Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
Sommersemester 2018
Dorothea Wagner, Michael Hamann, Lars Gottesbüren

Zweites Übungsblatt

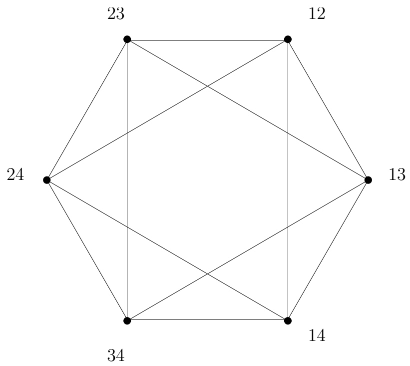
Ausgabe: 26. April 2018
Besprechung: 15. Mai 2018

1 Außenplanare Graphen

Ein planarer Graph G heißt *außenplanar*, falls er eine planare Zeichnung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Eine äquivalente Formulierung ist, dass G genau dann außenplanar ist, wenn man zu G noch einen weiteren Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten hinzufügen kann, ohne die Planarität von G zu verletzen.

1. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann außerplanar, wenn er keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$ enthält.
2. Zeigen Sie, dass ein außerplanarer Graph G mit n Knoten höchstens $2n-3$ Kanten enthält.

2 Der Petersengraph



Definition: Der Graph T_n hat als Knotenmenge die zweielementigen Teilmengen der Menge $\{1, \dots, n\}$. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist. Die Abbildung rechts zeigt T_4. Der *Komplementgraph*[1] P von T_5 heißt Petersengraph.

Teil 1: Zeichnen sie P.

Bemerkung: Es gibt folgende zwei Varianten des Satzes von Kuratowski.

- Ein einfacher Graph G ist genau dann planar, wenn er weder $K_{3,3}$ noch K_5 als Minor enthält.
- Ein einfacher Graph G ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung von $K_{3,3}$ noch eine Unterteilung von K_5 als Teilgraph enthält.

Teil 2: Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.

Teil 3: Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

Teil 4: Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H einen Graphen G als Minor enthält, dann enthält H auch eine Unterteilung von G als Teilgraph.

[1] Der Komplementgraph zu $G = (V, E)$ ist $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$

3 Färbung von Graphen

Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um G so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

1. Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad Δ gilt $\chi(G) \leq \Delta + 1$.
2. Versuchen Sie Familien von Graphen anzugeben, für die $\chi(G) = \Delta + 1$ gilt.
3. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält.

4 Verschiedene Bäume

1. Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w und Höhe höchstens $2\sqrt{n}$. Wie sieht es bei triangulierten Graphen aus?
2. Zeigen oder widerlegen Sie: In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w so, dass der Planar-Separator-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit $S = S_m \cup S_M$ einen gültigen Separator findet.

5 Folgerung aus dem Planar Separator Theorem:

Zeigen Sie: Zu einem zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad Δ gibt es einen Schnitt $S \subseteq E$ von G mit $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$, so dass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$, $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$, $V_1 \cup V_2 = V$ und $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$ besteht.

6 Umfang

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G. Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegeben Knoten v von G entweder
   - die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
   - entscheidet, dass v nicht auf einem kürzesten Kreis in G liegt.

b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

c) Beschleunigen Sie Ihren Algorithmus für den Fall, dass der Eingabegraph planar ist.