Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen

26. April 2018, Übung 1

Lars Gottesbüren, **Michael Hamann**

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK

Organisatorisches

Übungsleiter

- Michael Hamann
- `michael.hamann@kit.edu`
- Lars Gottesbüren
- `lars.gottesbueren@kit.edu`
  - Raum 322
  - Bitte per E-Mail anmelden

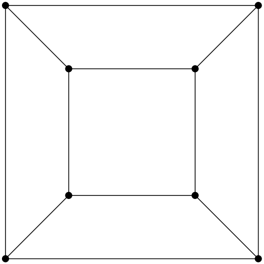
Übungsblätter

- 6 Übungen – 6 Übungsblätter
- Keine Abgabe, nicht verpflichtend
- Themen inklusive der Vorlesung eine Woche vor der Übung
- Veröffentlichung mindestens eine Woche vor der Übung

1 – Hyperkubus

Definition: Der *n-dimensionale Würfel* Q_n ist ein Graph mit folgenden Knoten und Kanten:

- Knoten: Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$. D.h. $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$.
- Kanten: Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden.



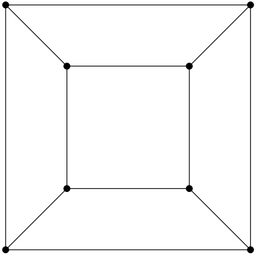
1a/b – Hyperkubus

Anzahl Knoten

- $V(Q_n) = \{0,1\}^n \Rightarrow |V(Q_n)| = 2^n$

Knotengrad d

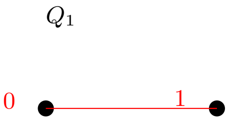
- Knoten sind benachbart, wenn sich die zugehörigen Wörter in genau einer Stelle unterscheiden
- Jedes Wort hat n stellen und es gibt alle möglichen Wörter
- $d = n$



Anzahl Kanten

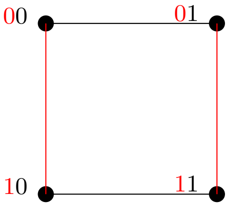
- Knotengrad für alle Knoten gleich
- $|E(Q_n)| = |V(Q_n)| \cdot d \cdot \frac{1}{2} = 2^n \cdot n \cdot \frac{1}{2} = 2^{n-1} \cdot n$

