**Algorithmische Graphentheorie**
**Sommersemester 2019**
Sascha Gritzbach, Torsten Ueckerdt

# Übungsblatt 5

Besprechung in der Übung am 02. Juli 2019

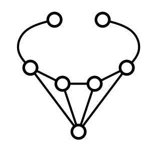
## Aufgabe 1: Implikationsklassen und ihre Komplemente ⋆

Zeigen Sie die folgenden Äquivalenzen.

$$ab\ \Gamma\ a'b' \Leftrightarrow ba\ \Gamma\ b'a'$$
$$ab\ \Gamma^*\ a'b' \Leftrightarrow ba\ \Gamma^*\ b'a'$$

## Aufgabe 2: Transitive Orientierbarkeit des Bullenkopfes ⋆

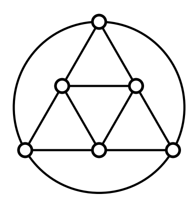
Zeigen Sie, dass der „Bullenkopf“ nicht transitiv orientierbar ist. Zeigen Sie dazu, dass es eine Implikationsklasse $A$ gibt, mit $A = A^{-1}$.

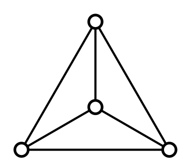


## Aufgabe 3: Berechnung einer transitiven Orientierung ⋆

Führen Sie den Algorithmus zur Berechnung einer transitiven Orientierung an den beiden nebenstehenden Graphen aus.

Geben Sie zusätzlich für jeden Schritt alle Implikationsklassen an und beobachten Sie, wie sich diese verändern, wenn die Kanten einer Farbklasse entfernt werden.





## Aufgabe 4: Laufzeit der transitiven Orientierung ⋆⋆

Zeigen Sie, dass der Algorithmus zur Berechnung einer transitiven Orientierung in $O(\Delta\cdot|E|)$ Zeit und mit $O(|V|+|E|)$ Speicherplatz implementiert werden kann. Dabei ist $\Delta$ der maximale Knotengrad.

## Aufgabe 5: Permutationen und $G$-Zerlegungen ⋆⋆⋆

Sei $G$ ein Vergleichbarkeitsgraph und $[B_1, \ldots, B_k]$ eine $G$-Zerlegung. Ein Tupel $(e_1, \ldots, e_k)$ von Kanten heißt *Dekompositionsschema* (oder kurz: *Schema*) von $G$, wenn eine $G$-Zerlegung $[B_1, \ldots, B_k]$ existiert, sodass $e_i \in B_i$ für alle $i \in [k]$. *Anmerkung:* Ein Schema steht für die Reihenfolge der Kanten, wie sie im Algorithmus zur Erkennung von Vergleichbarkeitsgraphen gewählt werden.

Seien $G$ ein Vergleichbarkeitsgraph und $(e_1, \ldots, e_k)$ ein Schema von $G$. Zeigen Sie, dass für jedes $i \in [k-1]$ auch $(e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, e_i, e_{i+2}, \ldots, e_k)$ ein Schema von $G$ ist.

*Anmerkung:* Mit dieser Aussage kann man folgern, dass jede Permutation eines Schemas wieder ein Schema ist.

## Aufgabe 6: Länge von $G$-Zerlegungen ⋆⋆⋆

Sei $G$ ein Graph. Zeigen Sie, dass jede $G$-Zerlegung die gleiche Länge hat. Zeigen und verwenden Sie dazu das folgende Austauschargument:

Es seien $(e_1, \ldots, e_k)$ und $(f_1, \ldots, f_l)$ zwei Schemata von $G$. Dann existiert $j \in [l]$, sodass $(f_1, \ldots, f_{j-1}, e_1, f_{j+1}, \ldots, f_l)$ ein Schema von $G$ ist.

## Aufgabe 7: Knotenordnungen über Knotenordnungen ⋆

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Zeigen Sie folgende Aussagen.

1. Eine Knotenordnung $\sigma$ ist genau dann ein perfektes Eliminationsschema von $G$, wenn aus $a <_\sigma b <_\sigma c$ mit $ab, ac \in E$ folgt, dass $bc \in E$.
2. $G$ ist genau dann ein Vergleichbarkeitsgraph, wenn es eine Knotenordnung $\sigma$ gibt, für die gilt, dass aus $a <_\sigma b <_\sigma c$ mit $ab, bc \in E$ folgt, dass $ac \in E$.