

# Algorithmen für Routenplanung

1. Vorlesung, Sommersemester 2017

Tobias Zündorf | 26. April 2017

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · ALGORITHMIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER





Prof. Dorothea  
Wagner



Moritz Baum



Ben Strasser



Tobias Zündorf



Valentin Buchhold

**Vorlesungswebseite:** <http://i11www.itl.kit.edu/teaching/sommer2016/routenplanung/index>

## Vorlesung

- Montags 14:00–15:30 Uhr, SR 301 (hier)
- Mittwochs 11:30–13:00 Uhr, SR 301 (hier)

## Prüfung

- Prüfbar im Master (und Hauptstudium Diplom)
- Im Master: 5 ECTS Kredite
- VF: 1 (Theoretische Grundlagen), 2 (Algorithmentechnik)

### Vorlesungswebseite:

`https://illwww.iti.uni-karlsruhe.de/teaching/sommer2017/routenplanung/index`

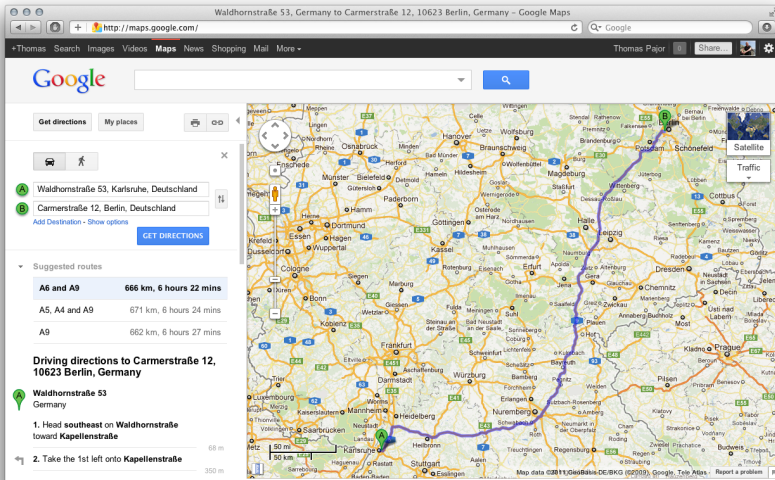
## Terminübersicht:

Montag	24.4.	–	<i>Keine Vorlesung</i>
Mittwoch	26.4.	Tobias	Einführung, Grundlagen, Dijkstras Algorithmus
Montag	01.5.	–	<i>Keine Vorlesung</i>
Mittwoch	03.5.	Tobias	Kontraktion & TopoCore
Montag	08.5.	–	<i>Keine Vorlesung</i>
Mittwoch	10.5.	Moritz	A*, ALT
...			

# Routenplanung in der Anwendung



# Routenplanung in der Anwendung



Waldhornstraße 53, Germany to Carmerstraße 12, 10623 Berlin, Germany - Google Maps

http://maps.google.com/

Thomas Pajor

Google

Get directions My places

Waldhornstraße 53, Karlsruhe, Deutschland

Carmerstraße 12, Berlin, Deutschland

GET DIRECTIONS

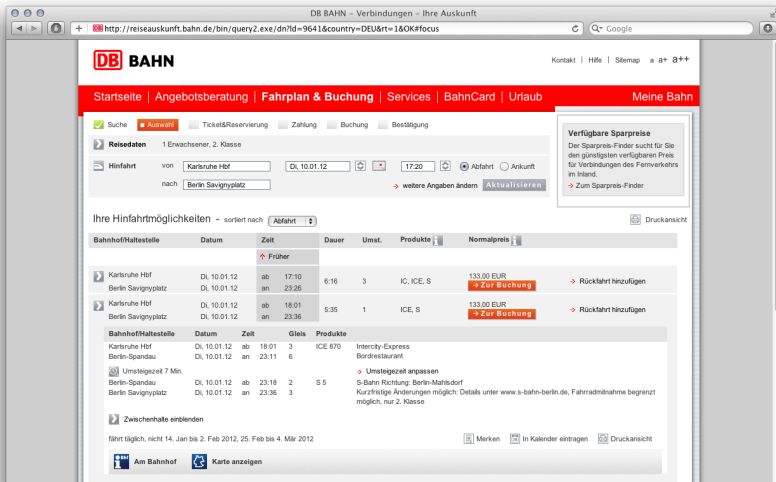
Suggested routes

Route	Distance	Time
A6 and A9	666 km	6 hours 22 mins
A5, A4 and A9	671 km	6 hours 24 mins
A9	662 km	6 hours 27 mins