1c – Hyperkubus

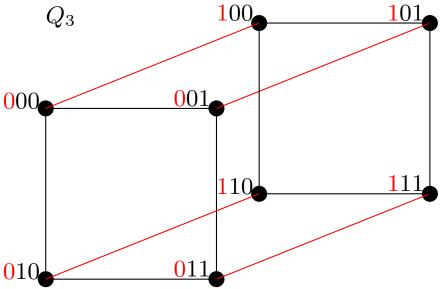


1c – Hyperkubus

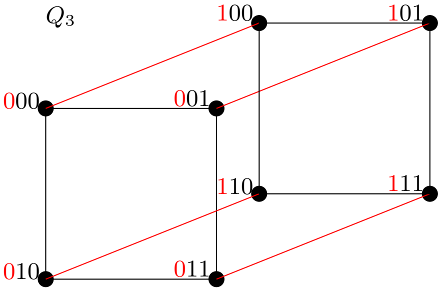
Q_2

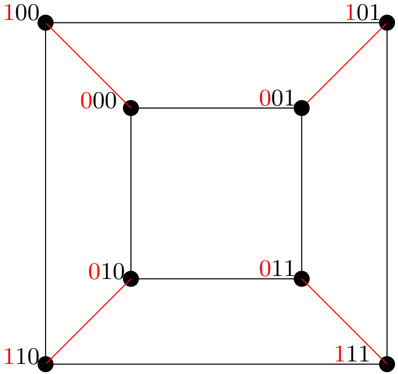


1c – Hyperkubus

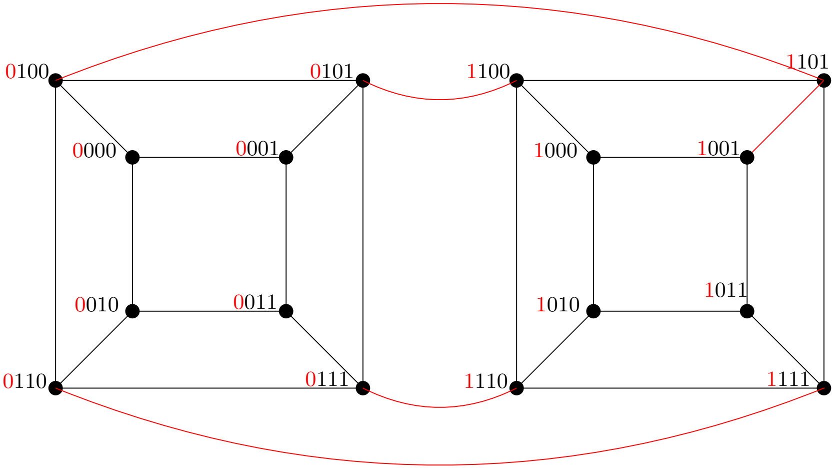


1c – Hyperkubus

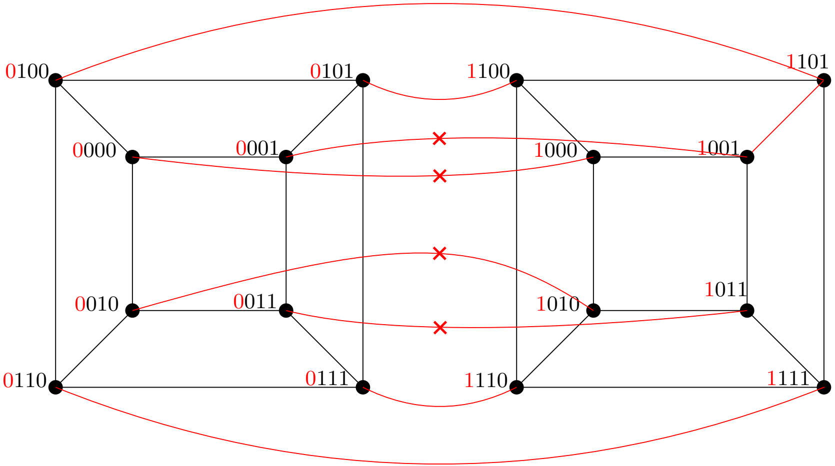




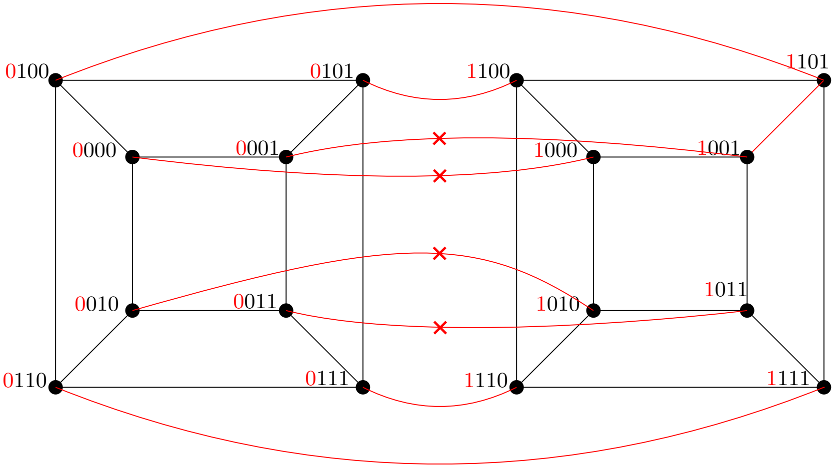
1c – Hyperkubus



1c – Hyperkubus

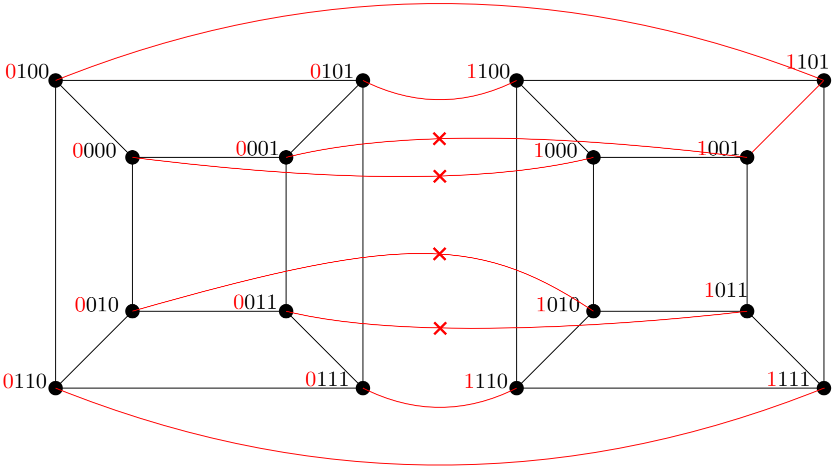


1c – Hyperkubus



Behauptung: Q_4 hat 4 Kanten zu viel, um planar einbettbar zu sein.

1c – Hyperkubus



Behauptung: Q_4 hat 4 Kanten zu viel, um planar einbettbar zu sein.
Q_4 enthält keine Dreiecke.

1c – Hyperkubus

Behauptung: Ein zusammenhängender planarer Graph G mit $n \geq 4$ Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens $2n - 4$ Kanten.

1c – Hyperkubus

Behauptung: Ein zusammenhängender planarer Graph G mit $n \geq 4$ Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens $2n - 4$ Kanten.

Beweis:

- Keine Dreiecke $\Rightarrow$ Jede Facette ist durch mind. vier Kanten begrenzt $\Rightarrow 4f \leq 2m \Leftrightarrow f \leq m/2$
- G ist zusammenhängend $\Rightarrow n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = 2 - n + m$

1c – Hyperkubus

Behauptung: Ein zusammenhängender planarer Graph G mit $n \geq 4$ Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens $2n - 4$ Kanten.

Beweis:

- Keine Dreiecke $\Rightarrow$ Jede Facette ist durch mind. vier Kanten begrenzt $\Rightarrow 4f \leq 2m \Leftrightarrow f \leq m/2$
