

## Zweites Übungsblatt

**Ausgabe:** 26. April 2018

**Besprechung:** 15. Mai 2018

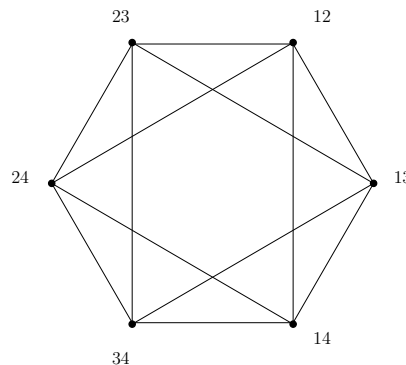
### 1 Außenplanare Graphen

Ein planarer Graph  $G$  heißt *außenplanar*, falls er eine planare Zeichnung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Eine äquivalente Formulierung ist, dass  $G$  genau dann außenplanar ist, wenn man zu  $G$  noch einen weiteren Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten hinzufügen kann, ohne die Planarität von  $G$  zu verletzen.

1. Zeigen Sie: Ein Graph  $G$  ist genau dann außenplanar, wenn er keine Unterteilung von  $K_4$  oder  $K_{2,3}$  enthält.
2. Zeigen Sie, dass ein außenplanarer Graph  $G$  mit  $n$  Knoten höchstens  $2n - 3$  Kanten enthält.

### 2 Der Petersengraph

**Definition:** Der Graph  $T_n$  hat als Knotenmenge die zweielementigen Teilmengen der Menge  $\{1, \dots, n\}$ . Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist. Die Abbildung rechts zeigt  $T_4$ . Der Komplementgraph<sup>1</sup>  $P$  von  $T_5$  heißt Petersengraph.



**Teil 1:** Zeichnen sie  $P$ .

**Bemerkung:** Es gibt folgende zwei Varianten des Satzes von Kuratowski.

- Ein einfacher Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er weder  $K_{3,3}$  noch  $K_5$  als Minor enthält.
- Ein einfacher Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung von  $K_{3,3}$  noch eine Unterteilung von  $K_5$  als Teilgraph enthält.

**Teil 2:** Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.

**Teil 3:** Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph  $H$  eine Unterteilung eines einfachen Graphen  $G$  als Teilgraph enthält, dann enthält  $H$  den Graphen  $G$  auch als Minor.

**Teil 4:** Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph  $H$  einen Graphen  $G$  als Minor enthält, dann enthält  $H$  auch eine Unterteilung von  $G$  als Teilgraph.

<sup>1</sup>Der Komplementgraph zu  $G = (V, E)$  ist  $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$

### 3 Färbung von Graphen

Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

1. Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad  $\Delta$  gilt  $\chi(G) \leq \Delta + 1$ .
2. Versuchen Sie Familien von Graphen anzugeben, für die  $\chi(G) = \Delta + 1$  gilt.
3. Zeigen Sie: Ein Graph  $G$  ist genau dann 2-färbbar, wenn  $G$  keine Kreise ungerader Länge enthält.

### 4 Verschiedene Bäume

1. Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  und Höhe höchstens  $2\sqrt{n}$ . Wie sieht es bei triangulierten Graphen aus?
2. Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten  $w$  und einen Breitensuchbaum  $T$  mit Wurzel  $w$  so, dass der PLANAR-SEPARATOR-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit  $S = S_m \cup S_M$  einen gültigen Separator findet.

### 5 Folgerung aus dem Planar Separator Theorem:

Zeigen Sie: Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen  $G = (V, E)$  mit  $n \geq 5$  Knoten und maximalem Knotengrad  $\Delta$  gibt es einen Schnitt  $S \subseteq E$  von  $G$  mit  $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$ , so dass  $G - S = (V, E \setminus S)$  aus zwei disjunkten Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  mit  $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$ ,  $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$ ,  $V_1 \cup V_2 = V$  und  $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$  besteht.

### 6 Umfang

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen  $G$  ist die Länge eines kürzesten Kreises in  $G$ . Enthält  $G$  keinen Kreis, so ist der Umfang  $\infty$ .

- a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegebenen Knoten  $v$  von  $G$  entweder
  - die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem  $v$  liegt, oder
  - entscheidet, dass  $v$  nicht auf einem kürzesten Kreis in  $G$  liegt.
- b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?
- c) Beschleunigen Sie Ihren Algorithmus für den Fall, dass der Eingabegraph planar ist.