Sechstes Übungsblatt

Ausgabe: 21. Juni 2018
Besprechung: 5. Juli 2018

1 Right-First Tiefensuche und Left-First Breitensuche

Sei G ein ungerichteter, zusammenhängender, planar eingebetteter Graph, G^* der zugehörige Dualgraph und $e = (u, v)$ eine orientierte Kante.

Algorithmus 1: Right-First-Kanten-DFS

```
Füge Kante (t, u), t ∉ V im Gegenuhrzeigersinn vor e an u ein
Betrachte e als nicht orientiert
Lege (t, u) auf einen Stapel
Solange Stapel nicht leer wiederhole
    Betrachte oberste Kante (x, y)
    Falls y inzident zu nichtorientierter Kante
        Orientiere im Gegenuhrzeigersinn bzgl. y nächste nichtorientierte Kante y → w und lege diese auf den Stapel
    sonst
        Entferne (x, y) vom Stapel
```

Algorithmus 2: Left-First-Kanten-BFS

```
Orientiere alle zu u inzidenten Kanten u → w und hänge diese, beginnend bei e, im Uhrzeigersinn bzgl. u an eine Warteschlange
Solange Warteschlange nicht leer wiederhole
    Betrachte erste Kante (x, y)
    Falls y inzident zu nichtorientierter Kante
        Orientiere alle solche Kanten y → w und hänge diese im Uhrzeigersinn bzgl. y an die Warteschlange
    sonst
        Entferne (x, y) aus der Warteschlange
```

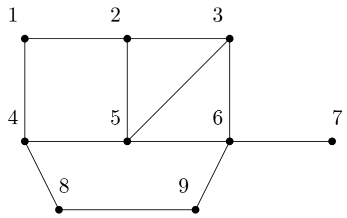
Hinweis: Die hinzugefügte Kante (t, u) von einem neuen Knoten t sorgt dafür dass die Right-First-Kanten-DFS den gesamten Graphen traversiert, falls e eine Brücke ist, die Suche also bei u fortgesetzt wird. Insbesondere wird e als erste Kante in der gegebenen Orientierung (u, v) gefunden.

In diesen beiden Kantensuchen wird jeweils eine Reihenfolge $R = (e_1, \ldots, e_m)$ der Kanten festgelegt. Die zu e „rechte“ Facette sei f_1, und die Dualkante $e^* = (f_1, f_2)$ zu e sei orientiert ausgehend von f_1.

Wir betrachten eine Right-First-Tiefensuche in G, beginnend bei Kante e, mit Kantenfolge $R = (e = e_1, \ldots, e_m)$ und eine Left-First-Breitensuche in G^*, beginnend bei Kante e^*, mit Kantenfolge $R^* = (e^* = e_1^*, \ldots, e_m^*)$. Die Reihenfolgen R und R^* heißen dual, falls e_i Dualkante zu e_i^* für alle $1 \leq i \leq m$.

(a) Bestimmen Sie für den zweidimensionalen Würfel Q_2 sowie untenstehenden Graphen die Reihenfolgen R und R^* bei beliebiger Startkante e.

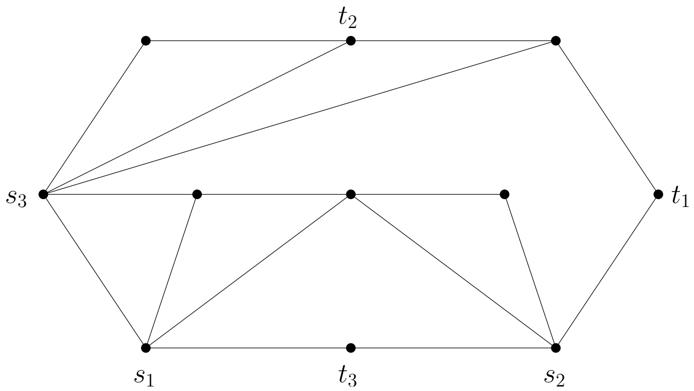
Hinweis: Die Reihenfolgen sind dual.



(b) Geben Sie einen Graphen an, für den R und R^* nicht dual sind.

Hinweis: Betrachten Sie Graphen mit Brücken und Kreisen.

2 Kantendisjunkte Wegpackung



Betrachten Sie obenstehenden Graphen mit der angegebenen Menge an Terminalpaaren, und überprüfen Sie die *Geradheitsbedingung*. Ist das induzierte *kantendisjunkte* Wegpackungsproblem lösbar?

3 Knotendisjunkte Wegpackung

Definition (knotendisjunktes Wegpackungsproblem): Gegeben ein zusammenhängender, planarer Graph G mit fester Einbettung und paarweise verschiedenen Terminalen $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots, s_k, t_k$ an der äußeren Facette. Gesucht sind paarweise knotendisjunkte s_i-t_i-Wege in G $(1 \leq i \leq k)$.
Das Problem heißt *topologisch lösbar*, falls die Reihenfolge der Terminale „um die äußere Facette herum“ die Lösbarkeit nicht ausschließt.

(a) Geben Sie für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ einen zusammenhängenden, planaren Graphen G mit k Terminalpaaren (s_i, t_i) an der äußeren Facette an, sodass das knotendisjunkte Wegpackungsproblem

- nicht topologisch lösbar ist
- zwar topologisch lösbar ist, aber dennoch keine paarweise knotendisjunkten s_i-t_i-Wege in G existieren.

(b) Sei o die Anzahl der Knoten von G, die zur äußeren Facette der Einbettung inzident sind (es gilt also $o \geq 2k$). Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $\mathcal{O}(o)$ feststellt, ob das knotendisjunkte Wegpackungsproblem topologisch lösbar ist.

(c) Angenommen, das Problem sei topologisch lösbar. Geben Sie einen Linearzeitalgorithmus an, der entweder k knotendisjunkte s_i-t_i-Wege findet oder feststellt, dass das Problem nicht lösbar ist.

(d) Zeigen Sie: Für einen planaren Graphen G mit Terminalpaaren an der äußeren Facette ist das knotendisjunkte Wegpackungsproblem genau dann *nicht lösbar*, wenn es nicht topologisch lösbar ist oder eine einfache geschlossene Kurve K in der Ebene existiert, die G nur in Knoten berührt, sodass die Anzahl der Terminalpaare mit genau einem Terminal innerhalb K größer als die Anzahl der ‚Berührknoten' ist.

4 Bonus: Eindeutigkeit des Fußballs

Ein Fußball[1] mit Wabenstruktur hat eine Oberfläche die ausschließlich aus regulären Fünf- und Sechsecken besteht. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Fünfecke auf jedem Fußball mit Wabenstruktur 12 ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass ein Fußball in etwa die Form einer Kugel hat.

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Fußball_(Sportgerät)