Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
Sommersemester 2018
Dorothea Wagner, Michael Hamann, Lars Gottesbüren

Viertes Übungsblatt

Ausgabe:	30. Mai 2018
Besprechung:	12. Juni 2018

1 Schnitte, Kreise und Bäume im Dualgraph

Zeigen Sie:

1. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star$. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^\star, (E \setminus E')^\star)$ von $G^\star$ unzusammenhängend ist.
2. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star = (V^\star, E^\star)$, und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^\star, (E \setminus E')^\star)$ ein aufspannender Baum von $G^\star$ ist.

2 Perfektes Matching

Ein Matching M zu einem Graphen G heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist. Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

1. P_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Weg mit n Knoten)
2. C_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit n Knoten). Definiere ausnahmsweise C_2 als K_2.
3. Q_n
4. K_n
5. $K_{n,m}$

3 Adjazenztest in planaren Graphen

Sei G ein planarer Graph mit n Knoten. Geben Sie eine Datenstruktur mit linearer Größe an, mit deren Hilfe nach linearer Vorberechnung Adjazenzen von Knoten in konstanter Zeit abgefragt werden können. Das heißt, gegeben zwei Knoten u und v von G, kann die Frage ob die Kante $\{u, v\}$ in G ist, in konstanter Zeit beantwortet werden.

Hinweis: Richten Sie die Kanten so, dass jeder Knoten höchstens fünf ausgehende Kanten hat.

4 Dreiecke Zählen in planaren Graphen

Sei G ein einfacher, planarer Graph. Geben Sie einen Algorithmus an, der für jeden Knoten v die Anzahl (graphentheoretischer) Dreiecke berechnet, in denen v vorkommt. Formal ist die Menge der Dreiecke von v durch die Menge an verbundenen Paaren von Nachbarknoten $\{\{x, y\} \in E | \{v, x\}, \{v, y\} \in E\}$ definiert. Die Einbettung spielt dabei keine Rolle. Die Laufzeit des Algorithmus über alle Knoten soll linear in der Größe des Graphen sein.

5 Minimale Spannbäume in planaren Graphen

Sei G ein einfacher, zusammenhängender planarer Graph mit positiven Kantengewichten. Geben Sie einen Algorithmus an, der in erwartet linearer Laufzeit einen Spannbaum minimalen Gewichts berechnet.

Hinweis: Sie dürfen die folgenden beiden Aussagen ohne Beweis verwenden:

- Sei v ein Knoten und e eine Kante minimalen Gewichts inzident zu v. Dann gibt es einen Spannbaum minimalen Gewichts von G, der e enthält.
- Sei e eine Kante, die einem Spannbaum minimalen Gewichts von G vorkommt. Sei T ein Spannbaum minimalen Gewichts auf dem Graphen, den man durch die Kontraktion von e erhält. Dann ist $T \cup \{e\}$ ein Spannbaum minimalen Gewichts auf G.