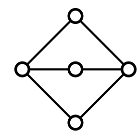
Algorithmische Graphentheorie
Sommersemester 2019
Sascha Gritzbach, Torsten Ueckerdt

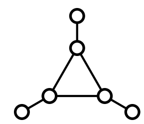
Übungsblatt 1

Besprechung in der Übung am 07. Mai 2019

Aufgabe 1: Kreissehnen, Kreisbögen und Intervalle ⋆

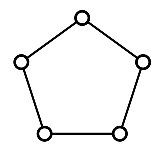
Welche der beiden rechts abgebildeten Graphen sind Kreissehnengraphen, Kreisbogengraphen bzw. Intervallgraphen?

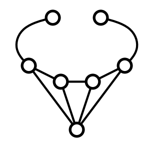




Aufgabe 2: Transitive Orientierbarkeit ⋆

Warum sind der C_5 und der „Bullenkopf“ nicht transitiv orientierbar?





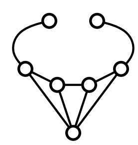
Aufgabe 3: Alle Graphen sind Schnittgraphen ⋆

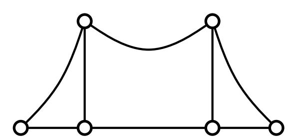
Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger ungerichteter Graph. Zeigen Sie, dass es eine Familie $\mathcal{F}$ von Teilmengen von E gibt, sodass G der Schnittgraph von $\mathcal{F}$ ist.

Aufgabe 4: Intervallgraph oder nicht? ⋆

Ist der „Bullenkopf“ ein Intervallgraph?

Ist das Komplement der „Hängebrücke“ ein Intervallgraph?





Aufgabe 5: Knotenüberdeckung und unabhängige Mengen ⋆

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine Knotenmenge $A \subseteq V$ ist eine *Knotenüberdeckung* von G, wenn für jede Kante $xy \in E$ gilt, dass $x \in A$ oder $y \in A$. Zeigen Sie, dass A genau dann eine minimale Knotenüberdeckung ist, wenn $V - A$ eine maximale unabhängige Menge ist.

Aufgabe 6: Wer ist der Dieb? ⋆⋆⋆

Sechs Doktoranden waren an dem Tag in ihrem Büro, an dem die Kaffeevorräte gestohlen wurden. Jeder von ihnen kam zu einem bestimmten Zeitpunkt, war für einen gewissen Zeitraum da und ging dann wieder. Wenn zwei der Doktoranden gleichzeitig anwesend waren, so hat zumindest einer der beiden den anderen gesehen.

Eine Befragung der Doktoranden durch die Professorin ergab folgendes: *Franzi* behauptet *Marcel* und *Guido* gesehen zu haben; *Marcel* hat *Franzi* und *Lars* gesehen; *Sascha* will *Tim* und *Lars* gesehen haben; *Tim* hat *Franzi* und *Lars* gesehen; *Guido* versichert *Marcel* und *Sascha* gesehen zu haben; *Lars* hat *Sascha* und *Guido* gesehen.

Um den Verdacht heimtückisch auf andere zu lenken, nennt der gerissene Schurke auch arglose Kollegen, die er gar nicht gesehen hat. Wer ist der Schurke?

Aufgabe 7: Der Färbungsalgorithmus des Dr. Meta ⋆⋆⋆

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ lässt sich dadurch in der Ebene zeichnen, dass jeder Knoten durch einen Punkt repräsentiert wird und jede Kante durch ein Geradensegment zwischen ihren beiden Endpunkten. G heißt planar, wenn es eine solche Zeichnung gibt, in der sich keine Kanten kreuzen.

Um die Weltherrschaft an sich zu reißen, möchte Dr. Meta alle Länder der Welt mit Spionen infiltrieren. Ein Spion kann mehrere Länder infiltrieren, darf aber nicht für benachbarte Länder zuständig sein, weil die Geheimdienste je zwei benachbarter Länder in der Spionageabwehr zusammenarbeiten.

Auf seiner Weltkarte zeichnet Dr. Meta in jedes Land einen Knoten und verbindet je zwei Knoten mit einer Kante, falls die dazugehörigen Länder eine gemeinsame Grenze haben. Glücklicherweise ist in Dr. Metas Welt ein jedes Land nicht auf mehrere nicht-angrenzende Gebiete verteilt. Damit erhält er einen planaren Graphen. Eine Färbung des Graphen entspricht dann einer Zuordnung von Spionen zu Ländern, wobei jede Farbe für einen Spion steht.

Um nicht zu viele Spione bezahlen zu müssen, hat es sich Dr. Meta zur Aufgabe gemacht, einen Polynomialzeitalgorithmus zu finden, der planare Graphen mit konstant vielen Farben färbt. Er weiß, dass jeder Teilgraph eines planaren Graphen selbst wieder planar ist und dass jeder planare Graph einen Knoten mit höchstens fünf Nachbarn enthält.

Nach vielen erfolglosen Versuchen und ebenso vielen Tassen Kaffee hat er folgende Idee: Gegeben einen planaren Graph $G = (V, E)$ sei $v \in V$ ein Knoten mit höchstens fünf Nachbarn. Wähle eine beliebige Farbe für v. Jeder Nachbar u von v merkt sich die Farbe von v, damit u und v nicht in der selben Farbe gefärbt werden. Betrachte nun $G - \{v\}$, also den von $V \setminus \{v\}$ induzierten Teilgraphen von G. $G - \{v\}$ ist wieder planar, also gibt es wiederum ein Knoten mit höchstens fünf Nachbarn, genannt w. Wähle für w eine Farbe, die anders ist als alle, die für w verboten wurden. Führe diese Prozedur fort, bis der Graph keine Knoten mehr enthält.

Dr. Meta glaubt irrtümlich, damit seine Aufgabe gelöst zu haben. Warum funktioniert sein Lösungsansatz nicht? Wie geht es richtig?