- G ist zusammenhängend $\Rightarrow n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = 2 - n + m$

$\Rightarrow 2 - n + m \leq m/2 \Leftrightarrow 4 - 2n + 2m \leq m \Leftrightarrow m \leq 2n - 4$

1c – Hyperkubus

Behauptung: Ein zusammenhängender planarer Graph G mit $n \geq 4$ Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens $2n - 4$ Kanten.

Beweis:

- Keine Dreiecke $\Rightarrow$ Jede Facette ist durch mind. vier Kanten begrenzt $\Rightarrow 4f \leq 2m \Leftrightarrow f \leq m/2$
- G ist zusammenhängend $\Rightarrow n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = 2 - n + m$

$\Rightarrow 2 - n + m \leq m/2 \Leftrightarrow 4 - 2n + 2m \leq m \Leftrightarrow m \leq 2n - 4$

Behauptung: Q_4 hat 4 Kanten zu viel, um planar einbettbar zu sein.

1c – Hyperkubus

Behauptung: Ein zusammenhängender planarer Graph G mit $n \geq 4$ Knoten, der keine Dreiecke enthält, hat höchstens $2n - 4$ Kanten.

Beweis:

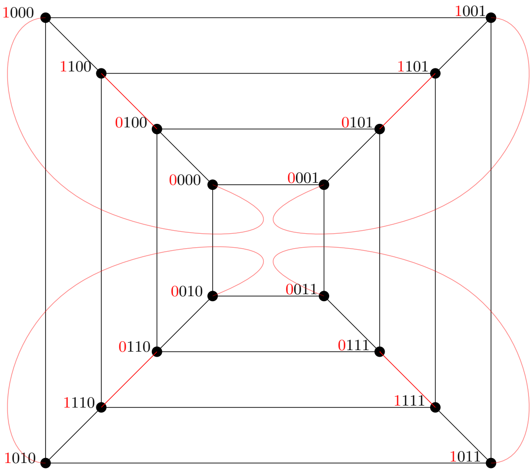
- Keine Dreiecke $\Rightarrow$ Jede Facette ist durch mind. vier Kanten begrenzt $\Rightarrow 4f \leq 2m \Leftrightarrow f \leq m/2$
- G ist zusammenhängend $\Rightarrow n - m + f = 2 \Leftrightarrow f = 2 - n + m$

$\Rightarrow 2 - n + m \leq m/2 \Leftrightarrow 4 - 2n + 2m \leq m \Leftrightarrow m \leq 2n - 4$

Behauptung: Q_4 hat 4 Kanten zu viel, um planar einbettbar zu sein.

