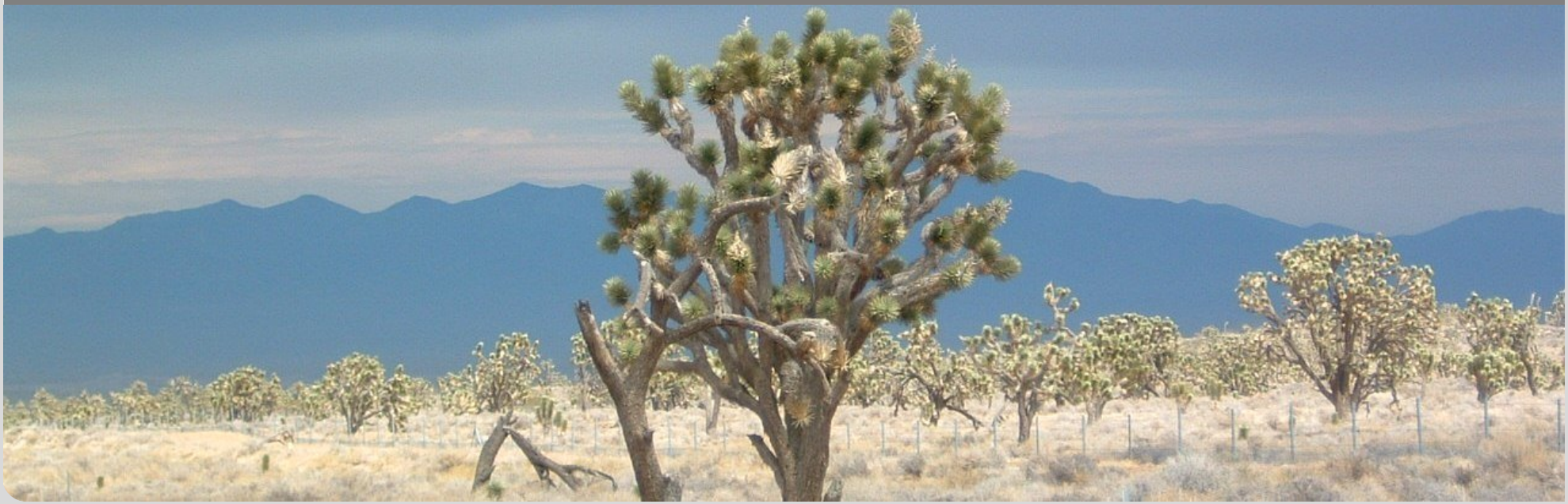
Karlsruher Institut für Technologie

# Algorithmen für Routenplanung

8. Vorlesung, Sommersemester 2017

Ben Strasser | 29. Mai 2014

Institut für Theoretische Informatik · Algorithmik



# Exkurs

**Heute:**

- keine Routenplanung
- Womit sind die gesehenen Algorithmen verwandt?

**Nächste Woche:**

- Wieder Routenplanung

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

- Große quadratische Gleichungssysteme Lösen hat viele Anwendungen
- Schnelles Lösen ist wichtig
- Algorithmus von Gauß in $O(n^3)$ wobei $n$ die Anzahl der Variablen ist
  - Oft zu langsam

- Oft sind Gleichungssysteme dünnbesetzt
  - d. h. viele Koeffizienten sind 0
- Idee: Speichere 0-Koeffizienten nicht ab
- Aber: Wie 0-Koeffizienten während des Lösens erhalten?

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Ziel: Obere Dreiecksmatrix per Gauselimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Nullen im oberen Dreieck

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Ziel: Obere Dreiecksmatrix per Gauselimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Ziel: Obere Dreiecksmatrix per Gauselimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Ziel: Obere Dreiecksmatrix per Gauselimination

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Keine Nullen übrig $\rightarrow$ :(

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Idee: Spalten und Zeilen umsortieren

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alle 4 Nullen erhalten $\rightarrow$ :)

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Warum funktioniert das?

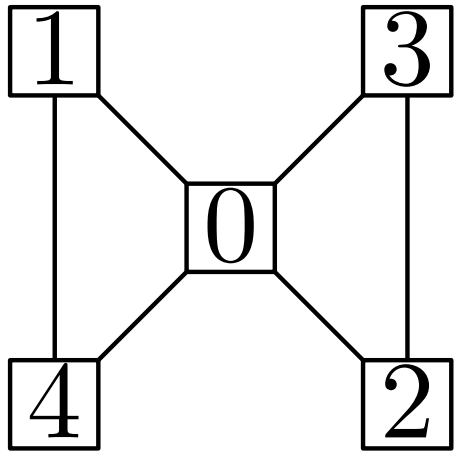


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag der nicht Null ist entspricht einer Kante.

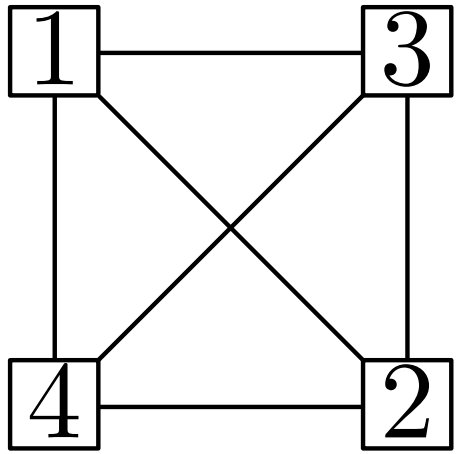
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag der nicht Null ist entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

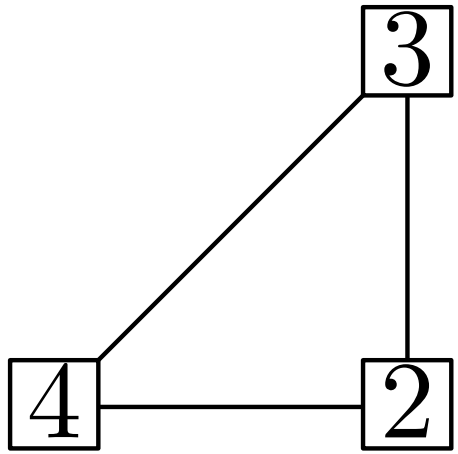



Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag der nicht Null ist entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

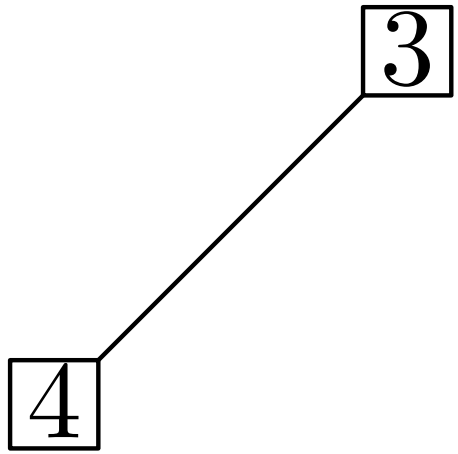



Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag der nicht Null ist entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$




Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag der nicht Null ist entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

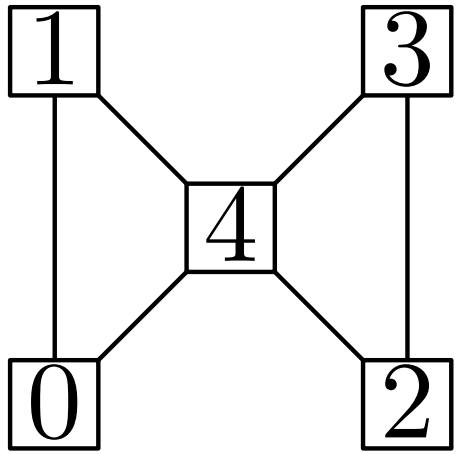
$\boxed{4}$

Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag der nicht Null ist entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