Driving directions to Carmerstraße 12, 10623 Berlin, Germany

- Head southeast on Waldhornstraße toward Kapellenstraße 68 m
- Take the 1st left onto Kapellenstraße 350 m

# Routenplanung in der Anwendung



DB BAHN

Kontakt | Hilfe | Sitemap | a+ | b++

Startseite | Angebotsberatung | **Fahrplan & Buchung** | Services | BahnCard | Urlaub | Meine Bahn

Suche  Auswahl  Ticket&Reservierung  Zahlung  Buchung  Bestätigung

**Reisedaten** 1 Erwachsener, 2. Klasse

Hinfahrt von     Abfahrt  Ankunft  
nach  [-> weitere Angaben ändern](#) [Aktualisieren](#)

**Verfügbare Sparpreise**  
Der Sparpreis-Finder sucht für Sie den günstigsten verfügbaren Preis für Verbindungen des Fernverkehrs im Inland.  
[-> Zum Sparpreis-Finder](#)

Ihre Hinfahrtmöglichkeiten - sortiert nach

Bahnhof/Haltestelle	Datum	Zeit	Dauer	Ums.	Produkte	Normalpreis
		<input type="button" value="↑ Früher"/>				
<input type="button" value="↔"/> Karlsruhe Hbf Berlin Savignyplatz	Di, 10.01.12 Di, 10.01.12	ab 17:10 an 23:26	6:16	3	IC, ICE, S	133.00 EUR <a href="#">-&gt; Zur Buchung</a>
						<a href="#">-&gt; Rückfahrt hinzufügen</a>
<input type="button" value="↔"/> Karlsruhe Hbf Berlin Savignyplatz	Di, 10.01.12 Di, 10.01.12	ab 18:01 an 23:36	5:35	1	ICE, S	133.00 EUR <a href="#">-&gt; Zur Buchung</a>
						<a href="#">-&gt; Rückfahrt hinzufügen</a>

Bahnhof/Haltestelle	Datum	Zeit	Gleis	Produkte
Karlsruhe Hbf	Di, 10.01.12	ab 18:01	3	ICE 670
Berlin-Spandau	Di, 10.01.12	an 23:11	6	Intercity-Express Bordrestaurant
<input type="button" value="⌚"/> Umsteigezeit 7 Min.				<a href="#">-&gt; Umsteigezeit anpassen</a>
Berlin-Spandau	Di, 10.01.12	ab 23:18	2	S 5
Berlin Savignyplatz	Di, 10.01.12	an 23:36	3	S-Bahn Richtung: Berlin-Mahlsdorf Kurzfristige Änderungen möglich: Details unter <a href="http://www.s-bahn-berlin.de">www.s-bahn-berlin.de</a> , Fahrradmitnahme begrenzt möglich, nur 2. Klasse

Zwischenhalte einblenden

fährt täglich, nicht 14. Jan bis 2. Feb 2012, 25. Feb bis 4. Mär 2012  Merken  In Kalender eintragen  Druckansicht

Am Bahnhof  Karte anzeigen

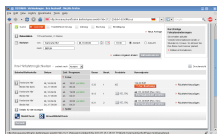
# Routenplanung in der Anwendung





## Wichtiger Anwendungsbereich

- Navigationssysteme
- Kartendienste: Google Maps, Bing Maps, ...
- Fahrplanauskunftssysteme



## Viele kommerzielle Systeme

- Nutzen **heuristische** Methoden
- Betrachten nur Teile des Transportnetzwerkes
- Geben keine **Qualitätsgarantien**

Wir untersuchen Methoden zur **Routenplanung** in Transportnetzwerken mit **beweisbar optimalen** Lösungen

# Problemstellung

## Anfrage:

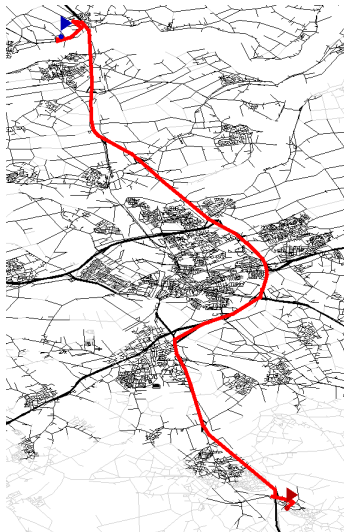
- Finde **beste** Verbindung in Transportnetz