Beweis: $|E(Q_4)| = \underbrace{2^3}_{=8} \cdot 4 = 32 \leq 2 \cdot \underbrace{|V(Q_4)|}_{=2^4=16} - 4 = 28$ ↯

1d – Hyperkubus



2 – Facettengradfolge

- Sei G kreuzungsfrei eingebetteter Graph mit f Facetten
- $a_i = |\{e \in E(G) \mid e \text{ ist inzident zu Facette } i\}|$, für $1 \leq i \leq f$
- $(a_1, a_2, \dots, a_f)$ sei nichtabsteigend sortiert

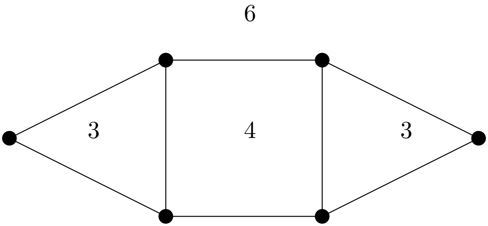
Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, sodass die zugehörigen Facettengradfolgen unterschiedlich sind?

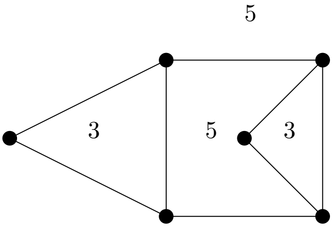
2 – Facettengradfolge

- Sei G kreuzungsfrei eingebetteter Graph mit f Facetten
- $a_i = |\{e \in E(G) \mid e \text{ ist inzident zu Facette } i\}|$, für $1 \leq i \leq f$
- $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ sei nichtabsteigend sortiert

Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, sodass die zugehörigen Facettengradfolgen unterschiedlich sind?

Ja!





3 – Die Schiefe

Definition: Die *Skewness* eines Graphen G ist die minimale Anzahl von Kanten, die aus G gelöscht werden müssen, damit der resultierende Graph planar ist.

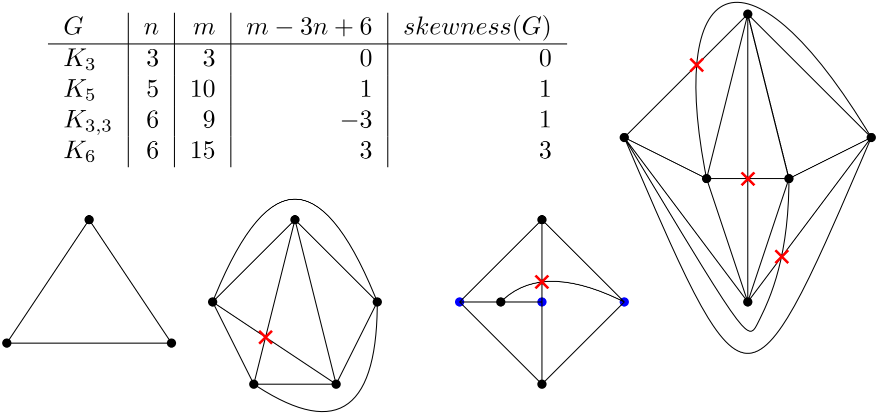
Zu zeigen: $\mathit{skewness}(G) \geq m - 3n + 6$, mit $n = |V(G)|, m = |E(G)|$

- Sei H ein größter planarer Teilgraph von G
- H größtmöglich $\Rightarrow m - |E_H|$ minimal $\Rightarrow m - |E_H| = \mathit{skewness}(G)$
- $|E_H| \leq 3n - 6 \quad \Leftrightarrow \quad m - |E_H| \geq m - 3n + 6$

