Algorithmen für Routenplanung

4. Vorlesung, Sommersemester 2017

Moritz Baum | 15. Mai 2017

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · ALGORITHMIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Kürzeste Wege in Straßennetzwerken

Beschleunigungstechniken

- Arc-Flags
- SHARC

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Ideensammlung

Wie Suche zielgerichtet machen?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Ideensammlung

Wie Suche zielgerichtet machen?

- Reihenfolge in der Knoten besucht werden ändern
- Nichtbeachten von Kanten oder Knoten die in die “falsche” Richtung führen

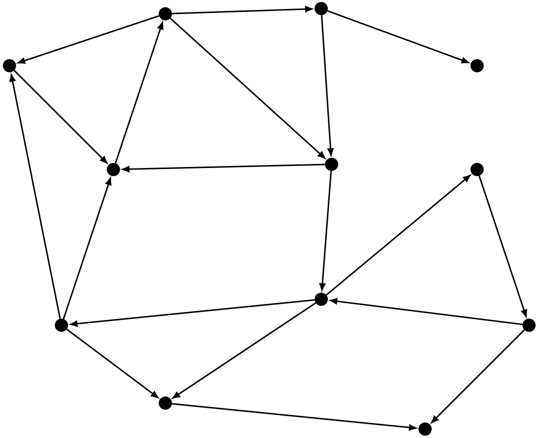
Jetzt: letzteres

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Arc-Flags

Arc-Flags: Idee

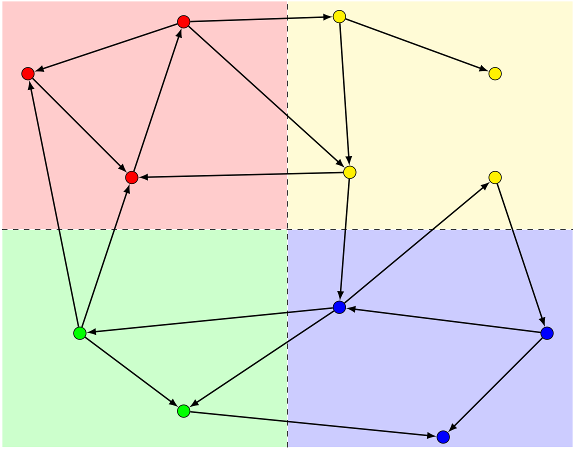
- partitioniere Graphen in k Zellen
- hänge Label mit k Bits an jede Kante
- gibt an, ob Kante e für Ziele in Zelle T benötigt wird



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Arc-Flags: Idee

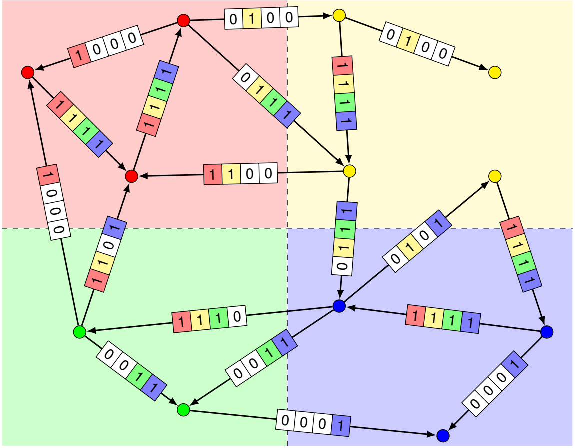
- partitioniere Graphen in *k* Zellen
- hänge Label mit *k* Bits an jede Kante
- gibt an, ob Kante *e* für Ziele in Zelle *T* benötigt wird



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Arc-Flags: Idee

- partitioniere Graphen in k Zellen
- hänge Label mit k Bits an jede Kante
- gibt an, ob Kante e für Ziele in Zelle T benötigt wird



Anfragen

$\textsc{Arc-Flag-Dijkstra}(G = (V, E), s, t, \text{Arc-Flags AF}_{\cdot}(\cdot))$

$d[s] = 0$
$Q.clear(),\ Q.add(s, 0)$

while $!Q.empty()$ **do**
  $u \leftarrow Q.deleteMin()$

  forall the *edges* $e = (u, v) \in E$ **do**
    if $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$ *and* $\text{AF}_T(e) = \mathit{true}$ **then**
      $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$
      if $v \in Q$ **then** $Q.decreaseKey(v, d[v])$
      else $Q.insert(v, d[v])$

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Arc-Flags Vorberechnung

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Vorberechnung

Zwei Schritte:

- Partitionierung
- setze korrekte Flaggen

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Vorberechnung

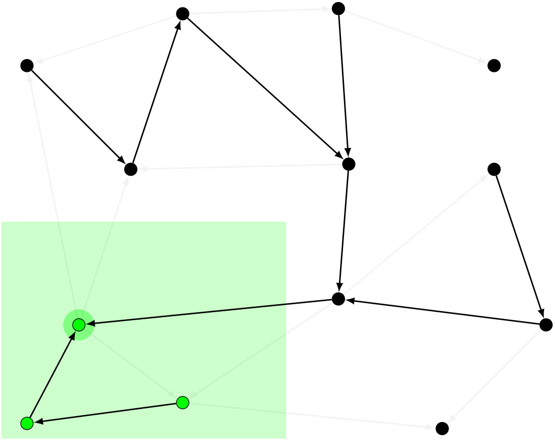
Zwei Schritte:

- Partitionierung
- setze korrekte Flaggen

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

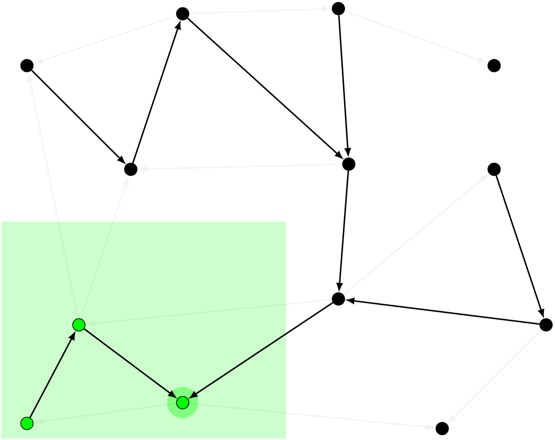
Flaggenberechnung – Naiv

- von jedem Knoten: konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- Berechnung mit all-pairs shortest paths (APSP)



Flaggenberechnung – Naiv

- von jedem Knoten: konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- Berechnung mit all-pairs shortest paths (APSP)

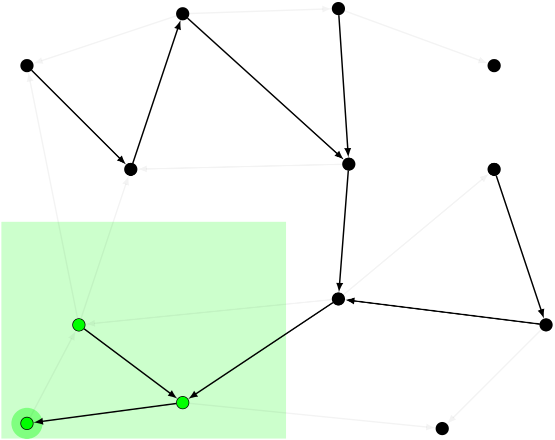


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Flaggenberechnung – Naiv

KIT Karlsruher Institut für Technologie

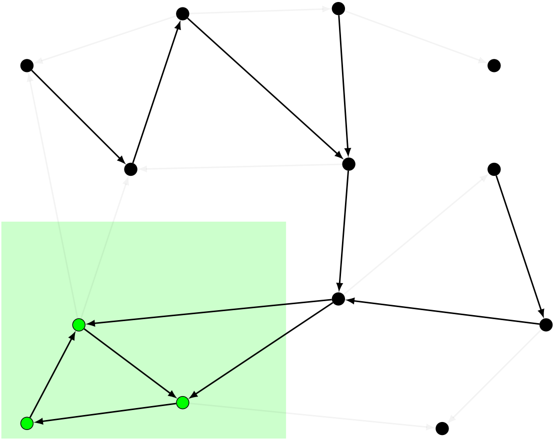
- von jedem Knoten: konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- Berechnung mit all-pairs shortest paths (APSP)



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Flaggenberechnung – Naiv

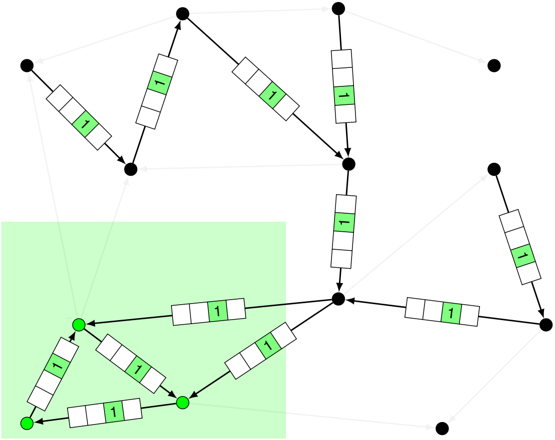
- von jedem Knoten: konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- Berechnung mit all-pairs shortest paths (APSP)



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Flaggenberechnung – Naiv

- von jedem Knoten: konstruiere Rückwärts KW-Baum
- setze Flagge der Region der Wurzel für jede Baumkante
- Berechnung mit all-pairs shortest paths (APSP)



Flaggenberechnung – Randknoten

Beobachtung: Man muss durch Randknoten in die Zelle

Flaggenberechnung – Randknoten

Beobachtung: Man muss durch Randknoten in die Zelle

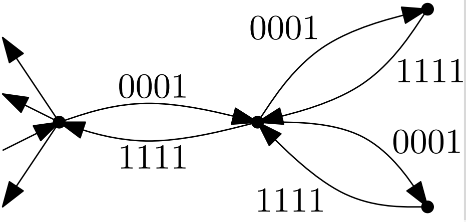
- setze Intra-Zellen Kanten auf `true`
- einen Rückwärts Dijkstra-Baum pro Randknoten b
- setze Flagge $AF_{region(b)}(e) = \texttt{true}$ wenn e Baumkante des Baums von b ist

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Flaggenberechnung: Angehängte Bäume

Beobachtung:

- Für manche Kanten kann man die Flaggen automatisch setzen



Angehangene Bäume:

- Kanten zur Wurzel hin haben alle Flaggen gesetzt
- Kanten von Wurzel weg haben nur eine Flagge gesetzt
- Also: Entferne Bäume vor Arcs-Flag-Berechnung aus Graph
- Knotenzahl verringert sich um ein Drittel

Anmerkung: Alle Knoten eines angehangenen Baumes müssen zur gleichen Zelle wie dessen Wurzel gehören.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Übersicht Vorberechungsarten

In aufsteigender Güte:

- Kürzeste-Wege-Baum von jedem Knoten
- Kürzeste-Wege-Baum von jedem Randknoten
- „Zentralisierte Bäume“
  (nicht Stoff der Vorlesung, ca. Faktor 4 schneller)
- Beschleunigte KW-Baum-Berechnung
  (PHAST, kommt in späterer VL)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Vorberechnung

Karlsruher Institut für Technologie

Zwei Schritte:

- Partitionierung
- setze korrekte Flaggen

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Vorberechnung

Zwei Schritte:

- Partitionierung
- setze korrekte Flaggen

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Partitionierung

Karlsruher Institut für Technologie

Wie sollte der Graph partitioniert werden?