## Modellierung:

- Netzwerk als Graph  $G = (V, E)$
- Kantengewichte sind **Reisezeit**
- **Kürzeste** Wege in  $G$  entsprechen **schnellsten** Verbindungen
- Klassisches Problem (Dijkstra [Dij59])

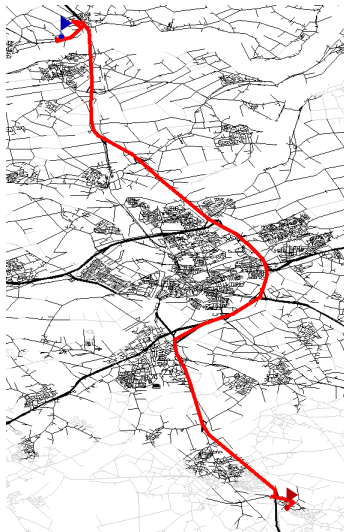
## Probleme:

- Transportnetzwerke sind **riesig**
- Dijkstras Algorithmus zu **langsam**  
( $> 1$  Sekunde)



## Beobachtung:

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen

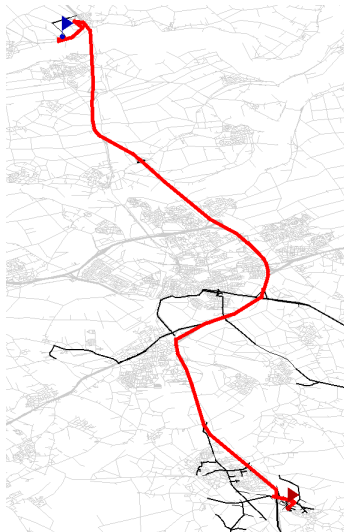


## Beobachtung:

- Viele Anfragen in (statischem) Netzwerk
- „Unnötige“ Berechnungen

## Idee:

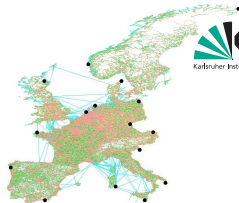
- Zwei Phasen
  - Offline: Generiere Zusatzinformation in **Vorbereitung**
  - Online: **Beschleunige** Anfrage mit dieser Information
- Drei Kriterien: Vorberechnungsplatz, Vorberechnungszeit, Beschleunigung



# Experimentelle Evaluation

**Eingabe:** Straßennetzwerk von Europa

- ca. 18 Mio. Knoten
- ca. 42 Mio. Kanten

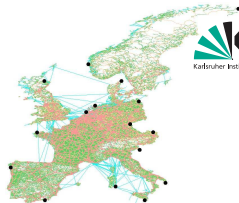


Algorithmus	VORBERECHNUNG		ANFRAGEN	
	Zeit [h:m]	Platz [GiB]	Zeit [ $\mu$ s]	Beschleun.
Dijkstra <small>[Dij59]</small>	—	—	2 550 000	—
ALT <small>[GH05, GW05]</small>	0:42	2.2	24 521	104
CRP <small>[DGPW11]</small>	≪ 0:01	< 0.1	1 650	1 545
Arc-Flags <small>[Lau04]</small>	0:20	0.3	408	6 250
CH <small>[GSSD08]</small>	0:05	0.2	110	23 181
TNR <small>[ALS13]</small>	0:20	2.1	1.25	2 040 000
HL <small>[ADGW12]</small>	0:37	18.4	0.56	4 553 571

# Experimentelle Evaluation

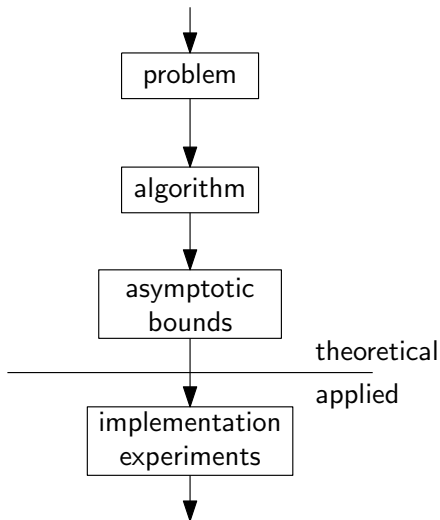
**Eingabe:** Straßennetzwerk von Europa

- ca. 18 Mio. Knoten
- ca. 42 Mio. Kanten



Algorithmus	VORBERECHNUNG		ANFRAGEN	
	Zeit [h:m]	Platz [GiB]	Zeit [ $\mu$ s]	Beschleun.
Dijkstra <small>[Dij59]</small>	—	—	2 550 000	—
ALT <small>[GH05, GW05]</small>	0:42	2.2	24 521	104
CRP <small>[DGPW11]</small>	$\ll$ 0:01	$<$ 0.1	1 650	1 545
Arc-Flags <small>[Lau04]</small>	0:20	0.3	408	6 250
CH <small>[GSSD08]</small>	0:05	0.2	110	23 181
TNR <small>[ALS13]</small>	0:20	2.1	1.25	2 040 000
HL <small>[ADGW12]</small>	0:37	18.4	0.56	4 553 571

