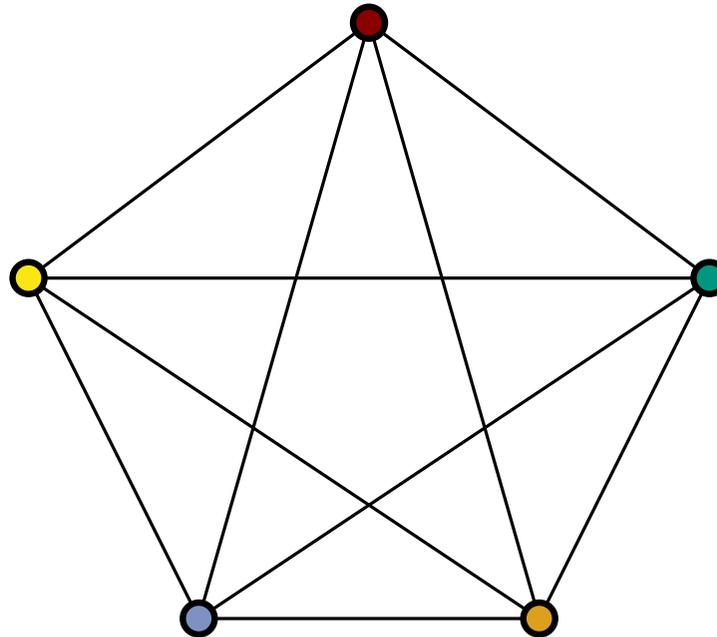


# Graphen-Färben

## Vorlesung am 7. Mai 2019

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



Gesehen:

- Planare Graphen sind 5-färbbar.

Jetzt:

- Planare Graphen sind 5-listen-färbbar.

Instanz von Listenfärbung:

- Graph  $G = (V, E)$
- Liste  $S_v$  von Farben für jedes  $v \in V$

Lässt sich jedem Knoten  $v$  eine Farbe aus  $S_v$  zuordnen, sodass  $G$  korrekt gefärbt ist?

Ein Graph ist *k-listen-färbbar*, wenn das obige Probleme für jede Familie  $(S_v)_{v \in V}$  mit  $|S_v| = k$  für all  $v \in V$  lösbar ist.

## Satz

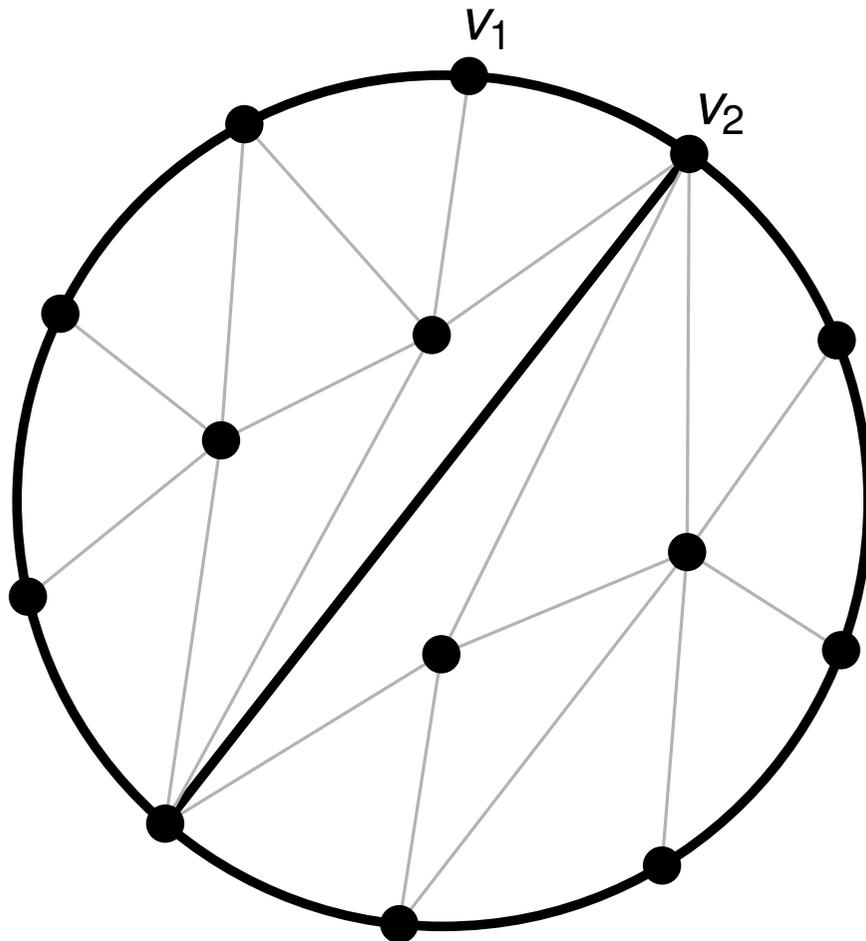
Jeder planare Graph ist 5-listen-färbbar.