- Arc-Flags Algorithmus ist korrekt für beliebige Partition.
- wie sieht eine “gute” Partition aus?
- Ziel: Möglichst schnelle Anfragen.
- formal?

Definiere ein Maß, um die Güte einer Partition zu bewerten.

Annahmen:

- Kanten sind kürzeste Wege zwischen ihren Endknoten.
- kürzeste Wege sind eindeutig.

Damit bestimmt die Partition eindeutig, welche Flags gesetzt werden.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Optimierungsproblem

Karlsruher Institut für Technologie

Definition (Suchraumgröße)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Gewichtsfunktion $\text{len}\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathcal{C}$ eine Partition von G, und $s, t \in V$ zwei Knoten. Dann ist

- $S(s, t) :=$ Anzahl abgearbeiteter Knoten einer s-t-Anfrage, mit Arc-Flags induziert durch die Partition $\mathcal{C}$.
- $S_{\max} := \max_{s,t \in V} S(s, t)$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Optimierungsproblem

Definition (Suchraumgröße)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Gewichtsfunktion $\text{len}\colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathcal{C}$ eine Partition von G, und $s, t \in V$ zwei Knoten. Dann ist

- $\mathrm{S}(s, t) :=$ Anzahl abgearbeiteter Knoten einer s-t-Anfrage, mit Arc-Flags induziert durch die Partition $\mathcal{C}$.
- $\mathrm{S}_{\max} := \max_{s,t \in V} \mathrm{S}(s, t)$.

MinWorstCasePartition

Gegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$, natürliche Zahl k.
Gesucht: Partition $\mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| \leq k$, so dass $\mathrm{S}_{\max}$ minimiert wird.

Anmerkung:
Ohne festen Parameter k ist die optimale Lösung immer eine Partition $\mathcal{C} = \{\{v\} \mid v \in V\}$ — dies führt aber zu Speicherverbrauch $\mathcal{O}(nm)$.

Eigenschaften von S_{max}

Für Graph $G = (V, E)$, Gewichtsfunktion len, Partition $\mathcal{C}$ von G:

Lemma

Für jedes $s \in V$, $T \in \mathcal{C}$ gibt einen Knoten $t \in V$, so dass eine s-t-Anfrage alle (erreichbaren) Knoten aus T abarbeitet (auch bei aktiviertem Stoppkriterium).

Beweis:
Annahme: Eindeutiges tie breaking für priority queue

- für festes s werden alle Knoten aus T in einer festen Reihenfolge abgearbeitet
- setze $t :=$ letzter Knoten in dieser Reihenfolge

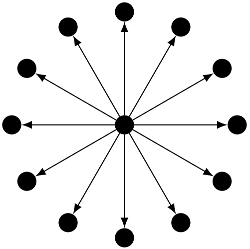
$S_{\max}$ für Sterne

Erster Schritt: Sterne, Kanten von der Wurzel weggerichtet.

Wie groß ist $S_{\max} := \max_{s,t \in V}$ (für beliebige Partition)?

Fallunterscheidung:

1. Knoten s ist Blatt: $S(s,t) = 1$ für beliebige t.
2. Knoten s ist die Wurzel: für jede Zelle T gibt es eine s-t-Query, so dass alle Knoten aus T abgearbeitet werden.



$\Rightarrow$ $S_{\max} = 1 + \max_{T \in \mathcal{C}} |T \setminus \{r\}|$ (für Stern mit Wurzel r).
$\Rightarrow$ Minimal wenn Blätter gleichmäßig auf Zellen der Partition verteilt.

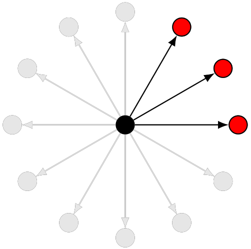
$\mathrm{S}_{\max}$ für Sterne

Erster Schritt: Sterne, Kanten von der Wurzel weggerichtet.

Wie groß ist $\mathrm{S}_{\max} := \max_{s,t \in V}$ (für beliebige Partition)?

Fallunterscheidung:

1. Knoten s ist Blatt: $S(s,t) = 1$ für beliebige t.
2. Knoten s ist die Wurzel: für jede Zelle T gibt es eine s-t-Query, so dass alle Knoten aus T abgearbeitet werden.



$\Rightarrow$ $\mathrm{S}_{\max} = 1 + \max_{T \in \mathcal{C}} |T \setminus \{r\}|$ (für Stern mit Wurzel r).
$\Rightarrow$ Minimal wenn Blätter gleichmäßig auf Zellen der Partition verteilt.

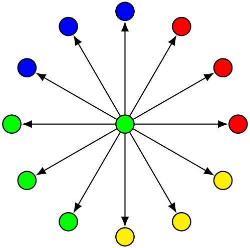
$S_{\max}$ für Sterne

Erster Schritt: Sterne, Kanten von der Wurzel weggerichtet.

Wie groß ist $S_{\max} := \max_{s,t \in V}$ (für beliebige Partition)?

Fallunterscheidung:

1. Knoten s ist Blatt: $S(s,t) = 1$ für beliebige t.
2. Knoten s ist die Wurzel: für jede Zelle T gibt es eine s-t-Query, so dass alle Knoten aus T abgearbeitet werden.



$\Rightarrow$ $S_{\max} = 1 + \max_{T \in \mathcal{C}} |T \setminus \{r\}|$ (für Stern mit Wurzel r).
$\Rightarrow$ Minimal wenn Blätter gleichmäßig auf Zellen der Partition verteilt.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bäume mit Höhe 2

Satz

MinWorstCasePartition ist $\mathcal{NP}$-schwer für gerichtete Bäume mit Höhe 2, sogar wenn alle Kanten Einheitsgewicht haben.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Bäume mit Höhe 2

Satz

MinWorstCasePartition ist $\mathcal{NP}$-schwer für gerichtete Bäume mit Höhe 2, sogar wenn alle Kanten Einheitsgewicht haben.

Betrachte Entscheidungsproblem:

MinWorstCasePartition-Dec

Gegeben: Graph $G = (V, E, \text{len})$, natürliche Zahlen k, S^*.
Gesucht: Existiert $\mathcal{C}$, $|\mathcal{C}| \leq k$, so dass $\mathrm{S}_{\max} \leq S^*$?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beweis

Reduktion vom $\mathcal{NP}$-schweren Entscheidungsproblem 3-PARTITION.

3-PARTITION

Gegeben:

- Menge $S = \{s_1, \dots, s_{3m}\}$,
- natürliche Zahl B,
- Gewichtsfunktion $\omega\colon S \to \{1, \dots, B\}$, so dass $\sum_{i=1}^{3m} \omega(s_i) = mB$.

Gesucht: Kann S in m Mengen S_i partitioniert werden, so dass $|S_i| = 3$ für alle i und $\sum_{s \in S_i} \omega(s) = B$?

Sogar $\mathcal{NP}$-schwer, wenn $\frac{B}{4} < \omega(s_i) < \frac{B}{2}$ für alle s_i.

Beispielinstanz:
$m = 2$, $|S| = 6$, $B = 11$ und Gewichte 3, 3, 3, 4, 4, 5.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beweis

Karlsruher Institut für Technologie

Reduktion vom $\mathcal{NP}$-schweren Entscheidungsproblem 3-PARTITION.

3-PARTITION

Gegeben:

- Menge $S = \{s_1, \ldots, s_{3m}\}$,
- natürliche Zahl B,
- Gewichtsfunktion $\omega\colon S \to \{1, \ldots, B\}$, so dass $\sum_{i=1}^{3m} \omega(s_i) = mB$.

Gesucht: Kann S in m Mengen S_i partitioniert werden, so dass $|S_i| = 3$ für alle i und $\sum_{s \in S_i} \omega(s) = B$?

Sogar $\mathcal{NP}$-schwer, wenn $\frac{B}{4} < \omega(s_i) < \frac{B}{2}$ für alle s_i.

Beispielinstanz:
$m = 2$, $|S| = 6$, $B = 11$ und Gewichte 3, 3, 3, 4, 4, 5.

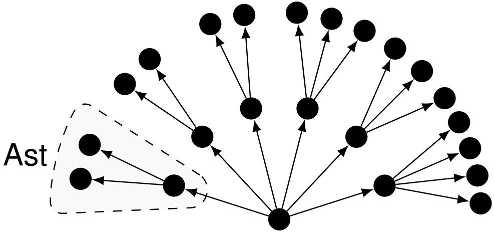
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beweis

Reduktion: Erzeuge Baum mit

- Wurzel r,
- einem Mittelknoten pro Element s_i aus S,
- an jedem Mittelknoten jeweils $\omega(s_i) - 1$ Blätter.