Mittlerweile im Einsatz bei Bing, Google, Apple, Tomtom, ...

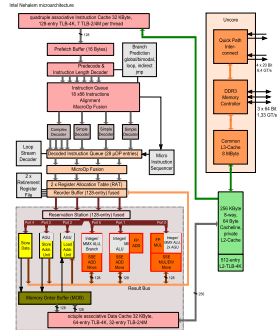


## Einige Fakten:

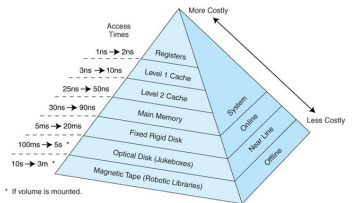
- steile Speicherhierarchie
- viele Kerne
- mehr Kerne als Speichercontroller
- Cache-Kohärenz
- SIMD (SSE, AVX)

## Haupt Herausforderungen:

- Speicherzugriff/Datenlokalität
- Parallelisierung
  - Nicht nur race-conditions, etc.
  - auch Speicherzugriff z.B. "false-sharing" (Cache-Kohärenz)



© Intel, approximations per second



\* If volume is mounted.



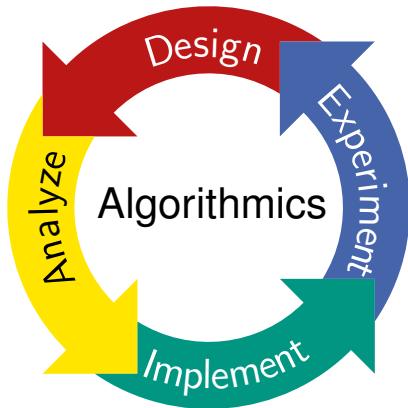
# Lücke Theorie vs. Praxis

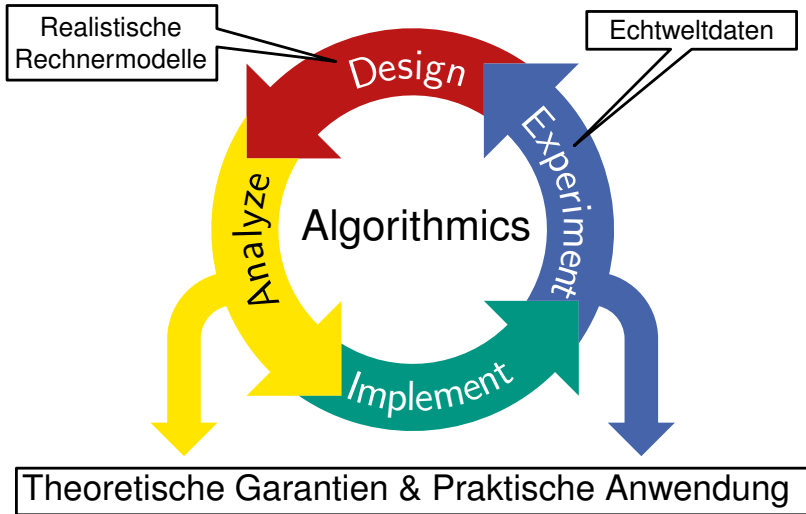
Theorie	vs.	Praxis
einfach einfach	Problem-Modell Maschinenmodell	komplex komplex
komplex fortgeschritten	Algorithmen Datenstrukturen	einfach einfach
worst-case asymptotisch	Komplexitäts-Messung Effizienz	typische Eingaben konstante Faktoren

Theorie	vs.	Praxis
einfach einfach	Problem-Modell Maschinenmodell	komplex komplex
komplex fortgeschritten	Algorithmen Datenstrukturen	einfach einfach
worst-case asymptotisch	Komplexitäts-Messung Effizienz	typische Eingaben konstante Faktoren

