen sind nämlich gerade die *bipartiten* Graphen. Eine interessante Frage ist nun allgemein:

## 1 Planare Graphen – eine anschauliche Einführung

„Hilft“ Planarität bei der Lösung algorithmischer Probleme auf Graphen?  
Gibt es weitere Optimierungsprobleme, die für beliebige Graphen  $\mathcal{NP}$ -schwer sind, für planare Graphen aber in  $\mathcal{P}$  sind?

Erstaunlicherweise scheint es nicht viele solche Probleme zu geben. Ein weiteres Beispiel eines  $\mathcal{NP}$ -schweren Problems, das für planare Graphen in  $\mathcal{P}$  ist, ist das „MAX-CUT-Problem“. Wir werden dieses Problem hier behandeln. Allgemein scheint die Eigenschaft der Planarität bei „Schnittproblemen“ oder „Zerlegungsproblemen“ in Graphen vorteilhaft zu sein. Betrachte etwa folgendes „Zerlegungsproblem“:

Gegeben sei ein Graph  $G = (V, E)$ . Finde eine Kantenmenge  $S$  minimaler oder zumindest kleiner Größe, so dass  $G$  durch Entfernen von  $S$  in disjunkte Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  „zerfällt“ mit

$$|V_i| \leq \alpha \cdot |V| \quad \text{für } i = 1, 2; 0 < \alpha < 1.$$

Diese Fragestellung werden wir später wieder aufgreifen, wenn wir das „PLANAR-SEPARATOR-THEOREM“ beweisen. Wie kann Planarität bei solchen Schnittproblemen helfen? Es gibt eine schöne Korrespondenz zwischen Kreisen und Schnitten in planaren Graphen:

- *Schnitte* in  $G$  korrespondieren zu *Kreisen* im „Dualgraph“ von  $G$ .
- Die *Größen von Schnitten* in  $G$  korrespondieren zu *Längen von Wegen* im „Dualgraph“ von  $G$ .

Allgemein kann also die Korrespondenz zwischen „Konfigurationen“ im planaren Graph  $G$  und entsprechenden „Konfigurationen“ in seinem Dualgraph bei der Lösung algorithmischer Probleme helfen. Ein weiterer Vorteil planarer Graphen besteht darin, dass man bei gewissen algorithmischen Vorgehensweise wie Tiefen- und Breitensuche eine planare Einbettung des Graphen ausnutzen kann. Dies scheint vor allem bei Wegeproblemen, Steinerbaumpackungsproblemen und dem Menger-Problem eine erfolgreiche Strategie zu sein, wie wir später sehen werden.

- Man kann bezüglich einer beliebigen aber festen Einbettung „Inneres“, „Äußeres“, „rechts von“, „links von“ ... zur Konstruktion und Argumentation verwenden.

Weitere Vorteile planarer Graphen sind:

- Wegen ihrer „guten Zerlegbarkeit“ lässt sich sehr gut das „Divide-and-Conquer“-Prinzip anwenden.
- Es gibt Aussagen über
  - die Knotengrade im planaren Graphen,
  - die maximale Kantenzahl,

# 1 Planare Graphen – eine anschauliche Einführung

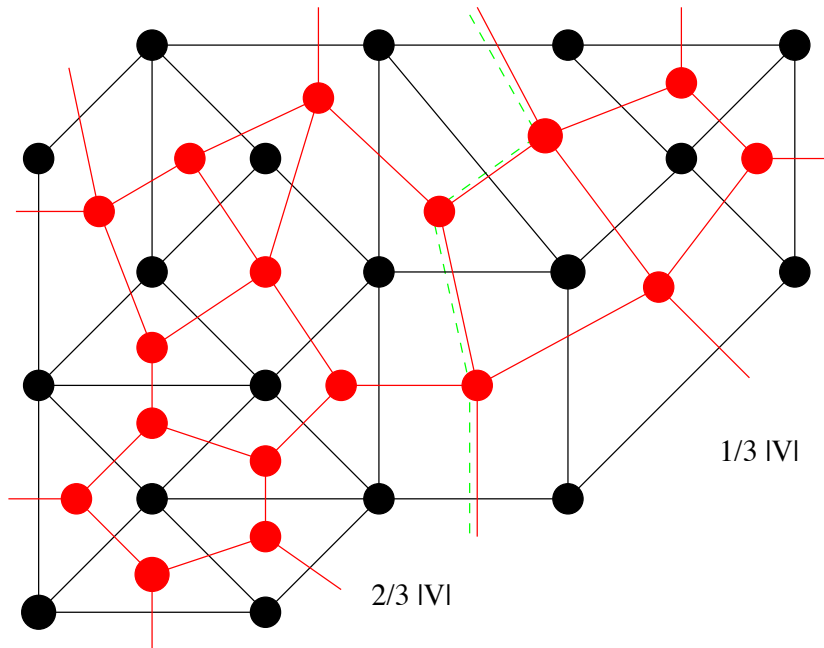


Abbildung 1.9: Eine  $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}$ -Zerlegung durch Wegnahme von 4 Kanten und der entsprechende Weg der Länge 4 im Dualgraph.

- den maximalen Zusammenhang,
  - ... ,
- die „direkt“ aus der Planarität folgen.