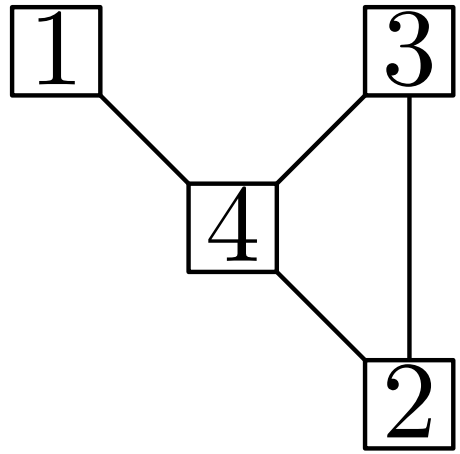



Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag der nicht Null ist entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

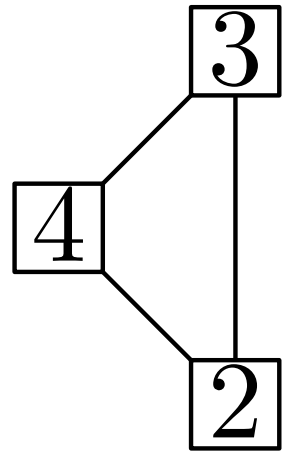



Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag der nicht Null ist entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

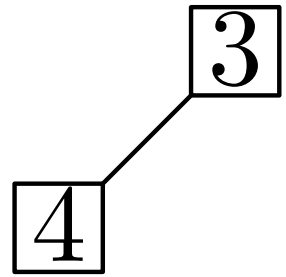



Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag der nicht Null ist entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

Jeder Eintrag der nicht Null ist entspricht einer Kante.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{4}$

Variablenelimination $\leftrightarrow$ Knotenkontraktion
Jeder Shortcut zerstört eine Null

# Dünnbesetzte Gleichungssysteme

- Wenig Kanten im CCH-Graph $\leftrightarrow$ viele 0-Koeffizienten in Matrix
- Wie hängt dies genau zusammen?
  - Baumzerlegung

# Baumzerlegung

## Baumzerlegungen

- Sehr breites Themenfeld
- Schwer zu überblicken
- Sehr viel Literatur

## Anwendungen

- Routenplanung
- Gleichungssysteme lösen
- Fixed Parameter Tractablilty (FPT) Algorithmen für NP-schwere Probleme
  - z. B. Vertex-Cover, 3-Color, Independent Set
  - Mehr dazu später

# Definition

Eine Baumzerlegung $(B, T)$ eines ungerichteten ungewichteten Graphen $(V, E)$ besteht aus

- Menge von Bags
  - Jeder Bag ist eine Knotenmenge
- Backbone $T$
  - Graph mit Bags als Knoten
  - Bei Baumzerlegung ist $T$ ein Baum
  - (Analog: Bei Pfadzerlegung ist $T$ ein Pfad)

# Definition

Eine Baumzerlegung $(B, T)$ eines ungerichteten ungewichteten Graphen $(V, E)$ besteht aus

- Menge von Bags
  - Jeder Bag ist eine Knotenmenge
- Backbone $T$
  - Graph mit Bags als Knoten
  - Bei Baumzerlegung ist $T$ ein Baum
  - (Analog: Bei Pfadzerlegung ist $T$ ein Pfad)

- $T_x$ ist Teilgraph von $T$
- $T_x$ wird induziert durch Bags die Knoten $x$ enthalten

# Definition

Jede Baumzerlegung muss drei Bedingungen erfüllen

- Jeder Knoten ist in einem oder mehreren Bags

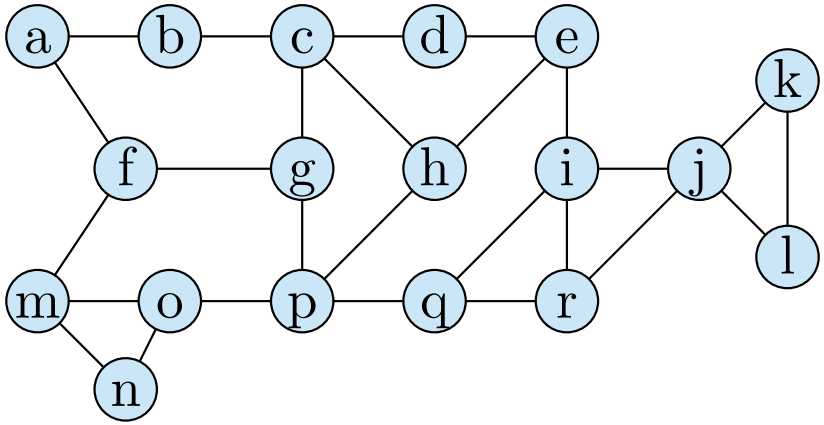
$$\bigcup_{b \in B} b = V$$

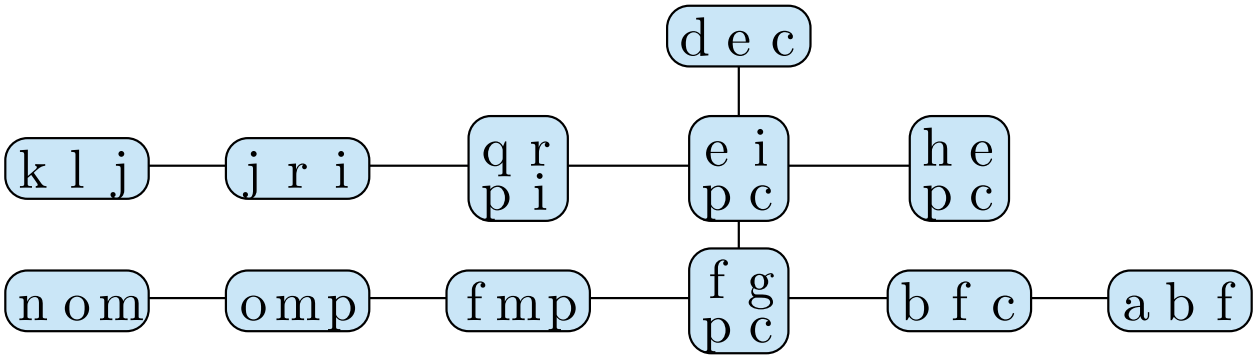
- Jede Kante ist in einem Bag

$$\forall \{x, y\} \in E : \exists b \in B : x \in b \wedge y \in b$$

- Für jeden Knoten $x$ ist $T_x$ ein Baum

# Beispiel


a
b
c
d
e
k
f
g
h
i
j
l
m
o
p
q
r
n


d e c
k l j
j r i
q r
p i
e i
p c
h e
p c
n o m
o m p
f m p
f g
p c
b f c
a b f

# Baumbreite

- Breite einer Baumzerlegung ist maximale Baggröße minus 1
- Baumbreite *tw* eines Graphs ist minimale Breite einer Baumzerlegung

# Fixed Parameter Tractablity (FPT)

- Problem ist FPT in der Baumbreite wenn es Algorithmus gibt mit Laufzeit:

$$f(tw) \cdot p(n)$$

- $tw$ ist Baumbreite, $n$ ist Knotenanzahl
- $f$ beliebige Funktion die nicht von $n$ abhängt
- $p$ beliebiges Polynom

