

Übungsblatt 2

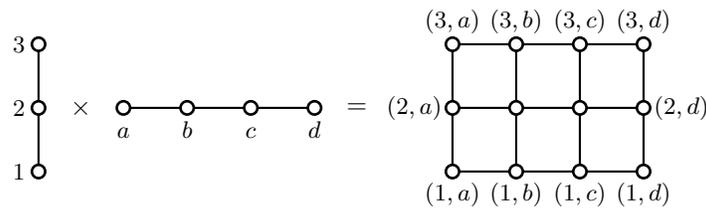
Besprechung in der Übung am 08. Mai 2018

Aufgabe 1: Graphfärbung und unabhängige Mengen

★★

Sei G ein Graph mit n Knoten. Zeigen Sie, dass $\chi(G) \leq r$ genau dann gilt, wenn $\alpha(G \times K_r) = n$.

Das *Kartesische Produkt* $G_1 \times G_2$ zweier Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ ist definiert als $G_1 \times G_2 = (V_1 \times V_2, E)$ mit $E = \{ \{ (v_1, v_2), (v'_1, v'_2) \} \mid \text{entweder } v_1 = v'_1 \text{ und } \{v_2, v'_2\} \in E_2 \text{ oder } v_2 = v'_2 \text{ und } \{v_1, v'_1\} \in E_1 \}$ (siehe Beispiel unten).



Inwiefern ist damit gezeigt, dass das Problem INDEPENDENT SET NP-schwer ist (vorausgesetzt GRAPH COLORING ist NP-schwer)?

Aufgabe 2: Kommutierende Operationen

★

Seien x und y unterschiedliche Knoten in einem Graphen G . Zeigen Sie, dass $(G \circ x) - y = (G - y) \circ x$ gilt.

Aufgabe 3: Algorithmische Knotenmultiplikation

★★

Seien x_1, \dots, x_n die Knoten des Graphen G und sei $h = (h_1, \dots, h_n)$ ein Vektor mit $h_i \in \mathbb{N}_0$. Machen Sie sich klar, dass der Algorithmus rechts den Graphen $H = G \circ h$ konstruiert. Welche Laufzeit hat der Algorithmus? Kann man H auch schneller berechnen?

Hinweis: Wie verhält sich die Laufzeit bzgl. der Ausgabegröße?

```

H ← G
für i ← 1 bis n tue
    wenn hi = 0 dann H ← H - xi
    sonst
        solange hi > 1 tue
            H ← H ∘ xi
            hi ← hi - 1
    
```

Aufgabe 4: Ein bisschen Perfekt?

★★

Geben Sie einen Graphen G an, für den $\alpha(G) = k(G)$ und $\omega(G) < \chi(G)$ gilt. Warum widerspricht das nicht dem Perfect Graph Theorem?

Aufgabe 5: Cliquesüberdeckungen und unabhängige Mengen

★

Sei G ein Graph mit $\alpha(G) = k(G)$. Sei außerdem \mathcal{K} eine Cliquesüberdeckung mit $|\mathcal{K}| = k(G)$ und sei \mathcal{U} die Menge aller unabhängigen Mengen der Größe $\alpha(G)$. Zeigen Sie, dass $|U \cap K| = 1$ für alle $U \in \mathcal{U}$ und $K \in \mathcal{K}$ gilt.

Geben Sie die dazu duale Aussage für Graphen mit $\omega(G) = \chi(G)$ an.

Aufgabe 6: Überhaupt nicht perfekt

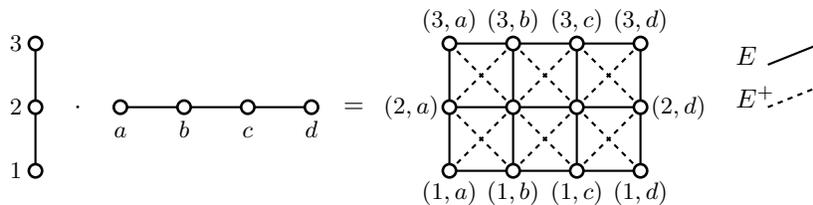
★★★

Es soll gezeigt werden, dass die Differenz zwischen der Cliqueszahl und der chromatischen Zahl beliebig groß sein kann. Zeigen Sie dazu, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ ein Graph G existiert, sodass $\omega(G) = 2$ und $\chi(G) = k$ gilt.

Aufgabe 7: Graphparameter und das normale Produkt

★★

Das *normale Produkt* $G_1 \cdot G_2$ zweier Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ ist definiert als $G_1 \cdot G_2 = (V_1 \times V_2, E \cup E^+)$ mit $E = \{\{(v_1, v_2), (v'_1, v'_2)\} \mid \text{entweder } v_1 = v'_1 \text{ und } \{v_2, v'_2\} \in E_2 \text{ oder } v_2 = v'_2 \text{ und } \{v_1, v'_1\} \in E_1\}$ und $E^+ = \{\{(v_1, v_2), (v'_1, v'_2)\} \mid \{v_1, v'_1\} \in E_1 \text{ und } \{v_2, v'_2\} \in E_2\}$ (siehe Beispiel unten).



Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (a) $\chi(G_1 \cdot G_2) \geq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$
- (b) $\omega(G_1 \cdot G_2) = \omega(G_1) \cdot \omega(G_2)$
- (c) $\alpha(G_1 \cdot G_2) \geq \alpha(G_1) \cdot \alpha(G_2)$
- (d) $k(G_1 \cdot G_2) \leq k(G_1) \cdot k(G_2)$