Algorithmische Graphentheorie
Sommersemester 2019
Sascha Gritzbach, Torsten Ueckerdt

Karlsruher Institut für Technologie

Übungsblatt 6

Besprechung in der Übung am 16. Juli 2019

Aufgabe 1: Berechnung der Höhenfunktion ⋆

Sei $G = (V, F)$ ein gerichteter, azyklischer Graph. Die Höhenfunktion h ist definiert als $h(v) = 0$, falls v eine Senke ist, und $h(v) = 1 + \max\{h(w) \mid vw \in F\}$ andernfalls. Geben Sie einen Algorithmus an, der $h(v)$ für alle Knoten v in linearer Zeit berechnet.

Aufgabe 2: Farbklassen in Kompositionsgraphen ⋆⋆

Seien $G_0, G_1, \dots, G_n$ Graphen, sodass G_0 gerade n Knoten $v_1, \dots, v_n$ hat. Der *Kompositionsgraph* $G = G_0[G_1, \dots, G_n]$ ist definiert als die Vereinigung der Graphen $G_1, \dots, G_n$, wobei ein Knoten aus G_i genau dann zu einem Knoten aus G_j adjazent ist, wenn v_i und v_j in G_0 adjazent sind. Der Graph G_0 heißt *äußerer Faktor*; die Graphen $G_1, \dots, G_n$ sind *innere Faktoren*.

Sei $G = G_0[G_1, \dots, G_n]$ ein Kompositionsgraph und sei $\hat{A}$ eine Farbklasse von G. Zeigen Sie, dass $\hat{A}$ entweder vollständig innerhalb eines inneren Faktors $G_1, \dots, G_n$ liegt oder ausschließlich äußere Kanten enthält (also Kanten, die Knoten aus unterschiedlichen inneren Faktoren verbinden).

Aufgabe 3: Module ⋆⋆⋆

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Knotenmenge $V' \subseteq V$ heißt *Modul*, wenn jeder Knoten $x \in V - V'$ entweder zu allen oder zu keinem Knoten aus V' benachbart ist. Ein Modul V' ist *trivial*, wenn $V' = V$ oder $V' = \emptyset$.

Für eine Farbklasse $\hat{A}$ von G sei $V(\hat{A})$ die Menge der Knoten, die zu einer Kante aus $\hat{A}$ inzident sind. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Innere Faktoren eines Kompositionsgraphen sind Module.

(b) Für eine Farbklasse $\hat{A}$ ist $V(\hat{A})$ ein Modul.

(c) G hat maximal eine Farbklasse $\hat{A}$, für die $V(\hat{A}) = V$ gilt.

(d) Ist G ein Vergleichbarkeitsgraph, so hat G genau dann eine eindeutige transitive Orientierung (bis auf Invertierung), wenn jeder nicht-triviale Modul eine unabhängige Menge induziert.

Aufgabe 4: Viele Graphklassen ⋆⋆

Ein Graph kann chordal, co-chordal sowie ein Vergleichbarkeitsgraph oder ein co-Vergleichbarkeitsgraph sein. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaften unabhängig voneinander sind, indem Sie für jede der 16 möglichen Kombinationen einen Beispielgraphen angeben.

Aufgabe 5: Maximalität in Split-Graphen ⋆

Geben Sie einen Split-Graph $G = (V, E)$ mit einer Zerlegung $V = S + K$ in eine unabhängige Menge S und eine vollständige Menge K an, sodass S keine maximale unabhängige Menge ist. Geben Sie ein weiteres Beispiel an, bei dem K kein maximale Clique induziert.

Aufgabe 6: Graphische Gradsequenzen ⋆

Geben Sie effiziente Algorithmen zur Erkennung von graphischen Gradsequenzen, basierend auf den beiden Charakterisierungen aus der Vorlesung, an. Geben Sie darauf aufbauend einen Algorithmus zur Erkennung von Split-Graphen an.

Aufgabe 7: Gradsequenzen und Bäume ⋆⋆

Geben Sie einen Algorithmus an, der für eine gegebene Gradsequenz entscheidet, ob es einen Baum mit dieser Gradsequenz gibt. Falls ja, geben Sie einen Baum mit der gegebenen Gradsequenz an.