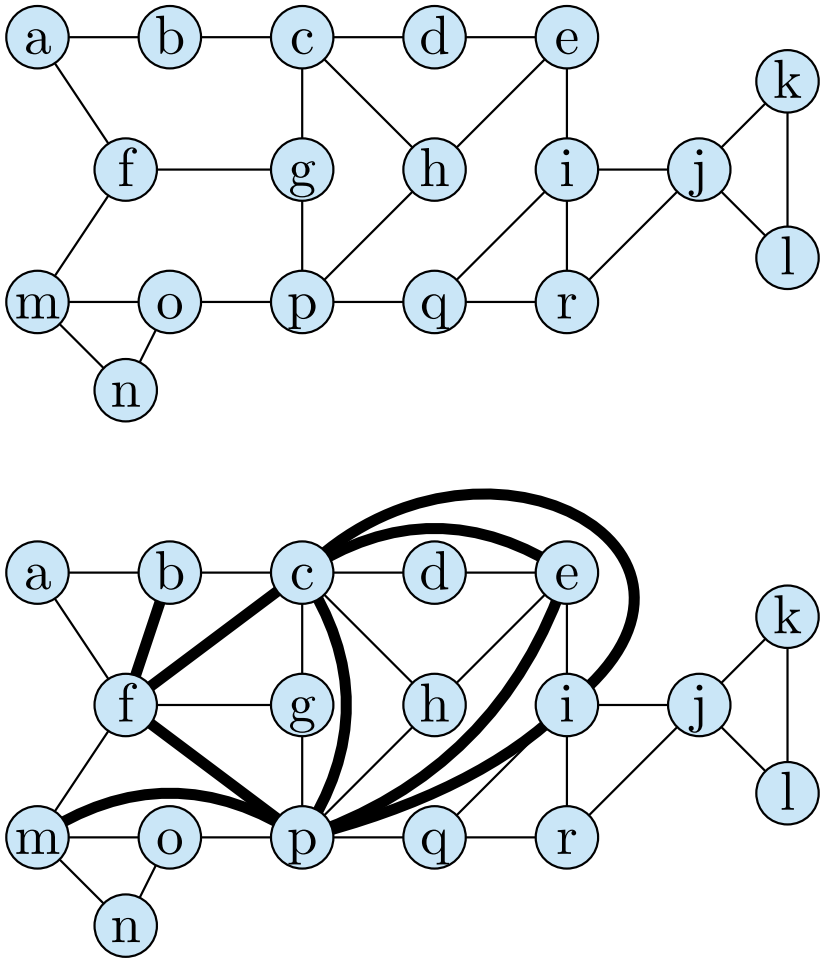
**Beispiel**

- Vertex-Cover in Zeit $2^{tw} \cdot m$ lösbar

# Zusammenhang zu CCH

- Maximale Cliquen in CCH-Graph sind Bags einer Baumzerlegung

# Schritt 1: CCH-Graph bauen

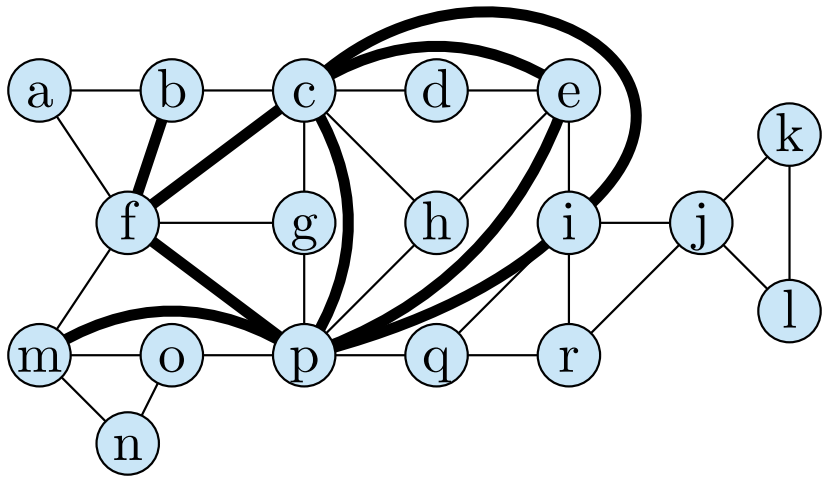


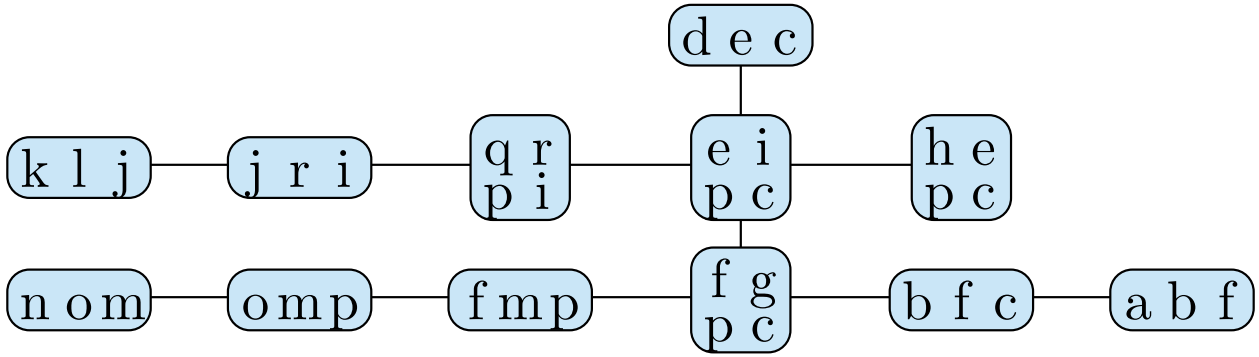

Knotenordnung: k, l, a, b, d, n, j, o, m, f, g, h, e, q, r, i, p, c



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

# Schritt 2: Maximale Cliquen



# Zusammenhang zu CCH

**Terminologie**

- Im Baumzerlegungskontext verwendet man folgende Begriffe:
  - Kontrationsordnung $\leftrightarrow$ (perfect) elimination order
  - CCH-Graph $\leftrightarrow$ chordaler Supergraph

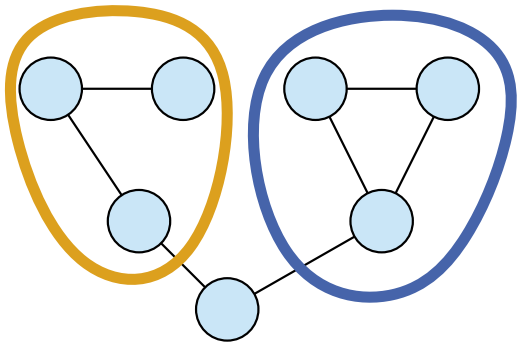
# Definition Multilevel Partition

- Multilevel Partition $P$ ist Menge von Zellen
- Jede Zelle $z$ ist Menge von Knoten

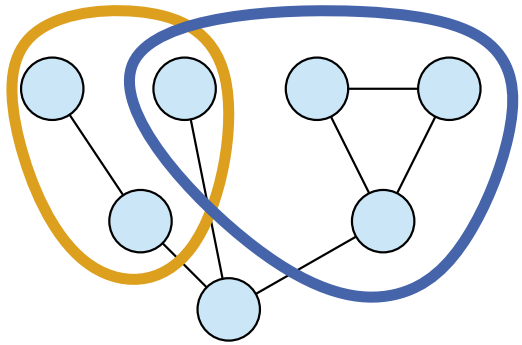
Wir fordern:

- Es gibt immer eine top-level Zelle die alle Knoten enthält
- Zellen die sich “berühren” sind verschachtelt

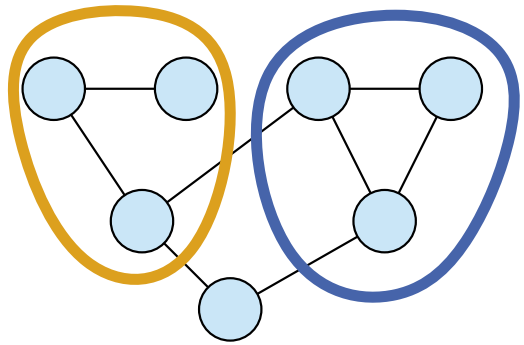
# Wann berühren sich Zellen?



