Erstes Übungsblatt

Ausgabe: 19. April 2018
Besprechung: 26. April 2018

1 Hyperkubus

Definition: Der *n-dimensionale Würfel* Q_n ist ein Graph mit folgenden Knoten und Kanten: Die Knotenmenge besteht aus den Wörtern der Länge n über dem Alphabet $\{0,1\}$. D.h. $V(Q_n) = \{0,1\}^n$. Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden.

1. Wieviele Knoten hat Q_n? Wieviele Kanten hat Q_n?
2. Beschreiben Sie die Knotengrade der Knoten im Q_n.
3. Betten Sie Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 (wenn möglich kreuzungsfrei) in die Ebene ein.
4. Betten Sie Q_4 kreuzungsfrei auf der Oberfläche eines Torus ein.

2 Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, sodass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

3 Die Schiefe

Die *Skewness* eines Graphen G ist die minimale Anzahl von Kanten, die aus G gelöscht werden müssen, damit der resultierende Graph planar ist. D.h. die Skewness eines Graphen ist 0 genau dann, wenn der Graph planar ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen einfachen Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt:
$$\textit{skewness}(G) \geq m - 3n + 6.$$
2. Berechnen Sie die *Skewness* von K_3, K_5, $K_{3,3}$ und K_6.

Bitte wenden!

4 Maximal planare Graphen und Triangulierungen

Gegeben sei ein einfacher Graph G mit einer planaren Einbettung. G heißt *maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt. G heißt *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt. Zeigen Sie, dass G genau dann maximal planar ist, wenn G trianguliert ist.

5 Bäume

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen G mit n Knoten:

1. G ist ein Baum, d.h. G ist zusammenhängend und kreisfrei.
2. G ist zusammenhängend und hat $n-1$ Kanten.
3. G ist kreisfrei und hat $n-1$ Kanten.

6 Selbstdualität

Definition: G heißt *selbstdual*, wenn G isomorph zum geometrischen Dualgraphen $G^\star$ ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen selbstdualen Graph mit n Knoten und m Kanten gilt: $m = 2n-2$.
2. Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ einen selbstdualen Graphen G mit einer festen Einbettung an.