*Beweis:* Beweise Induktionsinvariante für alle Graphen mit mindestens drei Knoten.

- $G$  planarer Graph
- innere Facetten Dreiecke
- Äußere Facette durch Kreis  $C = v_1 \cdots v_k v_1$  begrenzt
- $v_1$  mit Farbe 1 gefärbt
- $v_2$  mit Farbe 2 gefärbt
- Jeder Knoten auf  $C$  ist mit Liste assoziiert, die mindestens drei Farben enthält.
- Knoten aus  $G - C$  haben mindestens fünf mögliche Farben.

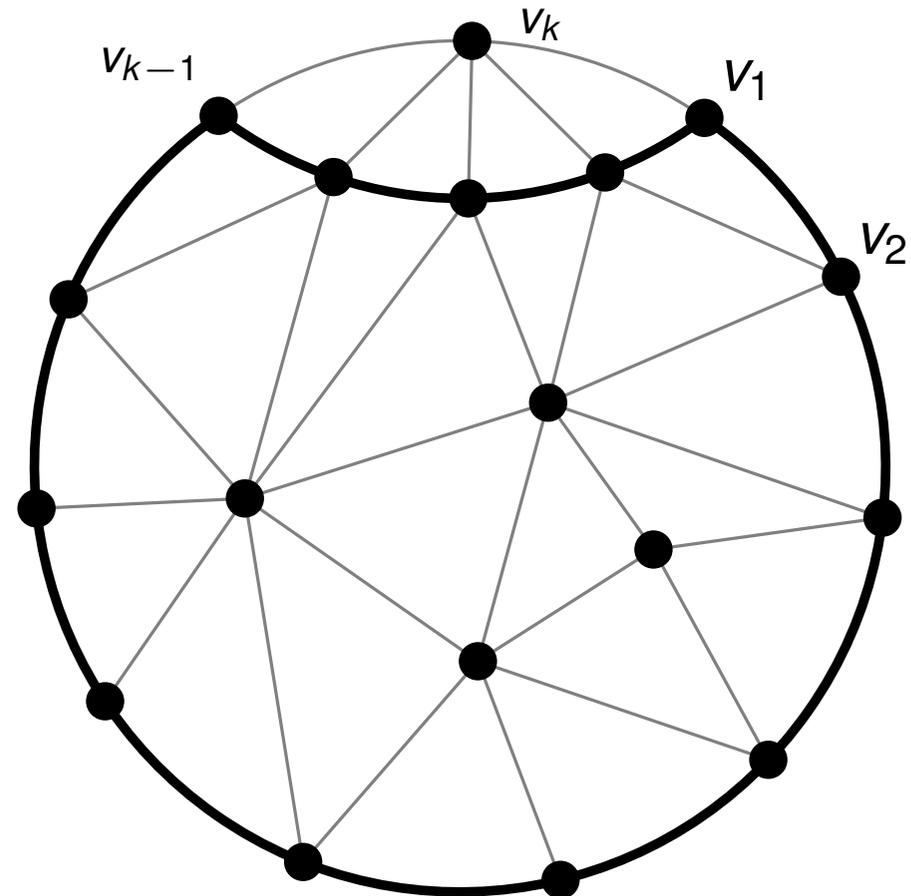
Dann lässt sich die Färbung von  $v_1$  und  $v_2$  zu einer Färbung von  $G$  aus den gegebenen Listen erweitern.