Keine Berührung



Berührung



Berührung

Zwei Zellen berühren sich wenn sie

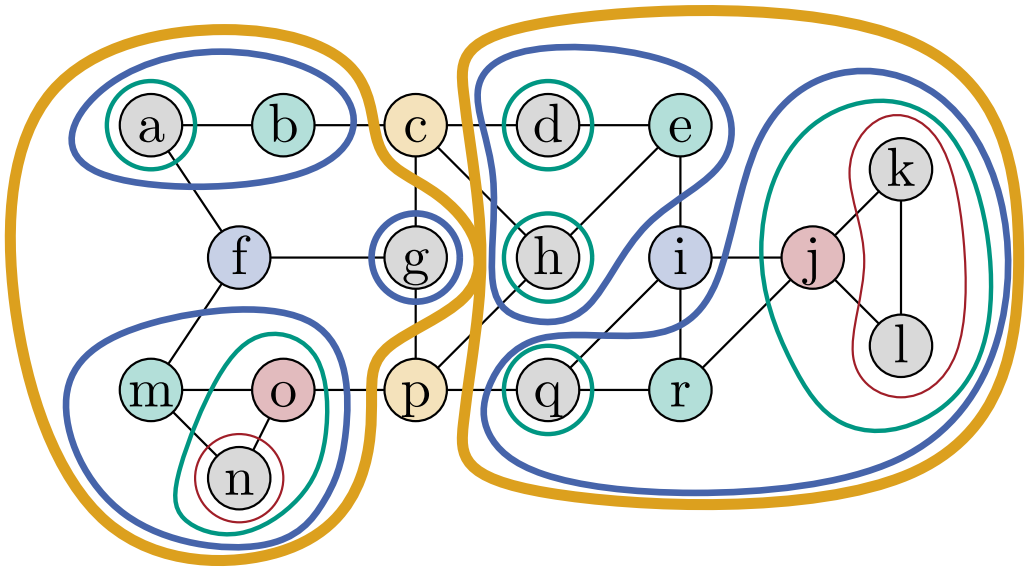
- einen gemeinsamen Knoten haben oder
- es eine Kante zwischen den Zellen gibt.

# Wann berühren sich Zellen?

## Warnung

- Zellen werden hier per Knotenseparator getrennt
- Bei MLD üblicherweise aber per Kantenschnitte
- Knotenseparatoren passen besser mit Baumzerlegung zusammen

# Beispiel




- Kreise sind Zellen
- Toplevel Zelle nicht eingezeichnet

# Zellenrand

Zellenrand $R$ einer Zelle $Z$ sind Knoten die

- nicht in $Z$ sind
- aber es eine Kante gibt zwischen Knoten in $Z$ und in $R$

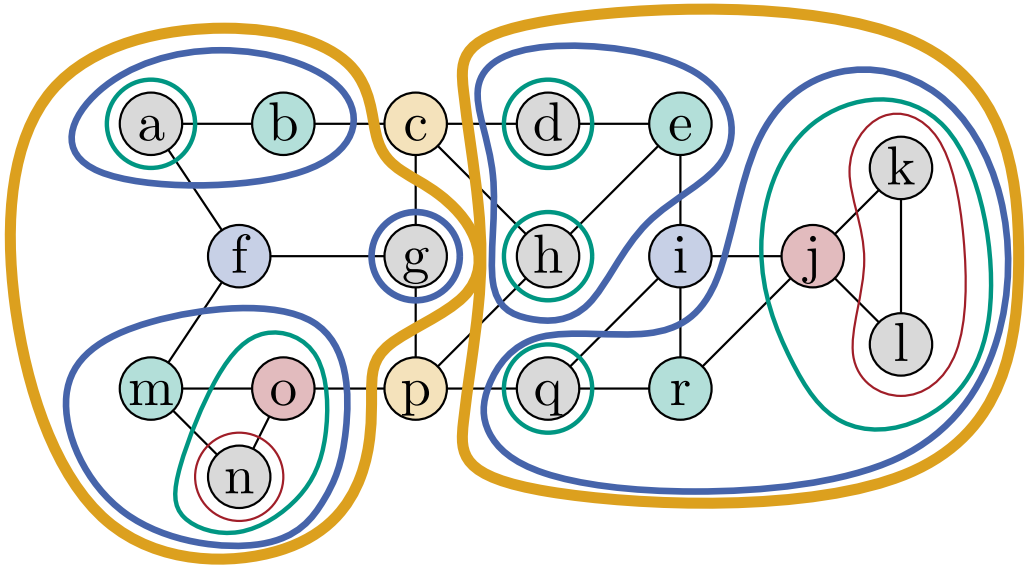
# Zusammenhang zu Multilevel Partition

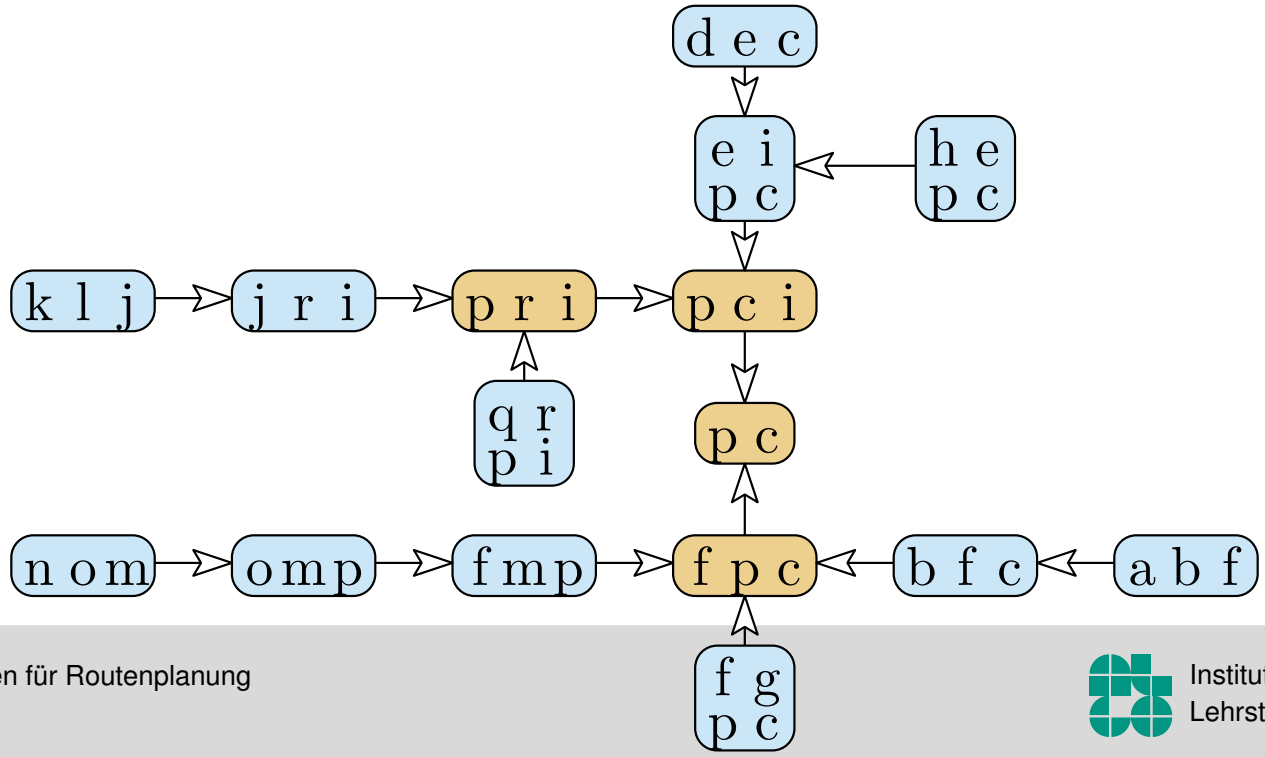
## Zusammenhang

- Multilevel Partition entspricht gewurzelter Baumzerlegung
- Zellen entsprechen Bags
- Kind-Eltern-Relation entspricht Treebackbone

- Bag ist Vereinigung von
  - Zellenrand und Zell
  - ohne das Innere der Kinderzellen