$\Rightarrow \mathit{skewness}(G) \geq m - 3n + 6$

3 – Die Schiefe

G	n	m	$m-3n+6$	$skewness(G)$
K_3	3	3	0	0
K_5	5	10	1	1
$K_{3,3}$	6	9	-3	1
K_6	6	15	3	3



4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planerer Einbettung.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planerer Einbettung.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planerer Einbettung.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planerer Einbettung.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planerer Einbettung.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind
  $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ kann planar eingebettet werden

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planerer Einbettung.

- G *maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- G *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind
  $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ kann planar eingebettet werden
  $\Rightarrow$ G nicht maximal planar

4 – Triangulierung

Karlsruher Institut für Technologie

G einfacher Graph mit planerer Einbettung.

- *G maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- *G trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind
  $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ kann planar eingebettet werden
  $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
- G ist nicht maximal planar $\Rightarrow$ G ist nicht trianguliert

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planerer Einbettung.

- G *maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- G *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind
  $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ kann planar eingebettet werden
  $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
- G ist nicht maximal planar $\Rightarrow$ G ist nicht trianguliert
  - Es kann eine weitere Kante planar in G eingebettet werden

4 – Triangulierung

G einfacher Graph mit planerer Einbettung.

- G *maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.
- G *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt.

Zu zeigen: G maximal planar $\Leftrightarrow$ G trianguliert

- G nicht trianguliert mit fester Einbettung $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
  G nicht trianguliert $\Rightarrow$ Es gibt Facette f, die kein Dreieck ist
  $\Rightarrow$ Es gibt Knoten u und v auf f die nicht verbunden sind
  $\Rightarrow$ $e = \{u, v\}$ kann planar eingebettet werden
  $\Rightarrow$ G nicht maximal planar
- G ist nicht maximal planar $\Rightarrow$ G ist nicht trianguliert
  - Es kann eine weitere Kante planar in G eingebettet werden
  - Wenn G trianguliert wäre, würde eine Doppelkante entstehen
    $\Rightarrow$ G nicht trianguliert

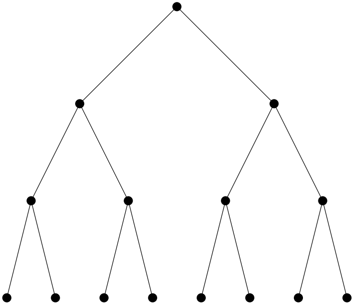
5 – Bäume

1. G ist ein Baum, d.h. G ist zusammenhängend und kreisfrei
2. G ist zusammenhängend und hat $n-1$ Kanten
3. G ist kreisfrei und hat $n-1$ Kanten

Zu zeigen: $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$

Beweisstrategie:

- $1 \Rightarrow 2$
- $2 \Rightarrow 3$
- $3 \Rightarrow 1$



5 – Bäume 1 $\Rightarrow$ 2

G ist zusammenhängend mit n Knoten

- Zu zeigen: G ist *kreisfrei* $\Rightarrow$ G hat $n-1$ Kanten
- Induktion über n
- *IA*: $n = 1 \Rightarrow$ keine Kante ✓
- *IV*: Ein kreisfreier Baum mit $n-1$ Knoten hat $n-2$ Kanten
- $n-1 \curvearrowright n$
  - Entferne beliebiges Blatt von G
  - $G - v$ ist zusammenhängend und kreisfrei
  - nach *IV* hat $G - v$ genau $n-2$ Kanten
    $\Rightarrow$ G hat $n-1$ Kanten

5 – Bäume 2 ⇒ 3

G hat $n - 1$ Kanten

- Zu zeigen: G ist zusammenhängend $\Rightarrow$ G ist kreisfrei
- Angenommen G sei zusammenhängend aber nicht kreisfrei
- Lösche iterativ jeweils eine Kante aus einem Kreis in G bis G kreisfrei ist $\rightarrow G'$
- G' ist immer noch zusammenhängend
- Mit 1) $\Rightarrow$ 2) gilt: G' hat $n - 1$ Kanten
  $\Rightarrow G = G'$