Beispielinstanz: $m = 2$, $|S| = 6$, $B = 11$ und Gewichte 3, 3, 3, 4, 4, 5.



Behauptung: (S, B) ist erfüllbare 3-Partition-Instanz genau dann, wenn $S_{\max} \leq B + 1$ für Partitionen mit m Zellen.

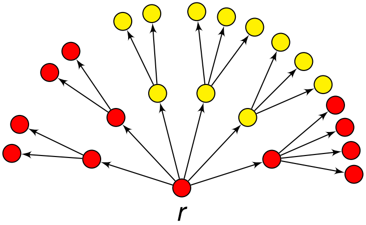
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Beweis

⇒) (S, B) **erfüllbar.**

Zu zeigen: $\mathrm{S}_{\max} \leq B + 1$.

- Weise jeder Zelle drei *Äste* zu, die einem Tripel der Lösung entsprechen.
- Im Beispiel: $\{3, 3, 5\}, \{3, 4, 4\}$.



Queries mit Startknoten $s \neq r : S(s, t) < \frac{B}{2}$.

Queries mit Startknoten r : Nur r selbst und Knoten innerhalb der Zielzelle werden abgearbeitet.

$\Rightarrow \mathrm{S}_{\max} \leq B + 1$.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

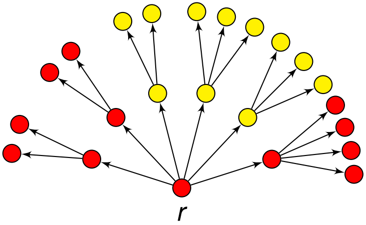
Beweis

$\Leftarrow$) **Es gilt** $\mathrm{S}_{\max} \leq B + 1$.

Zu zeigen: (S, B) erfüllbar.

Wir erhalten eine Lösung für 3-PARTITION, falls ...

- jede Zelle genau B Astknoten enthält.
- jeder Ast genau einer Zelle zugeordnet ist.



Pro Zelle T gibt es eine Query von r, die T komplett abarbeitet.
$\Rightarrow$ Wegen $\mathrm{S}_{\max} \leq B + 1$ enthält keine Zelle mehr als B Astknoten.

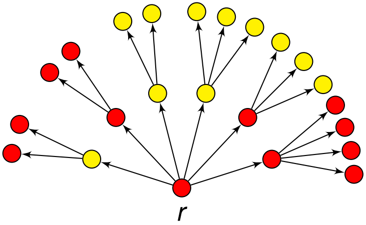
Beweis

$\Leftarrow$) **Es gilt** $\mathrm{S}_{\max} \leq B + 1$**.**

Zu zeigen: (S, B) erfüllbar.

Wir erhalten eine Lösung für 3-PARTITION, falls ...

- jede Zelle genau B Astknoten enthält.
- jeder Ast genau einer Zelle zugeordnet ist.

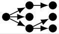
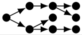


Annahme: ein Ast enthält Knoten aus verschiedenen Zellen.
$\Rightarrow$ $\exists$ Blatt, dessen Zelle T nicht der Zelle des Mittelknoten entspricht.
$\Rightarrow$ Worst-Case Query nach T arbeitet diesen Mittelknoten ab.
$\Rightarrow$ $\mathrm{S}_{\max} > B + 1$. ↯ $\square$

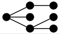
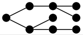
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Übersicht: Worst-Case

Gerichtet:

Sterne		$\mathcal{O}(n)$
Bäume ($h \leq 2$)		$\mathcal{NP}$-schwer
Pfade		$\mathcal{O}(n)$
Bäume ($\Delta \leq 3$)		$\mathcal{NP}$-schwer
Kreise		$\mathcal{O}(n)$

Ungerichtet:

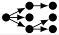
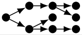
Sterne		$\mathcal{O}(n)$
Bäume ($h \leq 2$)		$\mathcal{NP}$-schwer
Pfade		$\mathcal{O}(n)$
Bäume ($\Delta \leq 3$)		$\mathcal{NP}$-schwer
Kreise		?

- Ähnliche Resultate für andere Graphklassen (beschränkter Grad, ungerichtet).
- Beweisideen in den meisten Fällen ähnlich.
- Problem MinWorstCasePartition ist selbst für stark eingeschränkte Graphklassen $\mathcal{NP}$-schwer.

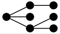
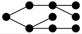
Übersicht: Average-Case

Alternativ: Minimiere erwarteten Suchraum $\mathrm{S}_{\mathrm{avg}} := \sum_{s,t \in V} \mathrm{S}(s,t)/n^2$.

Gerichtet:

Sterne		$\mathcal{O}(n)$
Bäume ($h \leq 2$)		$\mathcal{NP}$-schwer
Pfade		$\mathcal{O}(n)$
Bäume ($\Delta \leq 3$)		?
Kreise		$\mathcal{O}(n)$

Ungerichtet:

Sterne		$\mathcal{O}(n)$
Bäume ($h \leq 2$)		$\mathcal{NP}$-schwer
Pfade		$\mathcal{O}(n)$
Bäume ($\Delta \leq 3$)		?
Kreise		?

- Beweise analog zum Worst Case.
- Auch hier Schwereresultate für stark eingeschränkte Graphen.

$\Rightarrow$ Verwende Heuristiken.

Anmerkung:
Für viele Beschleunigungstechniken, die in der Vorlesung behandelt werden, gibt es vergleichbare Schwereresultate.

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Heuristiken

Anforderungen:

- balanciert

mögliche Partitionen:

- Gitter
- Quad-Baum
  - iterativ in 4 Zellen unterteilen
- kd-Baum
  - Verallgemeinerung von Quad-Baum

weitere Anforderungen?

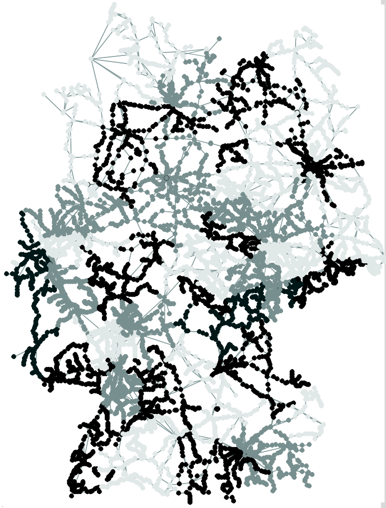
Heuristiken

Anforderungen:

- ausbalanciert
- wenige Randknoten
- zusammenhängend

Black-Box Partitionierer (METIS, ...):

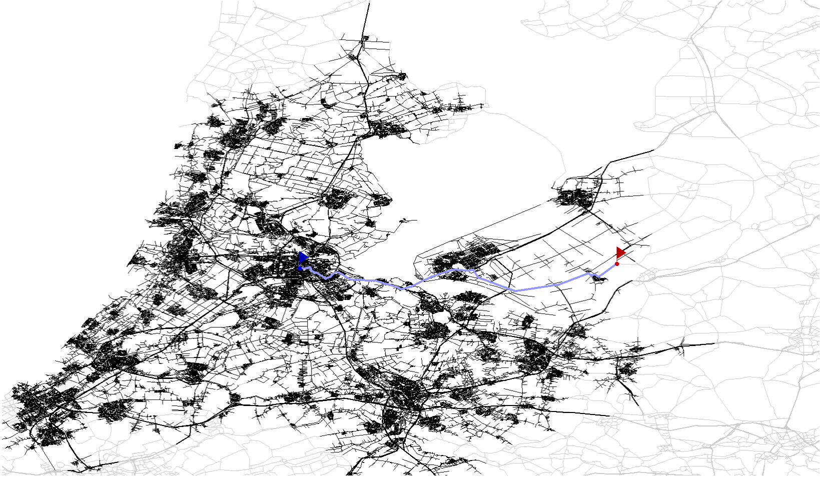
- benutzen keine Einbettung
- oft: teilen rekursiv Graphen in k Teile mit kleinem Schnitt
- bringen gute Lösungen für Arc-Flags



Arc-Flags Eigenschaften

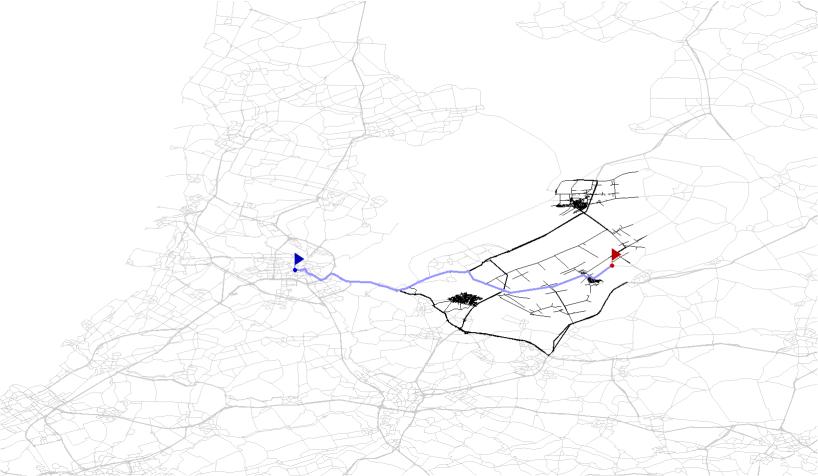
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Suchraum – Dijkstra



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Suchraum – Arc-Flags



Korrektheit

Korrektheit

`ArcFlagsDijsktra` ist korrekt

zu zeigen: für jeden kürzesten s-t-Weg $P = (s = u_1, \ldots, u_k = t)$ haben alle Kanten (u_i, u_{i+1}) die Flagge $AF_T(u_i, u_{i+1})$ gesetzt.