# Beispiel



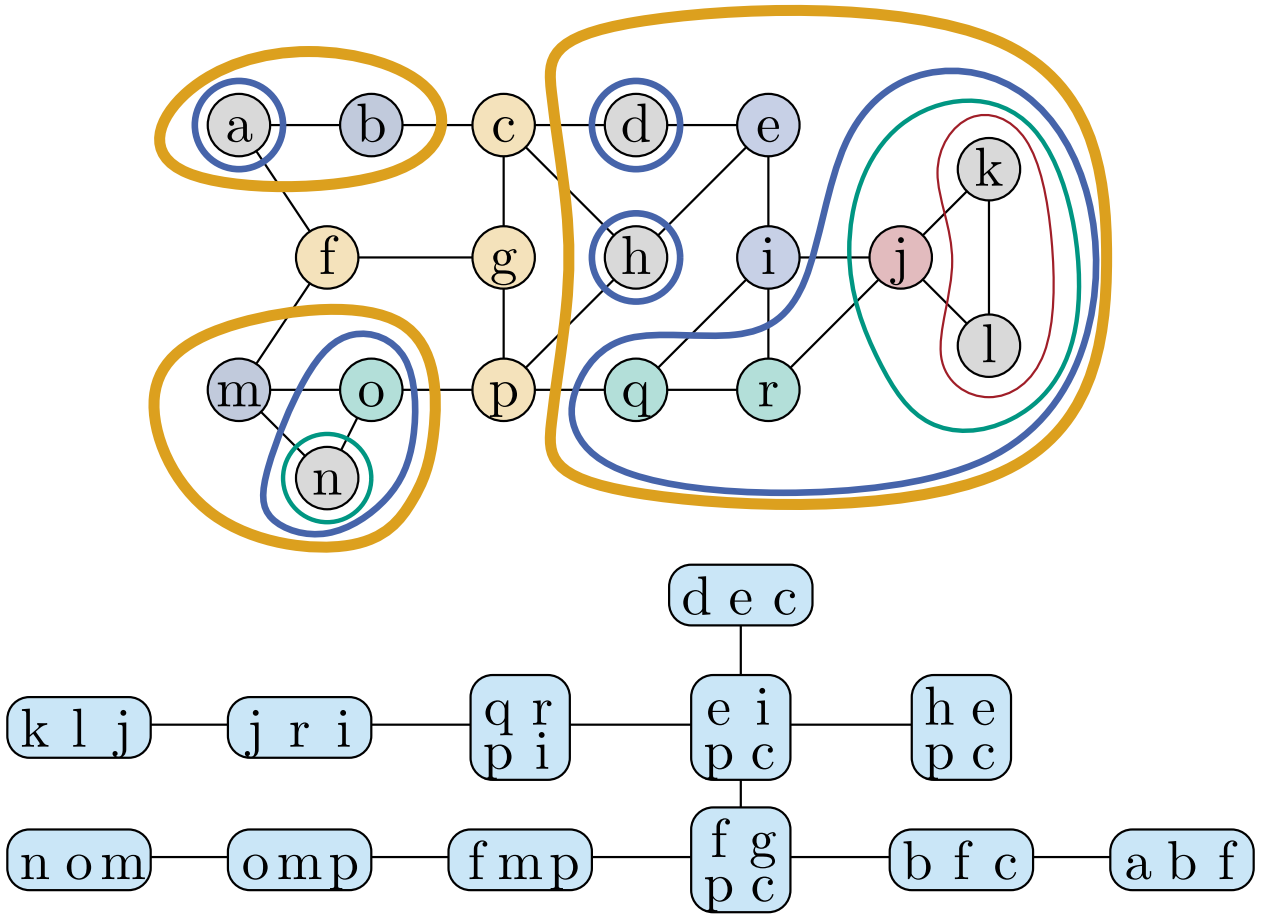





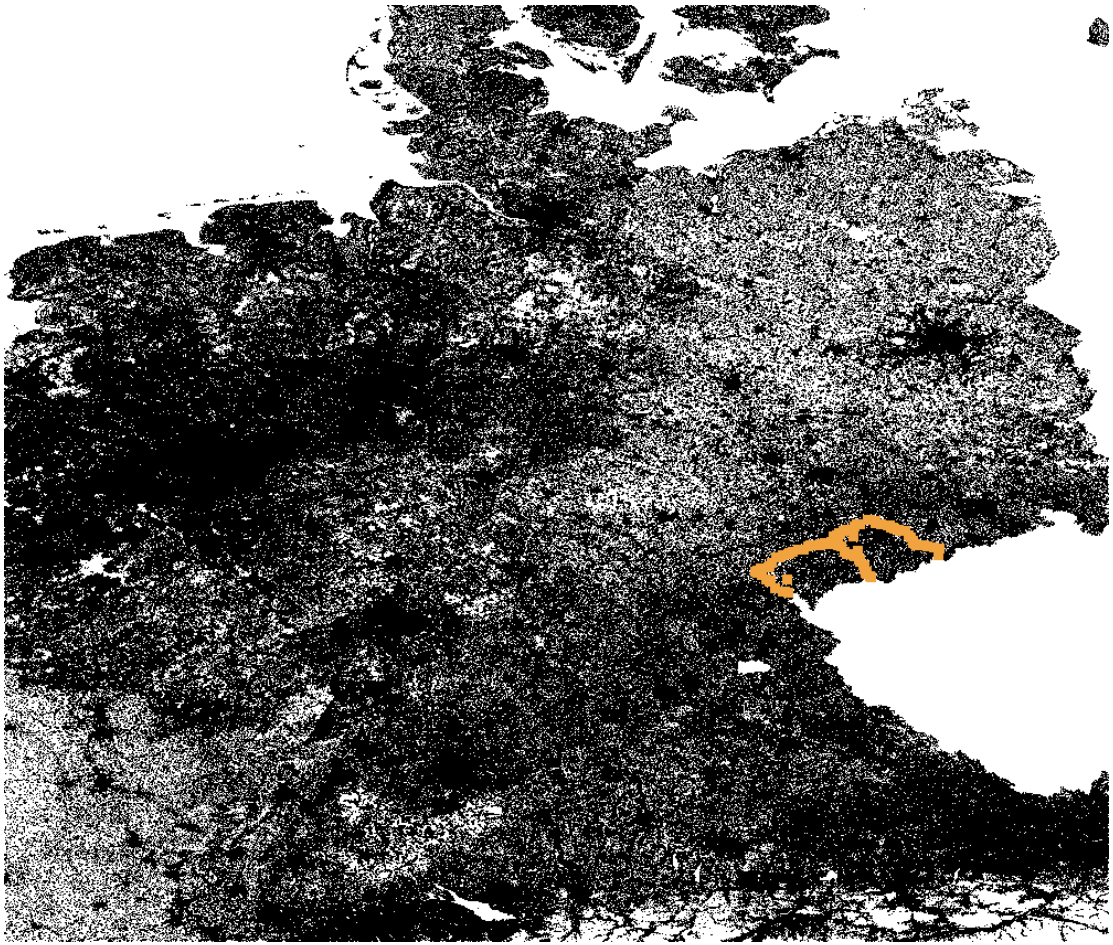


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

# Beispiel


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
o
p
q
r
n
d e c
k l j
j r i
q r
p i
e i
p c
h e
p c
n o m
o m p
f m p
f g
p c
b f c
a b f