Es gibt eine Sehne:



- Färbe erst den Teil der  $v_1 v_2$  enthält.
- Färbe dann den anderen Teil, gib dabei Farben der Sehnenknoten vor.

Es gibt keine Sehne:

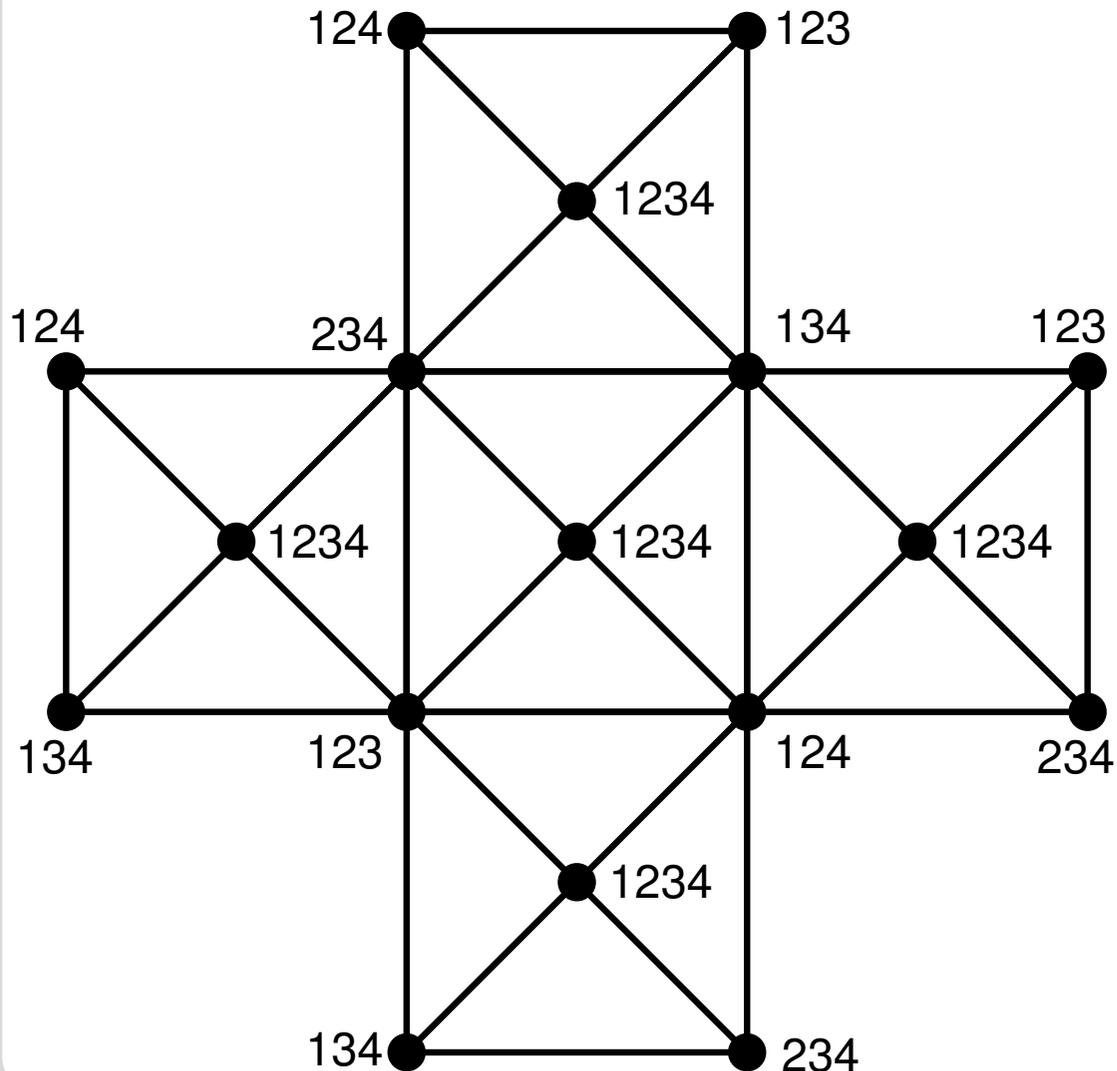


- Reserviere zwei Farben von  $v_k$  aus den Listen seiner Inneren Nachbarn.
- Färbe Rest induktiv,  $v_{k-1}$  kann nicht beide reservierten Farben verbrauchen.