- für alle (u_i, u_{i+1}) in T trivial
- sei u_j der letzte Knoten auf P in T
- u_j also Randknoten und somit Rückwärtsbaum gebaut von u_j
- $P' = (u_1, \ldots, u_j)$ ist Subpfad von P und somit ein kürzester Weg von u_1 nach u_j
- somit Baumkanten mit gesetzten Flaggen

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Diskussion

Vorteile:

- einfacher Anfrage Algorithmus
- leicht on-top auf bestehende Systeme zu setzen
- ausreichende Beschleunigung

Nachteile:

- hohe Vorberechnungsdauer
- weitere?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Coning-Effekt

Beobachtung:

- lange Zeit nur eine Kante wichtig
- daher nur ein Knoten in der Queue
- aber: je näher an der Zelle, desto mehr Kanten werden wichtig
- Suche fächert sich auf
- in Zelle werden dann alle Kanten relaxiert

Zwei Ansätze:

- bidirektionale Flags
- multi-level Flags

Bidirektionale Arc-Flags

Karlsruher Institut für Technologie

Vorberechung:

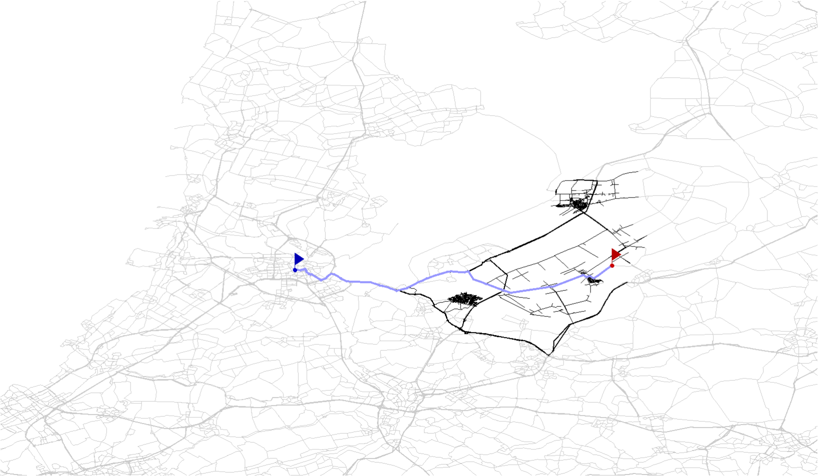
- Vorwärts- und Rückwärtsflaggen
- Rückwärtsflaggen analog für eingehende Kanten berechnet
- Vorberechungszeit in gerichteten Graphen: Faktor 2

Anfrage:

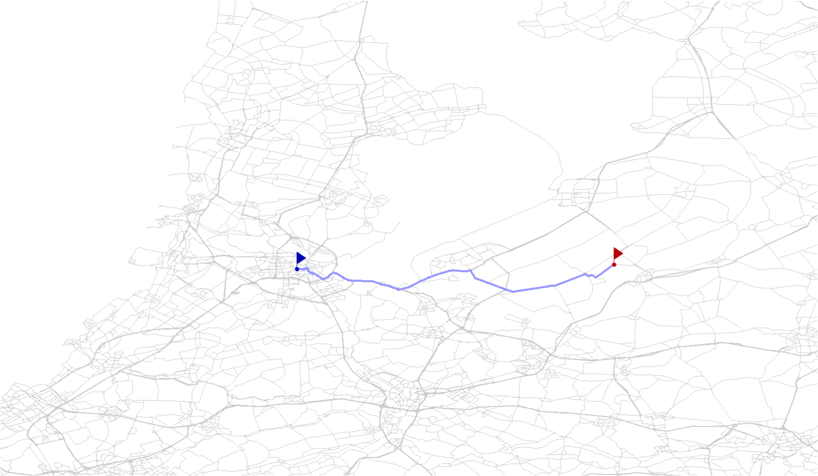
- bidirektional:
  - Vorwärtssuche relaxiert nur Kanten mit Flagge für T
  - Rückwärtssuche nur Kanten mit Flaggen für S
- normales Stopp-Kriterium von bidirektionalem Dijkstra

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Suchraum – Arc-Flags



Suchraum – Bidirektionale Arc-Flags



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Multi-Level Arc-Flags

Problem:

- Anfragen in einer Zelle ohne Beschleunigung
- viele Real-Welt Anfragen sind lokal

Multi-Level Arc-Flags:

- Multi-Level Partition
- berechne partielle Flaggen

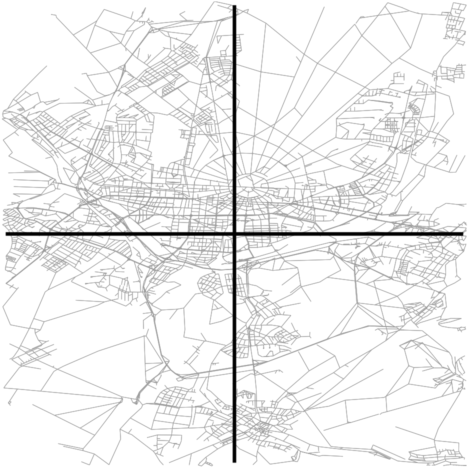
Multi-Level Arc-Flags

Problem:

- Anfragen in einer Zelle ohne Beschleunigung
- viele Real-Welt Anfragen sind lokal

Multi-Level Arc-Flags:

- Multi-Level Partition
- berechne partielle Flaggen



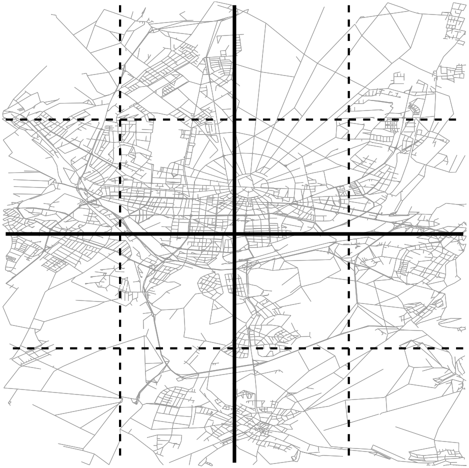
Multi-Level Arc-Flags

Problem:

- Anfragen in einer Zelle ohne Beschleunigung
- viele Real-Welt Anfragen sind lokal

Multi-Level Arc-Flags:

- Multi-Level Partition
- berechne partielle Flaggen



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

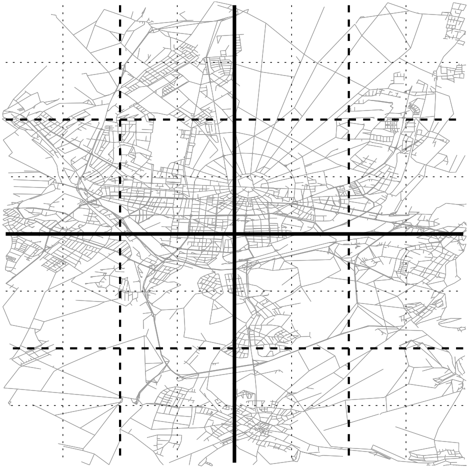
Multi-Level Arc-Flags

Problem:

- Anfragen in einer Zelle ohne Beschleunigung
- viele Real-Welt Anfragen sind lokal

Multi-Level Arc-Flags:

- Multi-Level Partition
- berechne partielle Flaggen

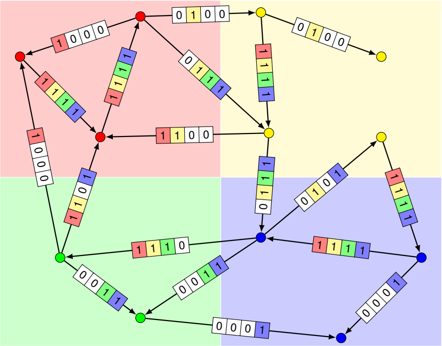


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

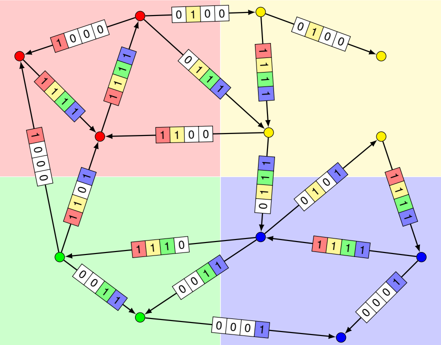
- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



Idee:

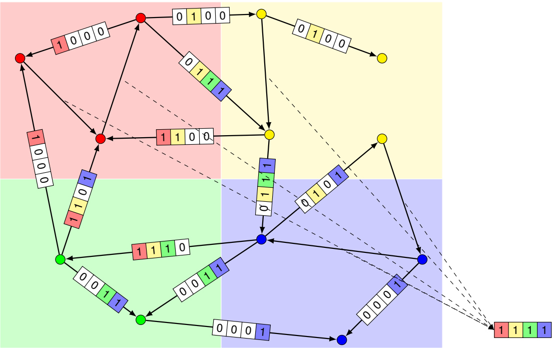
- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



Idee:

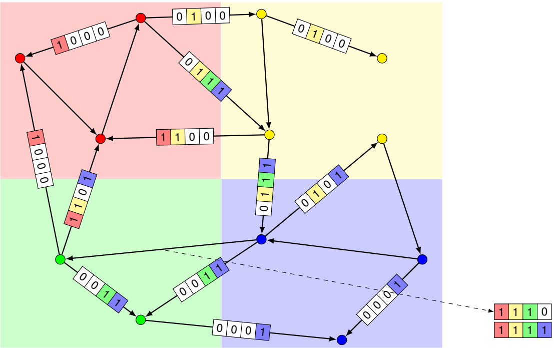
- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



Idee:

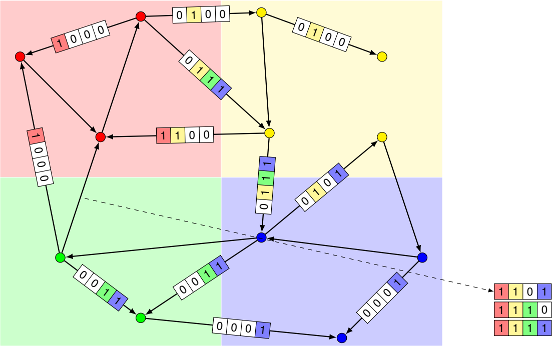
- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