# Straßengraph

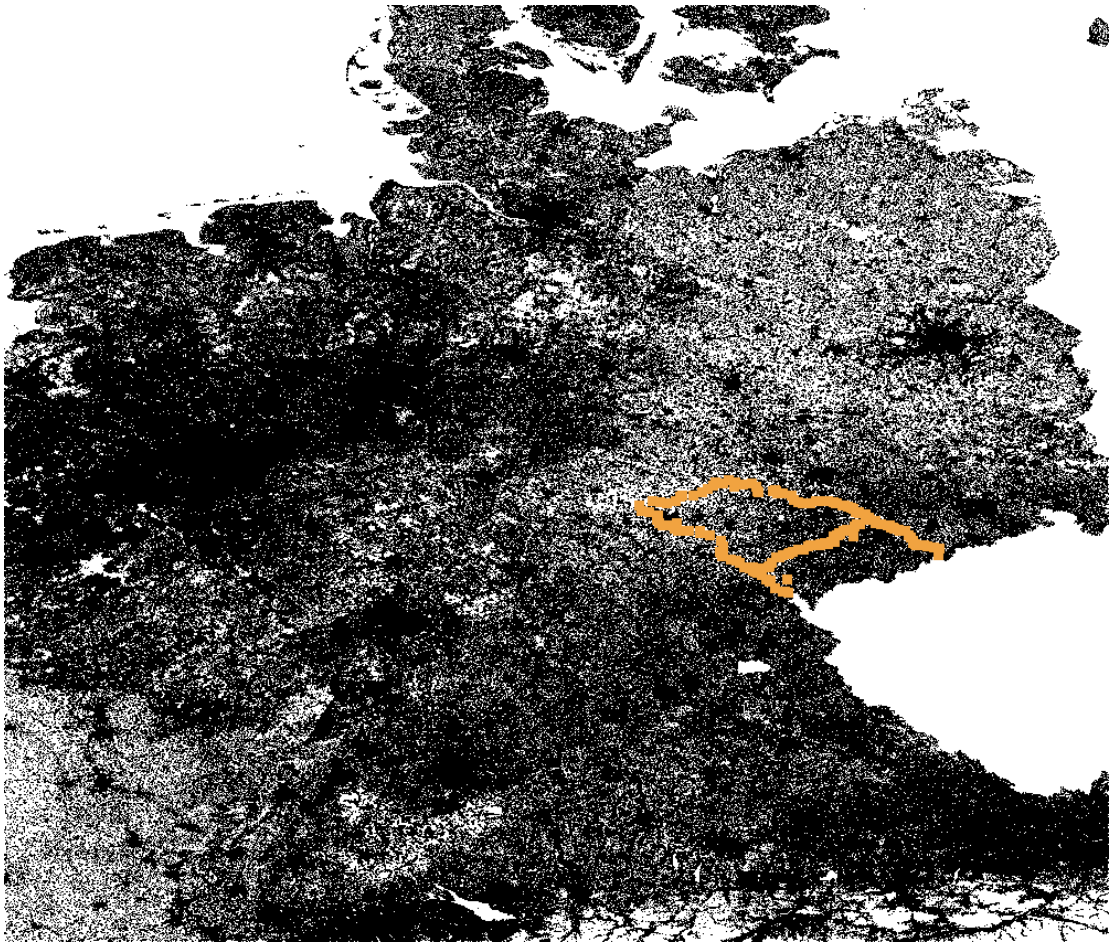


- orange Knoten sind in einem Bag
- Beispiel ist ein Pfad im Treebackbone von 6 Bags



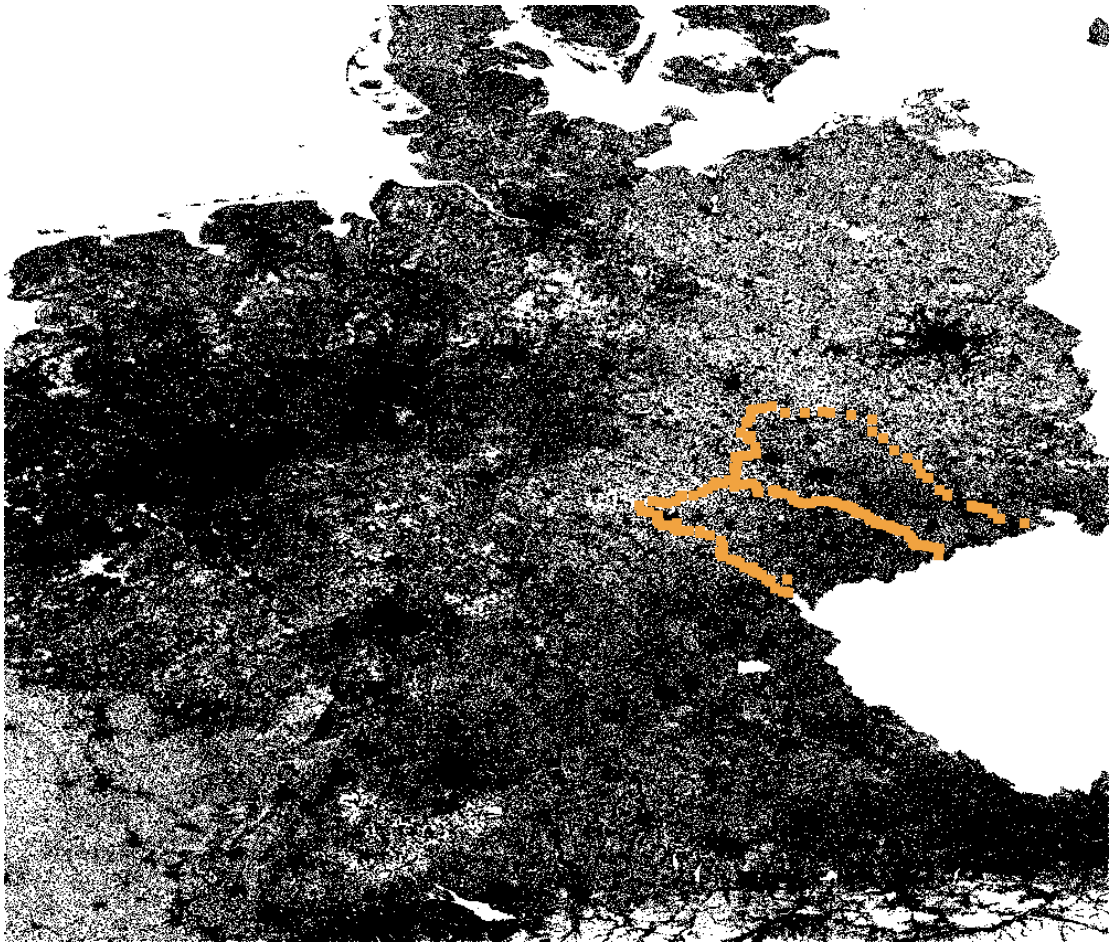
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

# Straßengraph



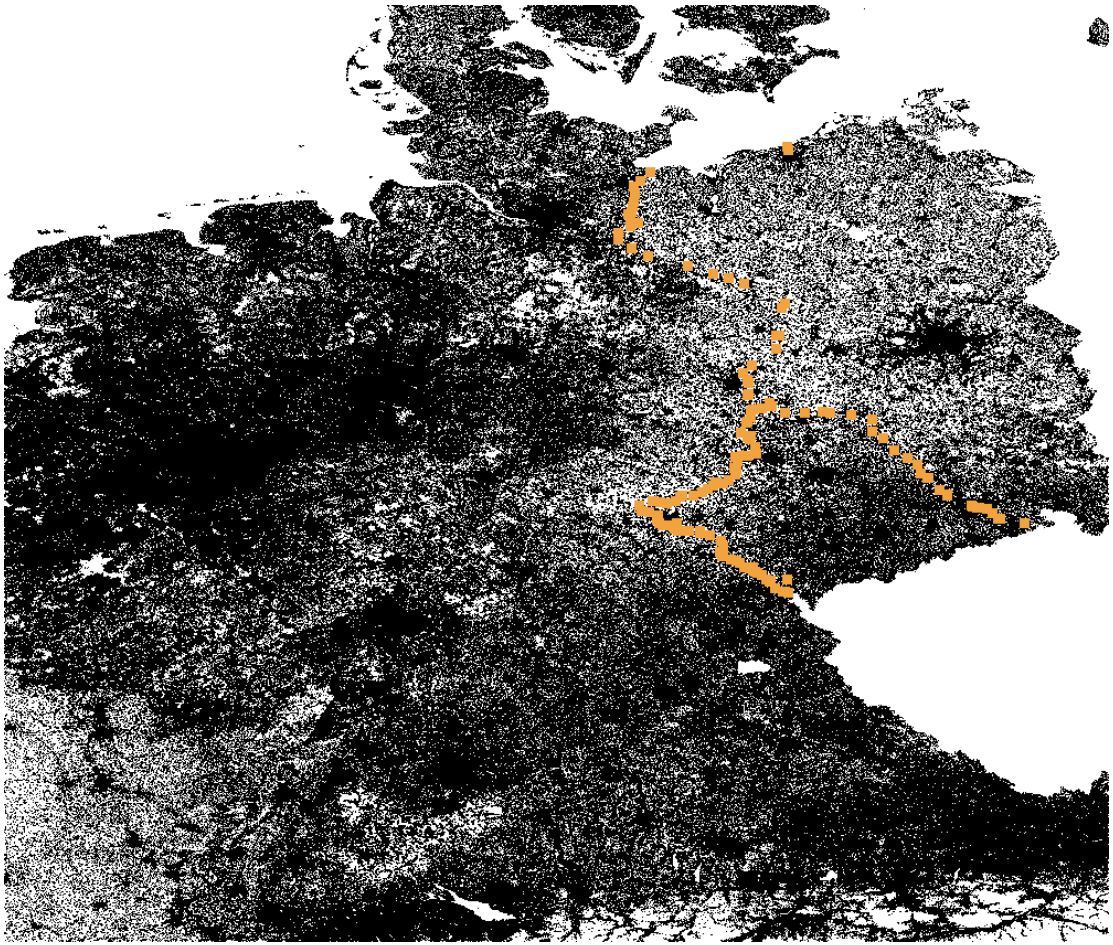
- orange Knoten sind in einem Bag
- Beispiel ist ein Pfad im Treebackbone von 6 Bags

