Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
Sommersemester 2018
Dorothea Wagner, Michael Hamann, Lars Gottesbüren

Drittes Übungsblatt

Ausgabe:	16. Mai 2018
Besprechung:	29. Mai 2018

Erweiterte Inzidenzlisten

Sei ein einfacher, zusammenhängender, planarer Graph $G = (V, E)$ mit n Knoten gegeben. Der Graph G sei kombinatorisch eingebettet, d.h. dargestellt als $\mathcal{G} = (V, \vec{E}, s, t, \Theta, ^{-})$, wobei $\mathcal{G}$ in der Form ,,erweiterter Inzidenzlisten" gespeichert sei:
Es gibt eine doppelt verkettete Liste von Zeigern auf die *Knoten*. Ein *Knoten* ist dargestellt als eine zirkulär verkettete Liste von *gerichteten Kanten*, die im Gegenuhrzeigersinn geordnet sind. Die Nachfolgekante („links") von e ist $\Theta(e)$. Eine *gerichtete Kante* $e \in \vec{E}$ besteht aus einem Zeiger auf die Kante $\bar{e}$ (e in entgegengesetzter Richtung) und einem Zeiger auf den Fußknoten der Kante. Dadurch sind die Funktionen s(ource), t(arget), $^{-}$, Θ und $\Theta^*(e) := \Theta(\bar{e})$ repräsentiert. Alle Funktionen können so in konstanter Zeit berechnet werden.

1 Triangulierung

1. Geben Sie einen *linearen* (in der Anzahl der Knoten n) Algorithmus an, der eine Triangulierung $G' = (V, E')$ von G mit kombinatorischer Einbettung $\mathcal{G}'$ findet.
   Hinweis: Die Triangulierung muss einfach sein, darf also insbesondere keine Mehrfachkanten enthalten.
2. Führen Sie Ihren Algorithmus an folgenden Beispielgraphen aus und numerieren Sie jeweils die von Ihrem Algorithmus eingefügten Kanten in der Reihenfolge, in der Ihr Algorithmus sie einfügt.

   a) $K_{1,2}$ b) $K_{1,3}$ c) Q_2 d) G_1

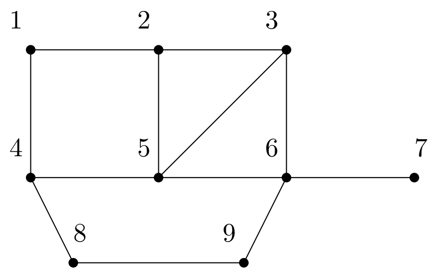

Abbildung 1: Der Graph G_1 zu Aufgabe 1

Bitte wenden

2 Dualgraph

Geben Sie einen linearen Algorithmus an, der aus den erweiterten Inzidenzlisten zu einem Graphen $\mathcal{G}$ mit gegebener kombinatorischer Einbettung die erweiterten Inzidenzlisten des kombinatorischen Dualgraphen $\mathcal{G}^*$ konstruiert.

3 Planare Einbettungen und geradlinige Zeichnungen

Sei G ein einfacher planarer Graph, der kombinatorisch eingebettet ist. Zeigen Sie, dass G eine planare Zeichnung besitzt in der jede Kante durch eine Strecke repräsentiert wird.

4 Erhöhende Wege

Sei $G = (V_1 \cup V_2, E)$ ein bipartiter Graph (jede Kante hat einen Knoten in V_1 und einen in V_2). Weiter sei v ein Knoten und M' ein kardinalitätsmaximales Matching für $G - v$, wobei v nicht „gematcht“ ist (d.h. v ist zu keiner Kante aus M' inzident). Gesucht ist nun ein kardinalitätsmaximales Matching für G. Dazu soll Lemma 5.2 der Vorlesung benutzt werden: Falls es keinen erhöhenden Weg bzgl. M' mit Endknoten v gibt, ist M' bereits das gesuchte Matching. Ansonsten müssen wir einen erhöhenden Weg P bzgl M' mit Endknoten v bestimmen, dann ist $(M' \cup P) \setminus (M' \cap P)$ das gewünschte Matching.

Geben Sie einen Algorithmus an, der feststellt, ob es einen erhöhenden Weg bzgl. M' mit Endknoten v gibt und diesen gegebenenfalls bestimmt. Die Laufzeit soll linear in der Anzahl der Kanten von G sein.

Hinweis: Modifizieren Sie eine Breitensuche mit Startknoten v.

5 Große und kleine Matchings

Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

1. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ Kanten
2. eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.