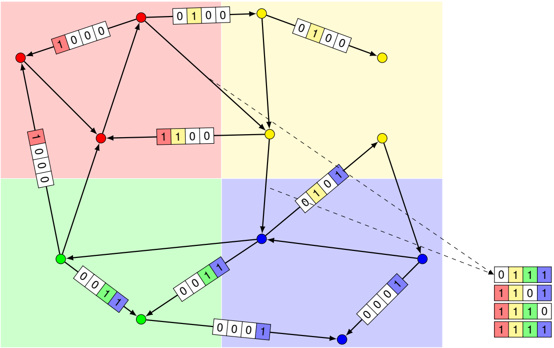
Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



Idee:

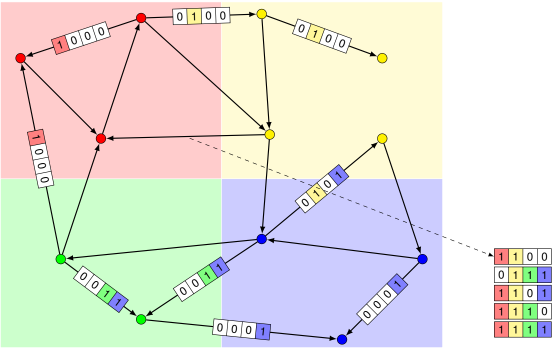
- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



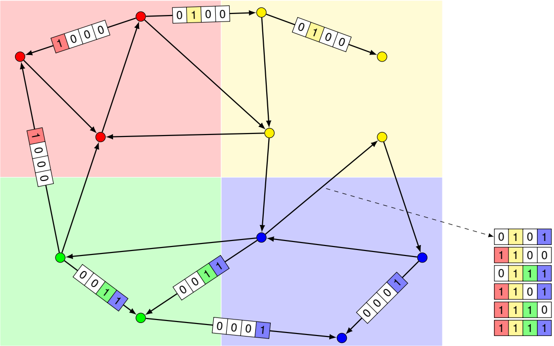
Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



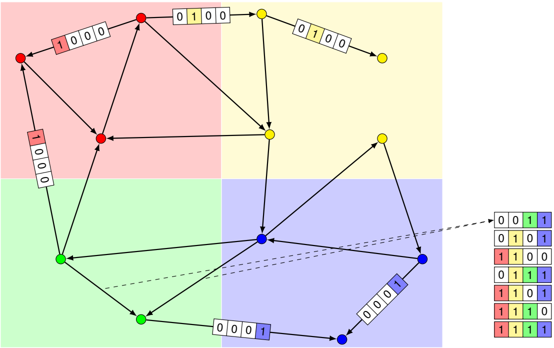
Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



Idee:

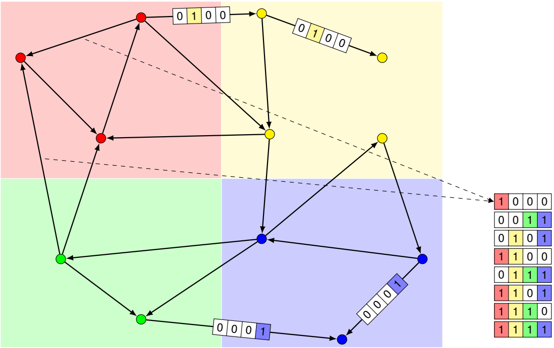
- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



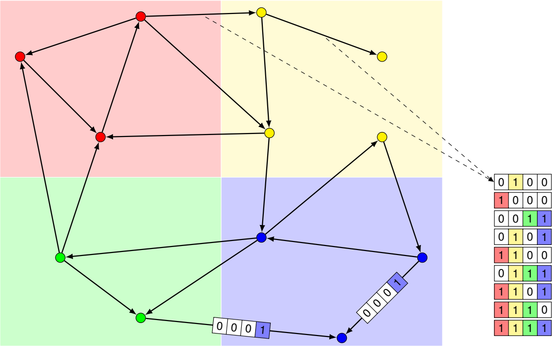
Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



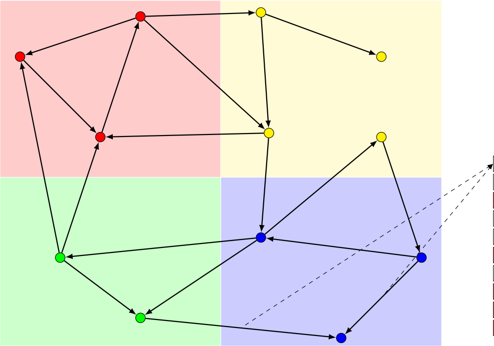
Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Idee:

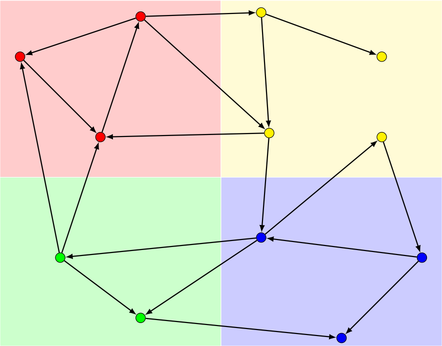
- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Datenstruktur

Effizient Flaggen speichern?

- pro Kante eine Flagge
- Beobachtung: Anzahl Kombinationen begrenzt



0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

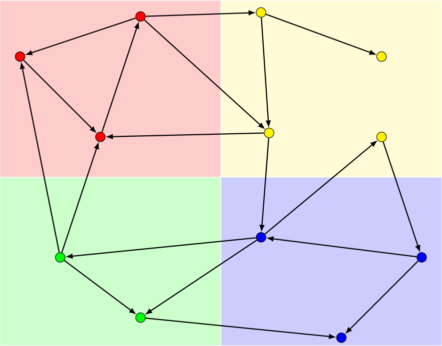
Idee:

- speichere Flaggen in Matrix
- Zeiger von Kanten auf die Matrix
- verringert Speicherverbrauch um einen Faktor 5

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

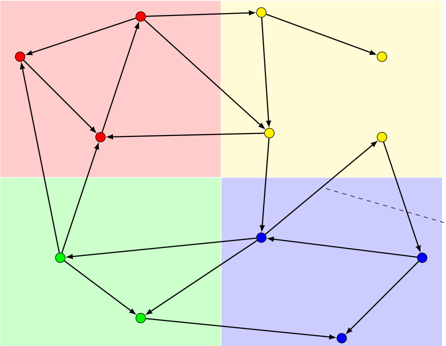
Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
1	1	0	0
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	1	1

Idee:

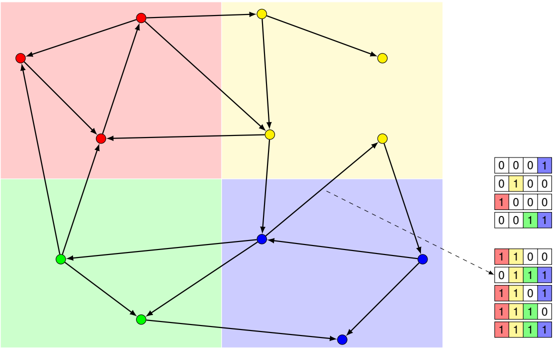
- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



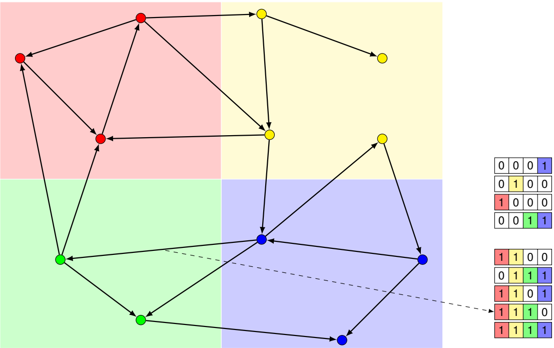
Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



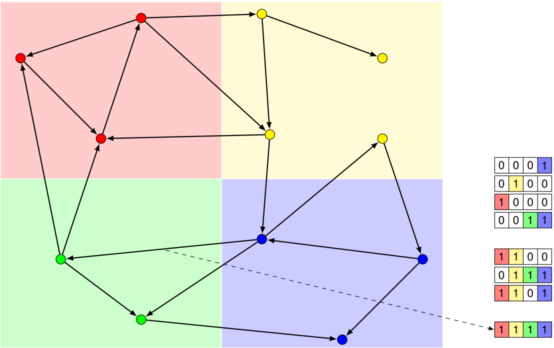
Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



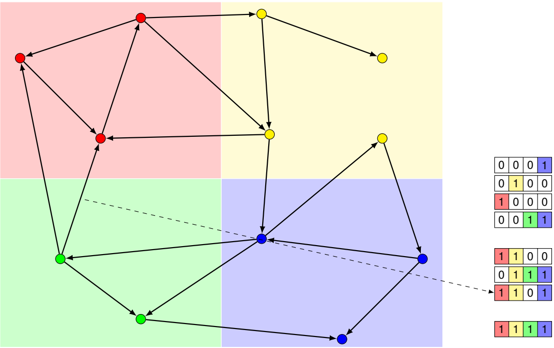
Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



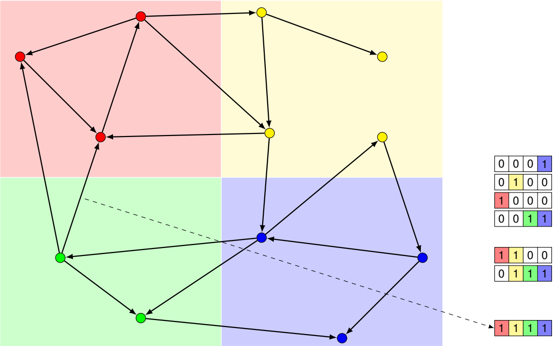
Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