# Straßengraph



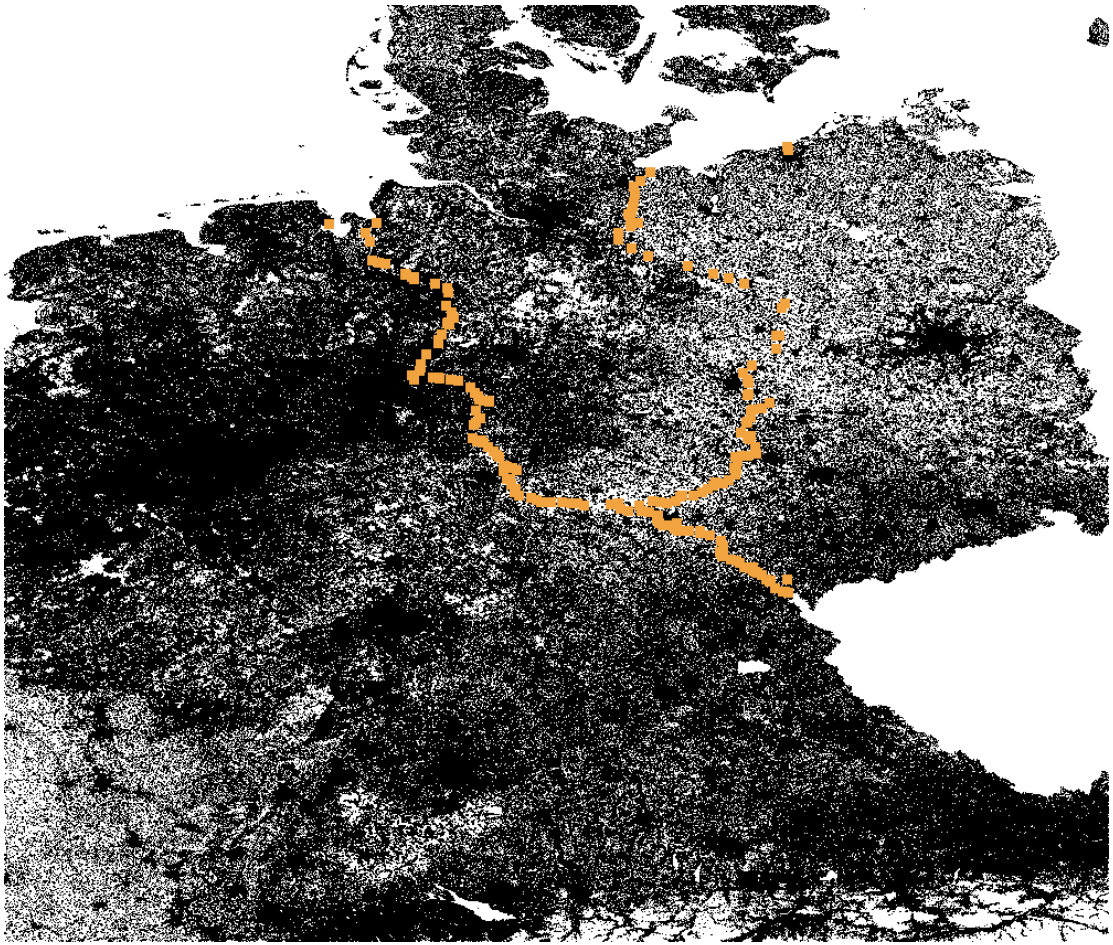
- orange Knoten sind in einem Bag
- Beispiel ist ein Pfad im Treebackbone von 6 Bags

# Straßengraph



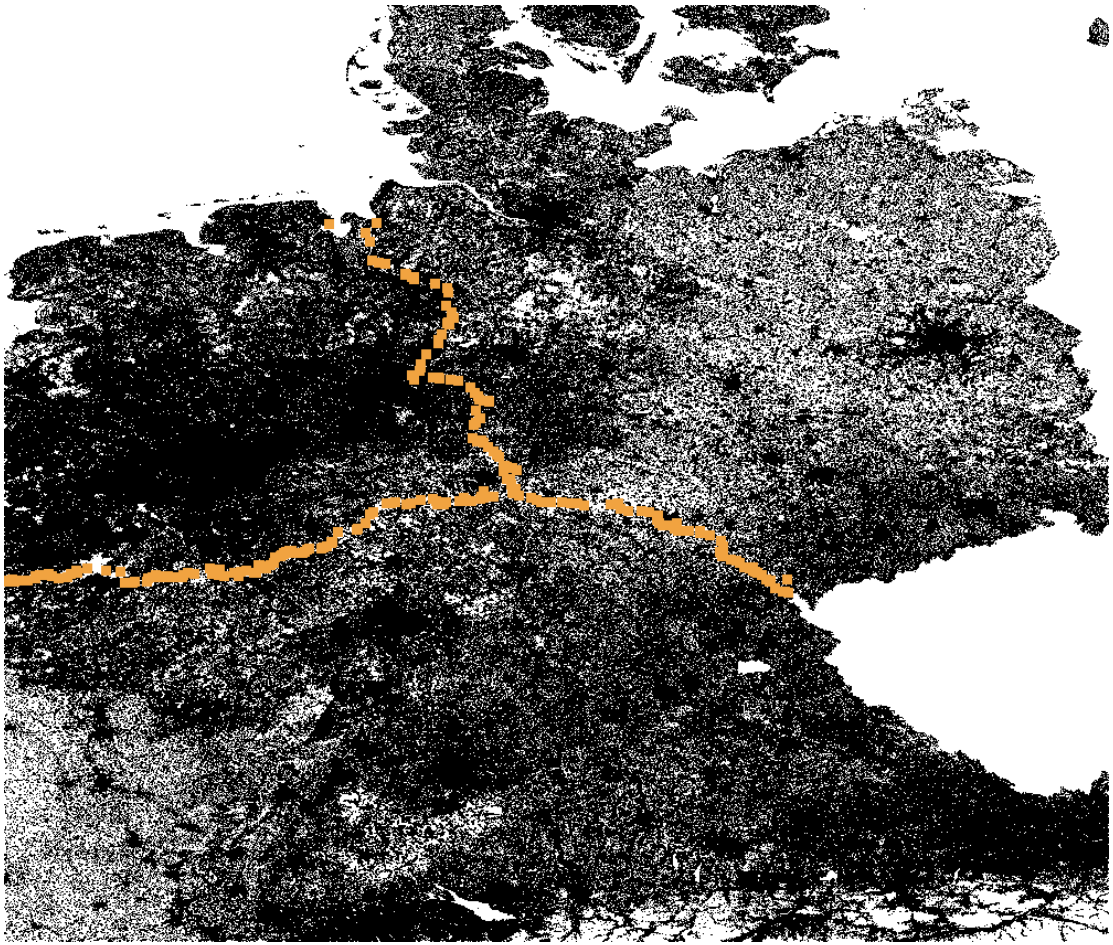
- orange Knoten sind in einem Bag
- Beispiel ist ein Pfad im Treebackbone von 6 Bags