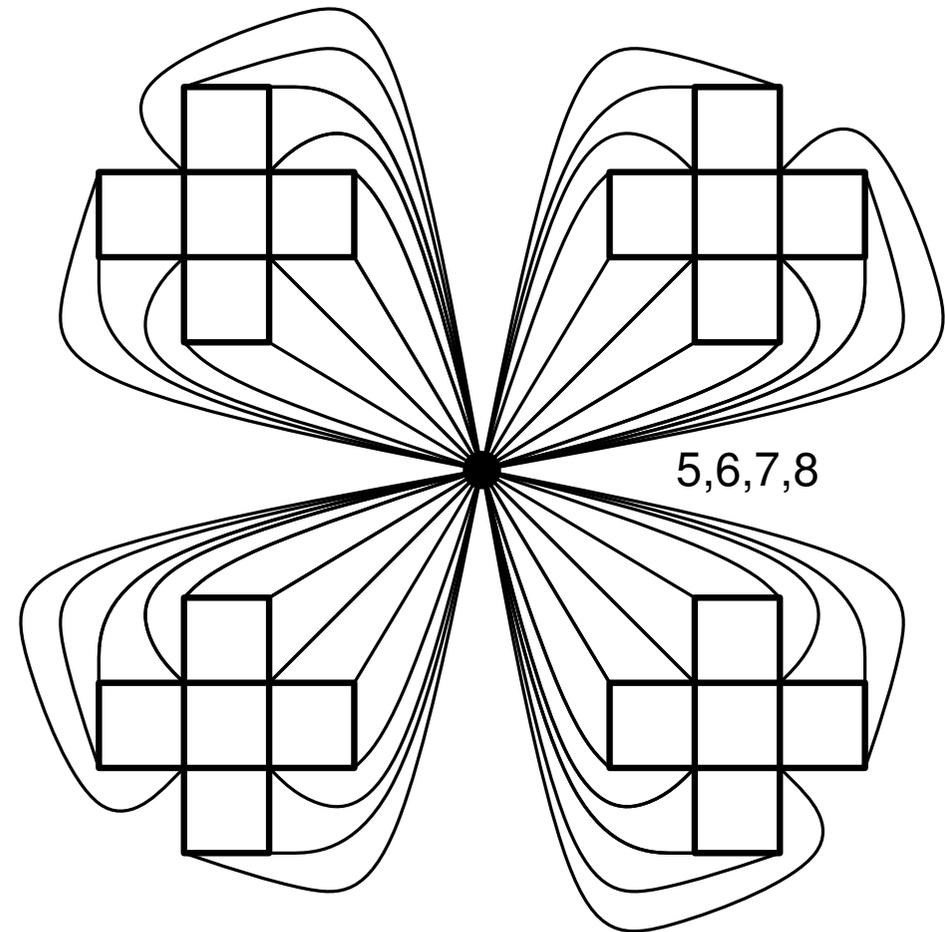
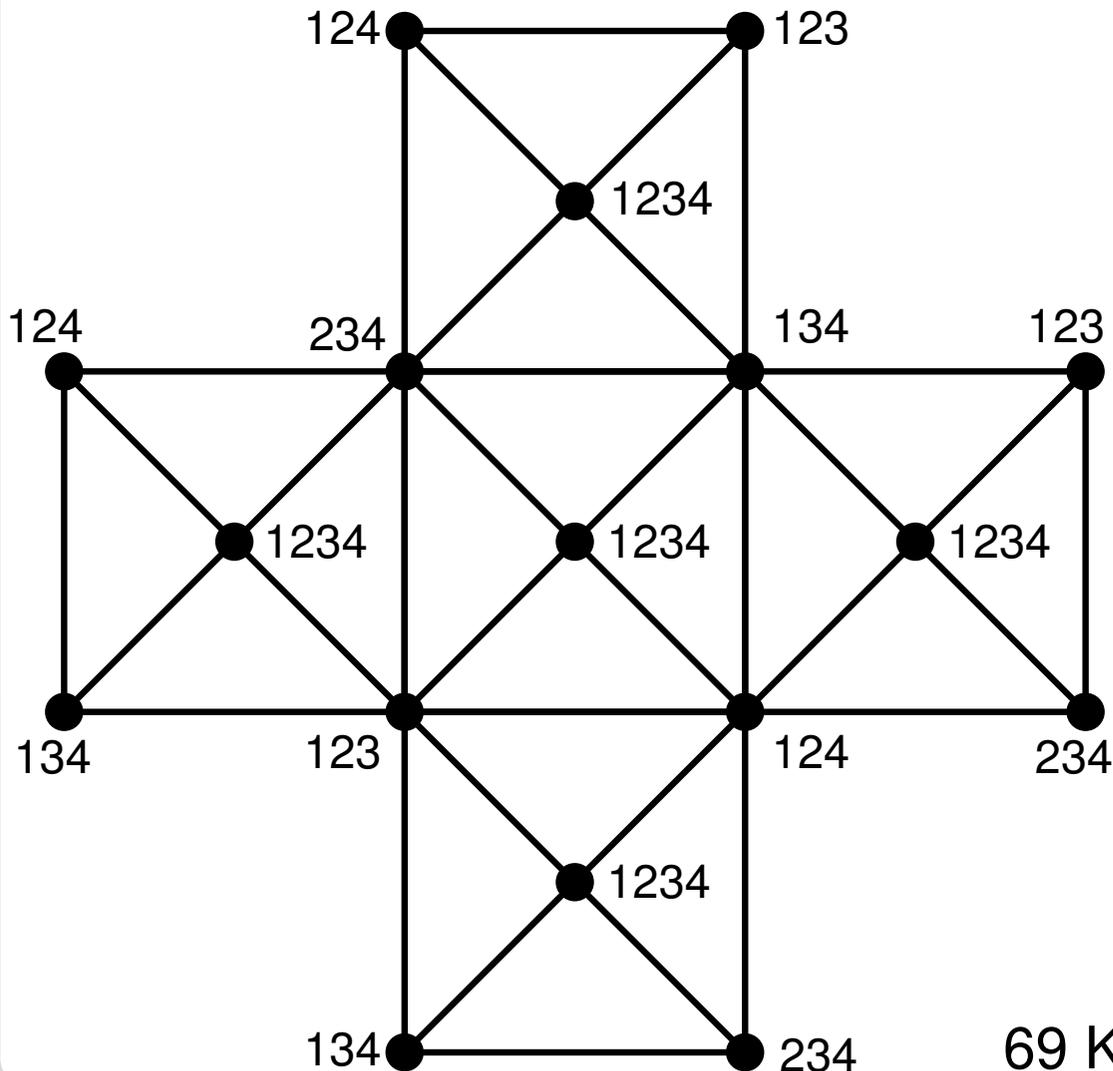
## Satz

Es gibt planare Graphen, die nicht 4-listen-färbbar sind.



# Satz

Es gibt planare Graphen, die nicht 4-listen-färbbar sind.



69 Knoten, lässt sich verbessern zu 63