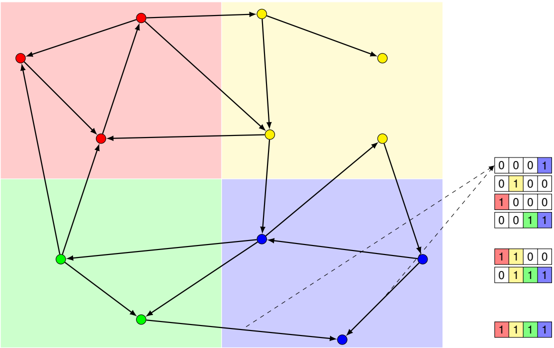
Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)

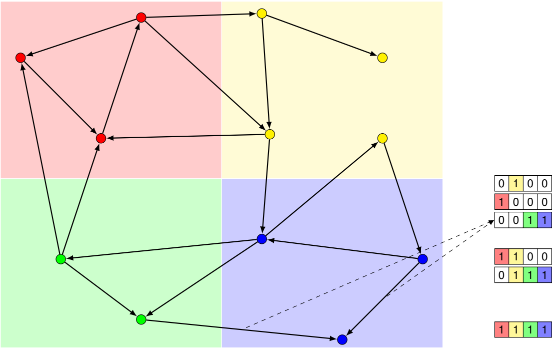


Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



Idee:

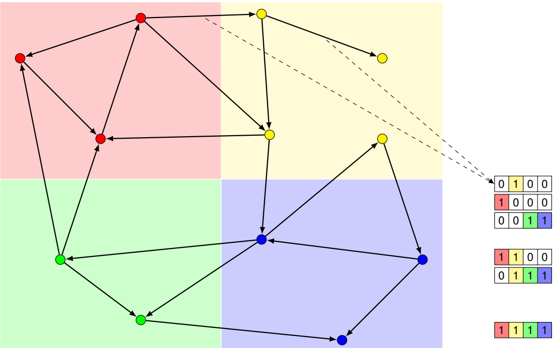
- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



Idee:

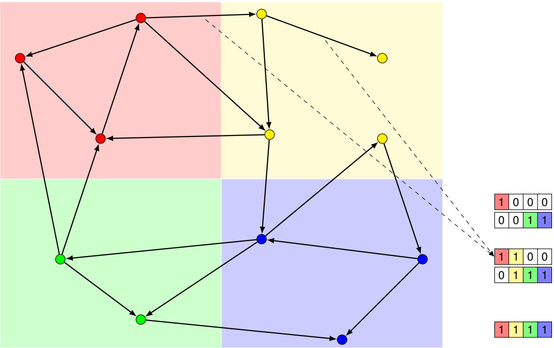
- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



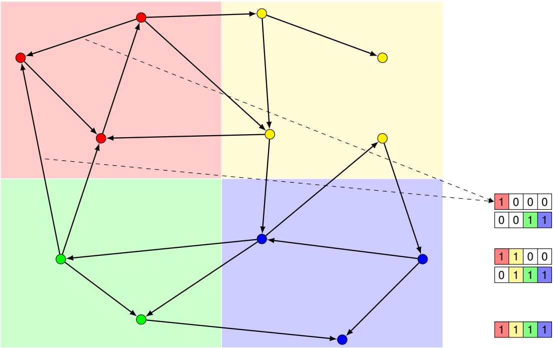
Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



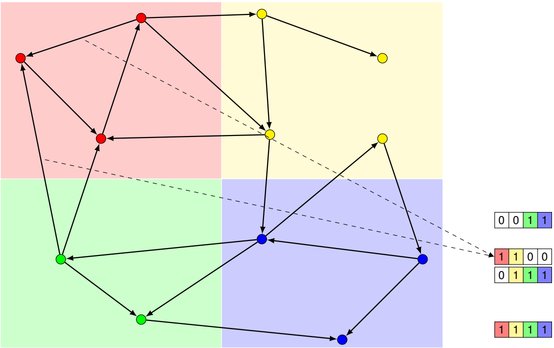
Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



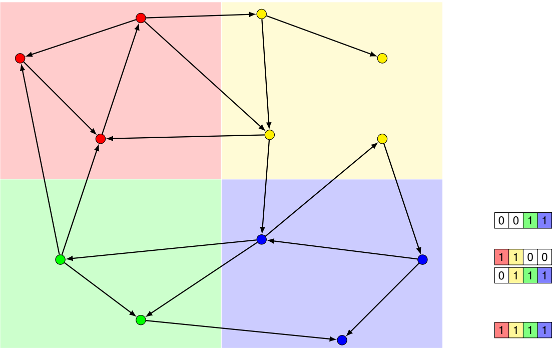
Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Flaggenkompression

Beobachtung:

- kippen eines Bits von 1 auf 0 verboten
- kippen eines Bits von 0 auf 1 erlaubt (Anfrage weiterhin korrekt, eventuell langsamer)



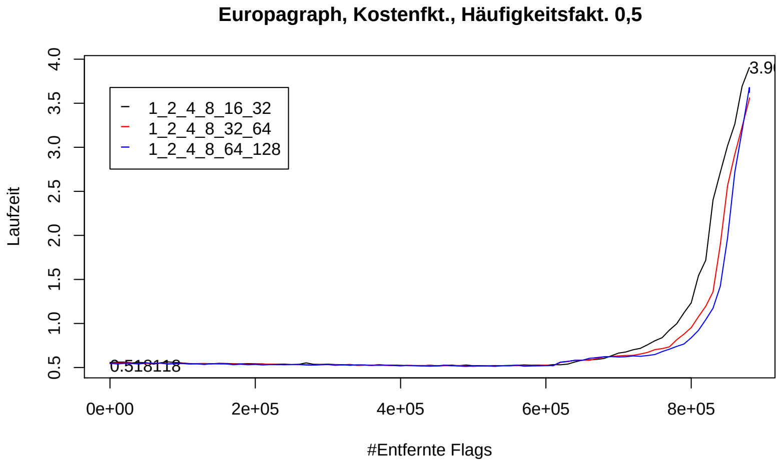
Idee:

- verringere Anzahl eindeutiger Arc-Flags durch kippen
- dadurch Kompression der Matrix
- finde “gutes” Mapping

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Flaggenkompression

(Multi-Level, unidirektional)



Beobachtungen

- kaum Verlust bis zu 60% entfernte Flaggen
- geringer Verlust bis zu 80% entfernte Flaggen
- kippen von niedrig-leveligen Flaggen billiger

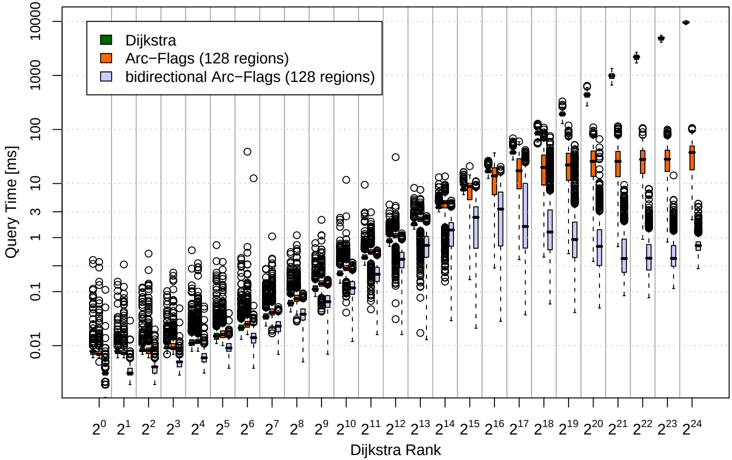
Zufallsanfragen: Anzahl Regionen

	Prepro		Query		
regions	time [min]	space [B/n]	# settled nodes	time [ms]	spd up
0	0	0	9 114 385	5 591.6	1.0
200	1 028	19	2 369	1.6	3 494.8
400	1 366	20	1 868	1.2	4 659.7
600	1 723	21	1 700	1.1	5 083.3
800	1 892	23	1 642	1.4	3 994.0
1000	2 156	25	1 593	1.1	5 083.3

Beobachtungen:

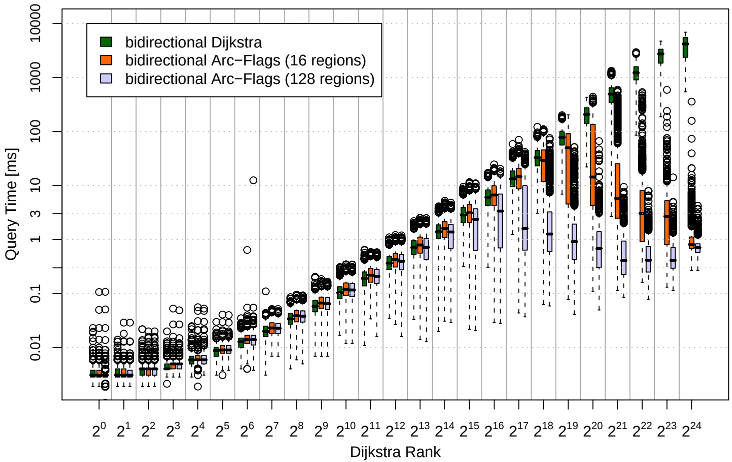
- lange Vorberechnung
- hohe Beschleunigung
- geringer Speicherverbrauch
- mehr als 200 Regionen lohnt sich nicht

Dijkstra Rank ArcFlags Uni- vs Bidir.