# Straßengraph



- orange Knoten sind in einem Bag
- Beispiel ist ein Pfad im Treebackbone von 6 Bags

# Straßengraph



- orange Knoten sind in einem Bag
- Beispiel ist ein Pfad im Treebackbone von 6 Bags



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

# Baumbreite Schranken

| Graph | Upper Treewidth Bound |
|---|---|
| DIMACS Colorado | 87 |
| DIMACS Kalifornien & Nevada | 127 |
| DIMACS Europa | 449 |
| DIMACS USA | 311 |
| OSM London | 84 |
| OSM Baden-Württemberg | 107 |
| OSM Deutschland | 220 |

# Vertex-Cover

**Eingabe:**

- einfacher Graph mit Knoten und Kanten
- ungerichtet und ungewichtet

**Ausgabe:**

- Knotenmenge $C$
- Für jede Kante $\{x, y\}$ muss $x \in C$ oder $y \in C$ oder beide sein

**Zielfunktion:**

- $C$ soll möglichst klein sein

# Vertex-Cover

**Eingenschaften:**

- klassisches NP-schweres Problem
- ist FPT in der Baumbreite
- Laufzeit $2^{tw} \cdot m$
- **Achtung:** Die Baumbreite von Straßengraphen ist zu groß für FPT Algorithmen

# Idee

- Schritt 1: Find Baumzerlegung
- Schritt 2: Wähle irgendeinen Knoten als Wurzel aus

**Idee:**

- Speichere für jeden Bag $b$ eine Tabelle mit $2^{|b|}$ Zeilen
- Tabelle enthält Zeile für jede Auswahl an Knoten aus $b$
- Jede Zeile enthält für jeden Knoten $x$ aus $b$ ein Bit ob $x \in C$
- Jede Zeile enthält Größe eines kleinsten Vertex-Covers
  - Nicht der ganze Graph wird überdeckt
  - Nur durch von Knoten im Teilbaum von $b$ induzierter Subgraph überdeckt
  - Zellensichtweise: Graph induziert durch innere und Randknoten überdeckt
- Falls nicht möglich, dann Größe $\infty$

# Beispiel

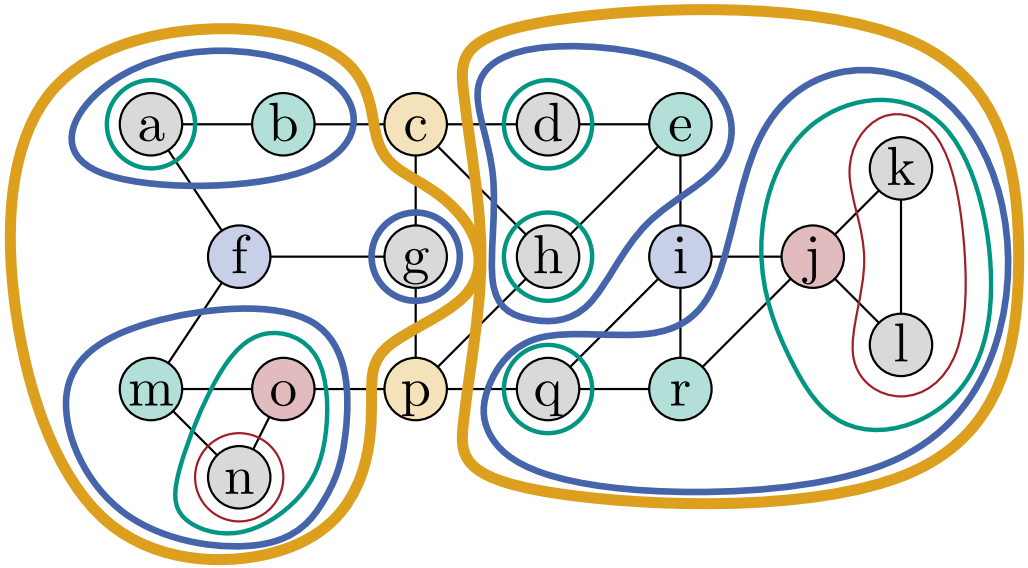



Tabelle für Bag $\{f, p, c\}$

| $f \in C$ | $p \in C$ | $c \in C$ | Größe | $C$ (nicht gespeichert) |
|---|---|---|---|---|
| ○ | ○ | ○ | 4 | $a, b, g, o$ |
| ○ | ○ | ● | 3 | $c, a, o$ |
| ○ | ● | ○ | 3 | $p, m, b$ |
| ○ | ● | ● | 4 | $p, c, a, m$ |
| | | | ... | |



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

# Beispiel

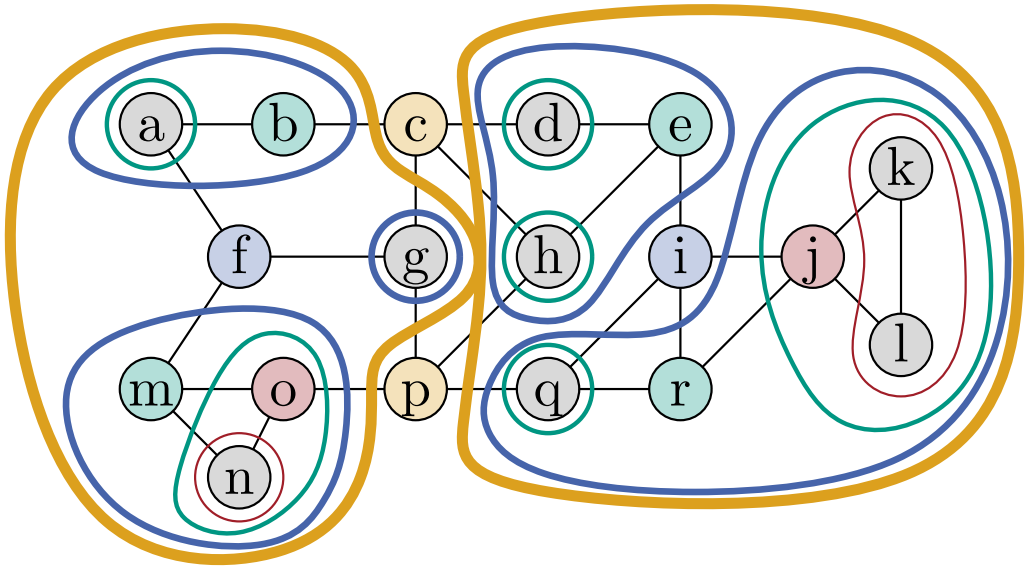



Tabelle für Bag $\{f, p, c\}$

| $f \in C$ | $p \in C$ | $c \in C$ | Größe | $C$ (nicht gespeichert) |
|---|---|---|---|---|
| | | | ... | |
| ● | ○ | ○ | 4 | $f$, $b$, $o$, $g$ |
| ● | ○ | ● | 3 | $f$, $c$, $o$ |
| ● | ● | ○ | 4 | $f$, $p$, $n$, $b$ |
| ● | ● | ● | 4 | $f$, $p$, $c$, $n$ |

# Algorithmus

- Bottom-Up
- Berechne erst die Tabellen der Blätter
- Dann die Zwischenknoten
- Schlussendlich die Tabelle der Wurzel

- Tabellen der Blätter werden mit durchprobieren berechnet
- Andere Bags verwenden Tabellen ihrer Kinder
- Kleinste Größe in Tabelle der Wurzel ist Endergebniss

# Literatur I


Hans L. Bodlaender.

A tourist guide through treewidth.

*Acta Cybernetica*, 11:1–21, 1993.

Hans L. Bodlaender.

Treewidth: Structure and algorithms.

In *Proceedings of the 14th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, volume 4474 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 11–25. Springer, 2007.

Jean Blair and Barry Peyton.

An introduction to chordal graphs and clique trees.

In *Graph Theory and Sparse Matrix Computation*, volume 56 of *The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, pages 1–29. Springer, 1993.