5 – Bäume $3 \Rightarrow 1$

Karlsruher Institut für Technologie

G ist kreisfrei

- Zu zeigen: G hat $n-1$ Kanten $\Rightarrow$ G ist zusammenhängend
- Sei k die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G
- $n_i :=$ Anzahl Knoten der $i$ten Komponente
- $m_i :=$ Anzahl Kanten der $i$ten Komponente
- Jede Komponente ist kreisfrei und zusammenhängend
- Mit $1) \Rightarrow 2)$ gilt: $m_i = n_i - 1$
- $m = \sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) = n - k$; $m = n - 1$
  $\Rightarrow k = 1$

6 – Selbstdualität

G heißt selbstdual, wenn G isomorph zu seinem Dualgraphen G^* ist

1. G selbstdual mit n Knoten und m Kanten $\Rightarrow m = 2n - 2$
2. Geben Sie für alle $n \geq 1$ einen selbstdualen Graphen G mit fester Einbettung an

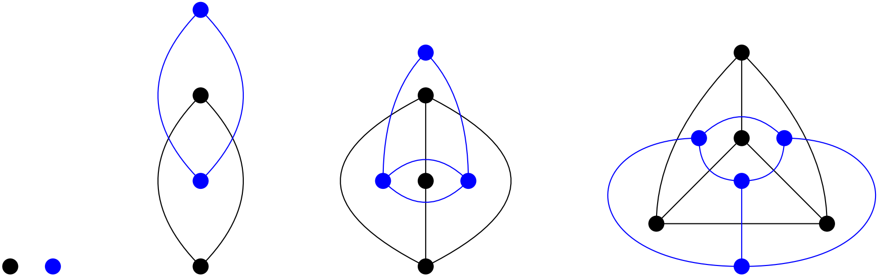
6 – Selbstdualität

G selbstdual $\Rightarrow m = 2n - 2$

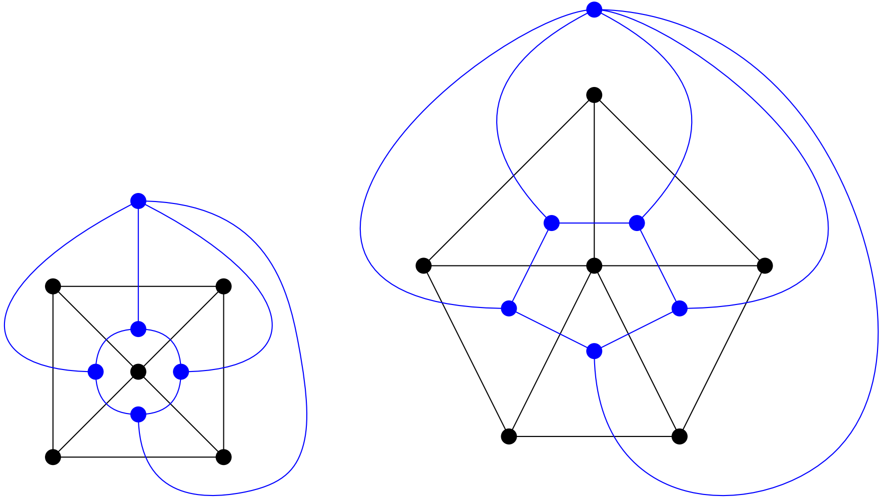
- Facetten in G sind Knoten in $G^* \Rightarrow f \rightarrow n$
- Da G und G^* isomorph sind folgt $f = n$
- Dualgraphen sind immer zusammenhängend, daher gilt für G und G^* der Satz von Euler
- $n - m + f = 2 \Rightarrow 2n - m = 2 \Rightarrow m = 2n - 2$

6 – Selbstdualität

Selbstdualer Graph für alle $n \geq 1$



6 – Selbstdualität



Nächste Termine

- Donnerstag, 3. Mai 2018 Vorlesung
- Dienstag, 8. Mai 2018 Vorlesung
- Dienstag, 15. Mai 2018 Übung