- gegenüber Dijkstra nur Beschleunigung für weite Anfragen
- birektionale Arc-Flags deutlich schneller als unidirektionale

Dijkstra Rank ArcFlags # Regionen



- gegenüber Dijkstra nur Beschleunigung für weite Anfragen
- 128 Regionen z.T. deutlich besser als 16 (bei 2^{24} fast gleichauf)

Zusammenfassung

Arc-Flags

- Teile Graphen in k Regionen
- Flaggen zeigen an, ob Kante wichtig für Zielregion ist
- Einfacher Anfrage-Algorithmus
- Vorberechnung
  - Kürzeste-Wege-Baum von jedem Randknoten
  - Manche Flaggen können automatisch gesetzt werden
- Bidirektional und multi-level Erweiterungen
- Beschleunigung in Größenordnung von 10^3
- Nahe Anfragen nicht schneller als Dijkstra
- Hohe Vorberechnungszeit

SHARC

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

SHARC

Motivation:

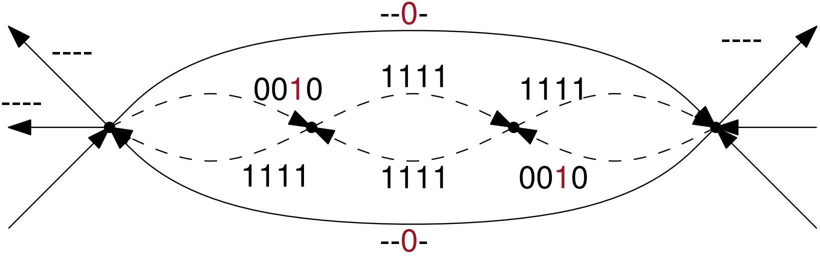
- unidirektional
- Vorberechnungszeiten von Arc-Flags reduzieren

Ideen:

- Multi-Level Arc-Flags
- Integration von Kontraktion
- Verfeinern von Flaggen

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Integration von Kontraktion



Idee:

- sub-optimale Flaggen für entfernte Kanten
- in die Komponente: nur own-cell Flagge, sonst voll
- Shortcuts: own-cell false

$\Rightarrow$

- Vorberechnung nur auf kontrahierten Graph
- sub-optimale Flaggen nur am Anfang und Ende der Query
- Überspringen von Kanten automatisch durch Arc-Flags Query

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

SHARC (Kontraktion, Arc-Flags)

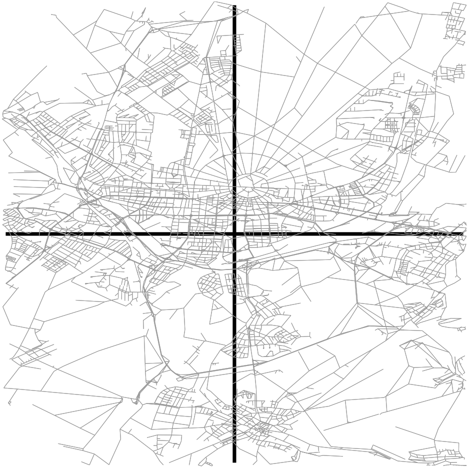
Vorberechnung:

- Multi-Level-Partition

SHARC (Kontraktion, Arc-Flags)

Vorberechnung:

- Multi-Level-Partition

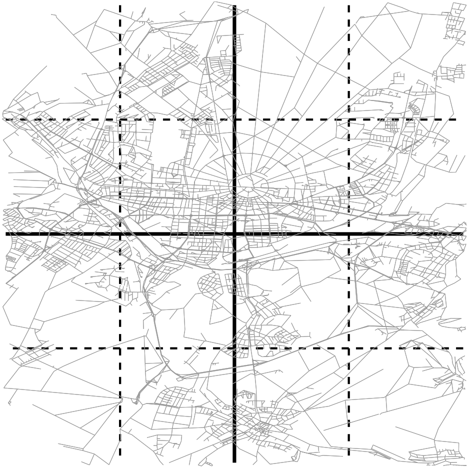


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

SHARC (Kontraktion, Arc-Flags)

Vorberechnung:

- Multi-Level-Partition

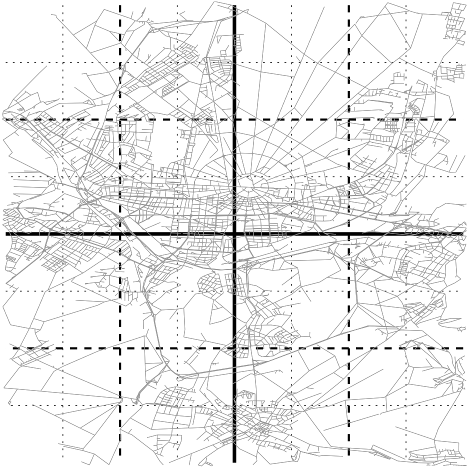


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

SHARC (Kontraktion, Arc-Flags)

Vorberechnung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen

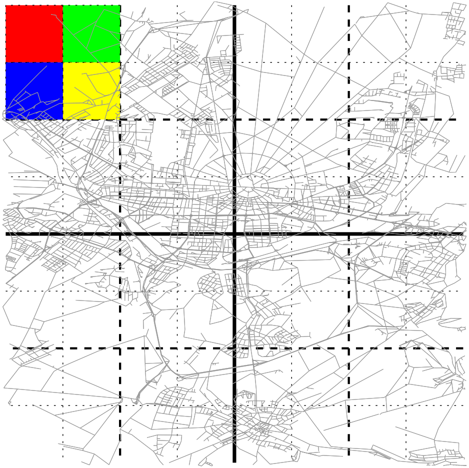


Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

SHARC (Kontraktion, Arc-Flags)

Vorberechnung:

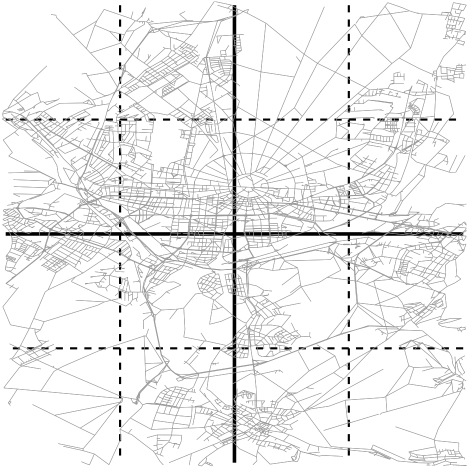
- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
    - berechne Flaggen



SHARC (Kontraktion, Arc-Flags)

Vorberechnung:

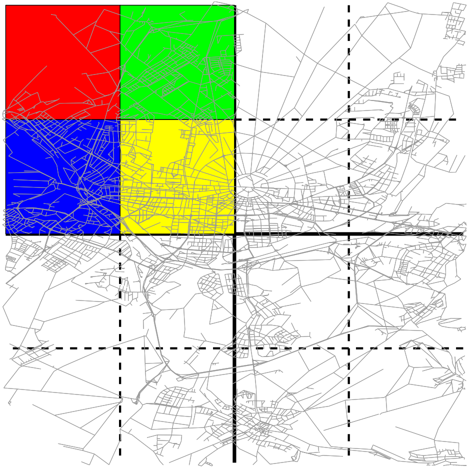
- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen



SHARC (Kontraktion, Arc-Flags)

Vorberechnung:

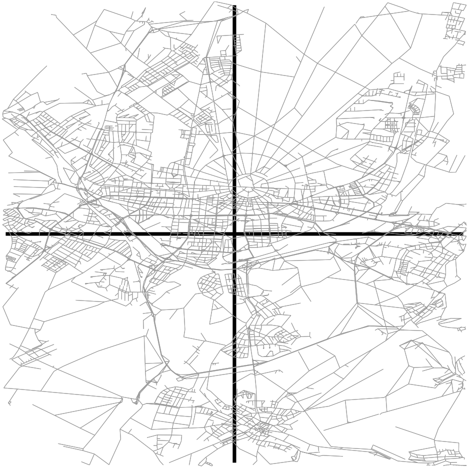
- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - berechne Flaggen



SHARC (Kontraktion, Arc-Flags)

Vorberechnung:

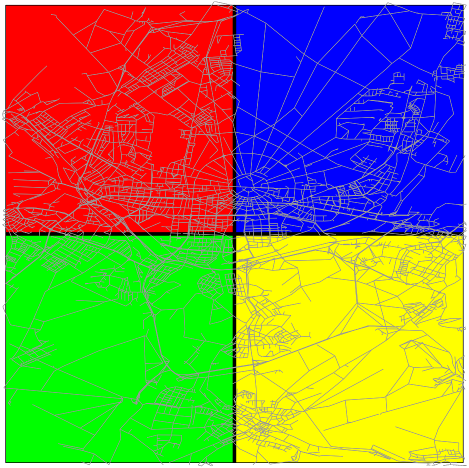
- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen



SHARC (Kontraktion, Arc-Flags)

Vorberechnung:

- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen



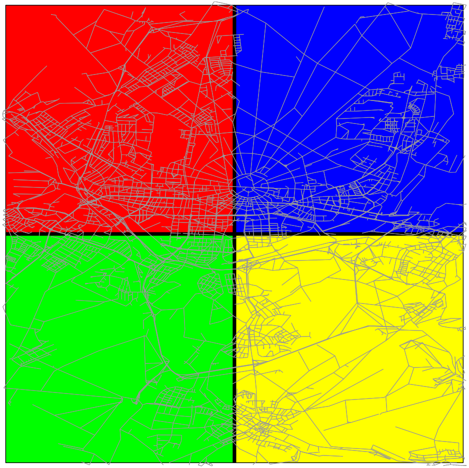
SHARC (Kontraktion, Arc-Flags)

Vorberechnung:

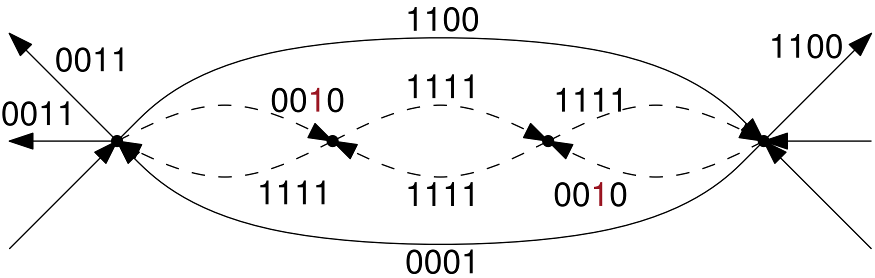
- Multi-Level-Partition
- iterativer Prozess:
  - kontrahiere Subgraphen
  - berechne Flaggen

Anfragen:

- uni- oder bidirektional
- hierarchisch (Kontraktion)
  LowestCommonSupercell(u,t)
- zielgerichtet (Arc-Flags)



Verfeinerung

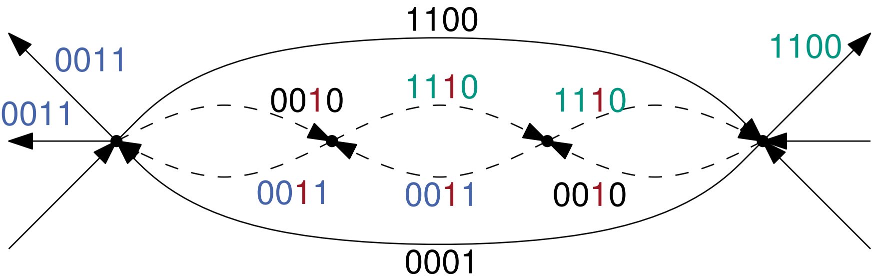


Beobachtung:

- Flaggen schlechter als nötig
- geht es besser?

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Verfeinerung



Beobachtung:

- Flaggen schlechter als nötig
- geht es besser?

Idee:

- verfeinere Flaggen
- propagiere Flaggen von wichtigen zu unwichtigen Kanten
- mittels lokaler Suche

$\Rightarrow$ sehr gute Flaggen

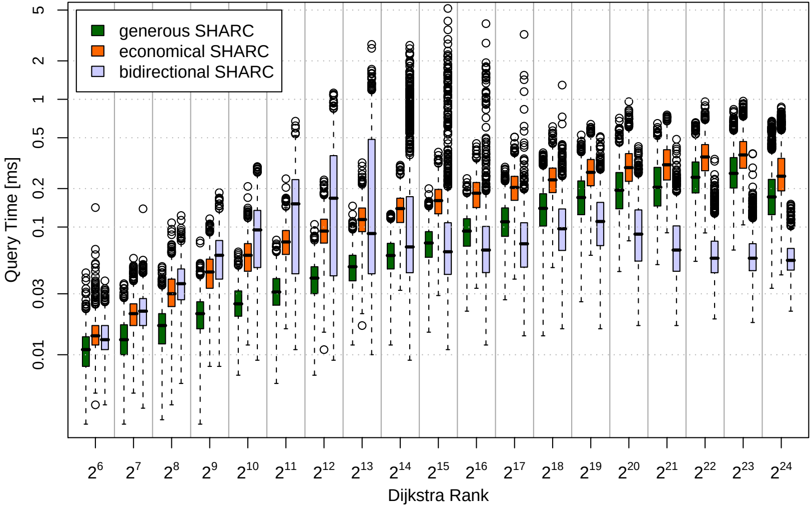
Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Zufallsanfragen

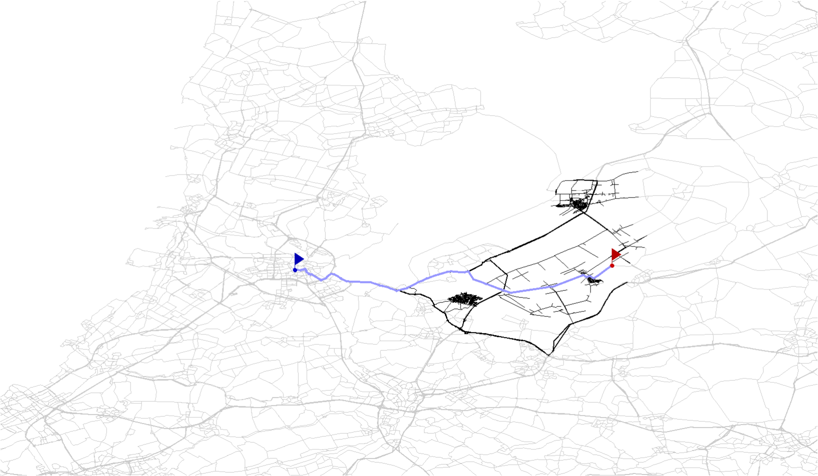
	Europe				USA			
	PREPRO		QUERY		PREPRO		QUERY	
	time [h:m]	space [B/n]	#settled nodes	time [μs]	time [h:m]	space [B/n]	#settled nodes	time [μs]
generous SHARC	1:21	14.5	654	290	0:58	18.1	865	376
bidirectional SHARC	2:38	21.0	125	65	2:34	23.1	254	118
economical SHARC	0:34	13.7	784	355	0:38	17.2	1 230	578

- generous vs economical: unterschiedliche Parametrisierung der Kontraktion und Verfeinerung, Details im Papier
- Um eine Größenordnung schneller als ArcFlags

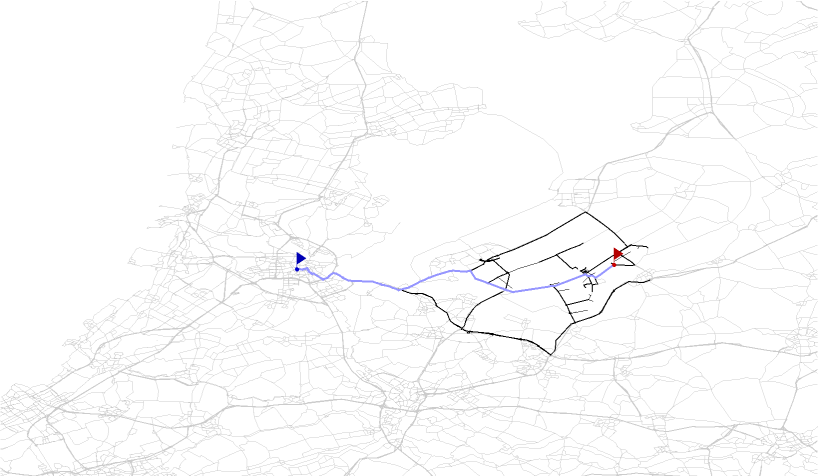
Dijkstra Rank SHARC



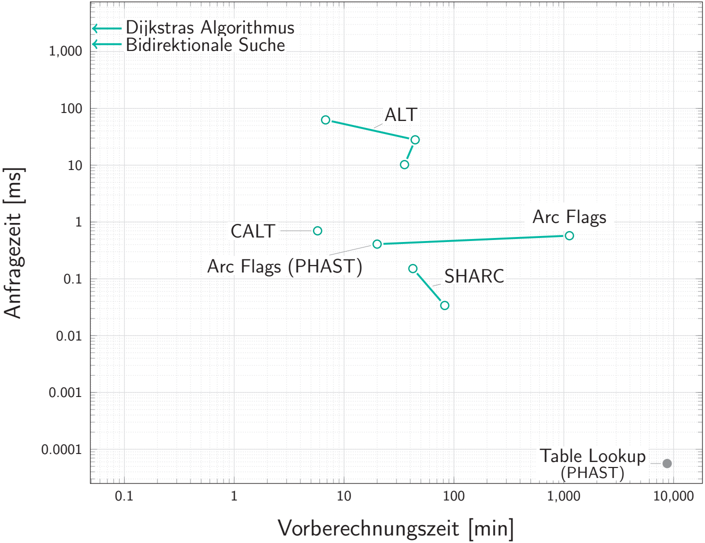
Suchraum – Arc-Flags



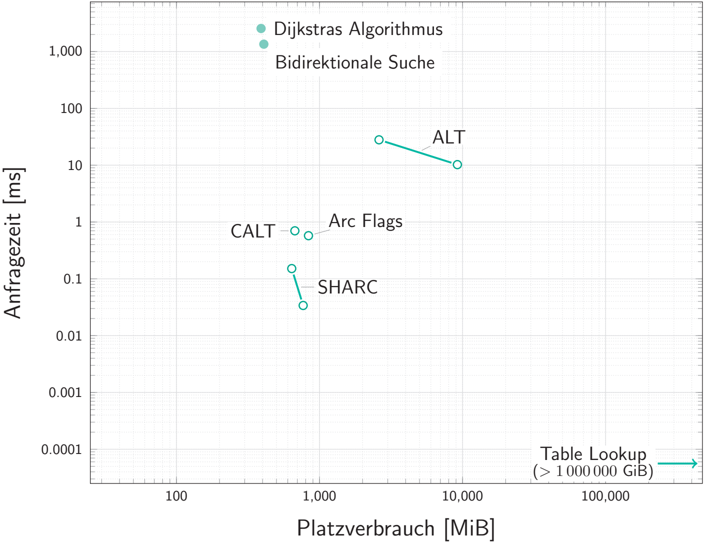
Suchraum – SHARC



Übersicht bisherige Techniken



Übersicht bisherige Techniken



Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Nächste Termine

Mittwoch, 17.5.2017

(Valentin Buchhold)

Institut für Theoretische Informatik
Lehrstuhl Algorithmik

Literatur I

Reinhard Bauer, Moritz Baum, Ignaz Rutter, and Dorothea Wagner.
On the Complexity of Partitioning Graphs for Arc-Flags.
Journal of Graph Algorithms and Applications, 17(3):265–299, 2013.

Reinhard Bauer and Daniel Delling.
SHARC: Fast and Robust Unidirectional Routing.
ACM Journal of Experimental Algorithmics, 14(2.4):1–29, August 2009.
Special Section on Selected Papers from ALENEX 2008.

Moritz Hilger, Ekkehard Köhler, Rolf H. Möhring, and Heiko Schilling.
Fast Point-to-Point Shortest Path Computations with Arc-Flags.
In Camil Demetrescu, Andrew V. Goldberg, and David S. Johnson, editors, *The Shortest Path Problem: Ninth DIMACS Implementation Challenge*, volume 74 of *DIMACS Book*, pages 41–72. American Mathematical Society, 2009.