## Routenplanung:

- sehr anwendungsnahes Gebiet
- Eingaben sind **echte** Daten
  - Straßengraphen
  - Eisenbahn (Fahrpläne)
  - Flugpläne





- Algorithm Engineering + ein bisschen Theorie
- Beschleunigungstechniken
- Implementierungsdetails
- Ergebnisse auf Real-Welt Daten
- Aktuellster Stand der Forschung (Veröffentlichungen bis 2016)
- Ideale Grundlage für Master und Diplomarbeiten

## keine Algorithmen III

- Vertiefung von kürzesten Wegen (Dijkstra)
  - Grundlagen sind Stoff von Algo I/II;  
heute nochmal Crashkurs
- Grundvorlesung “vereinfachen” Wahrheit oft
- Implementierung
- Betonung auf Messergebnisse

## keine reine Theorievorlesung

- relativ wenig Beweise (wenn doch, eher kurz)
- reale Leistung vor Asymptotik
- Vielen vorkommende Optimierungsproblemen sind  $\mathcal{NP}$ -schwer

## 1. Grundlagen

- Algorithm Engineering
- Graphen, Modelle, usw.
- Kürzeste Wege
- Dijkstra's Algorithmus

## 2. Beschleunigung von (statischen) Punkt-zu-Punkt Anfragen

- Zielgerichtete Verfahren
- Hierarchische Techniken
- Many-to-many-Anfragen und Distanztabelle
- Kombinationen

## 3. Theorie

- Theoretische Charakterisierung von Straßennetzwerken
- Highway-Dimension
- Komplexität von Beschleunigungstechniken

## 4. Fortgeschrittene Szenarien

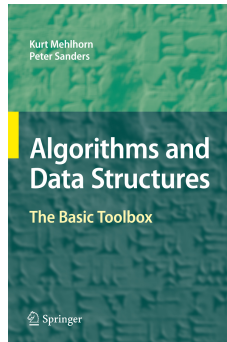
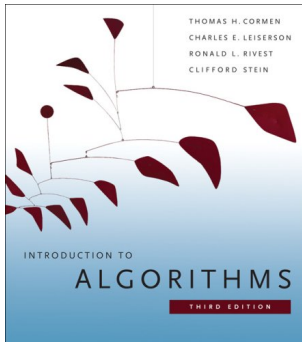
- Schnelle many-to-many und all-pairs shortest-paths
- Alternativrouten
- Zeitabhängige Routenplanung
- Fahrplanauskunft
- Routenplanung für Elektroautos
- Multi-modale Routenplanung



- Informatik I/II oder Algorithmen I
- Algorithmentechnik oder Algorithmen II (muss aber nicht sein)
- ein bisschen Rechnerarchitektur
- passive Kenntnisse von C++/Java

**Vertiefungsgebiet:** Algorithmentechnik, (Theoretische Grundlagen)

- Folien
- wissenschaftliche Aufsätze (siehe Vorlesunghomepage)
- Basiskenntnisse:

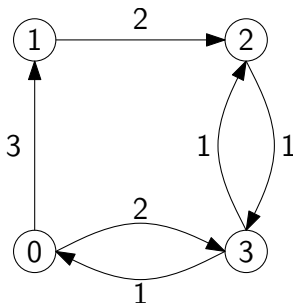


# 1. Grundlagen



## Drei klassische Ansätze:

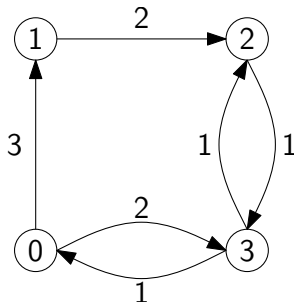
- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray



## Drei klassische Ansätze:

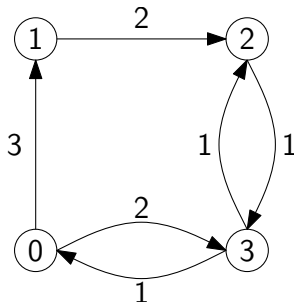
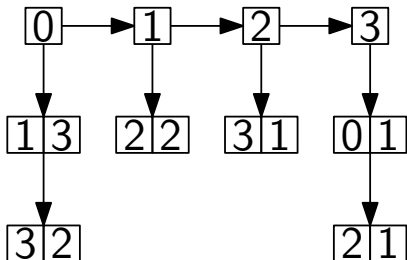
- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray

	0	1	2	3
0	—	3	—	2
1	—	—	2	—
2	—	—	—	1
3	1	—	1	—



## Drei klassische Ansätze:

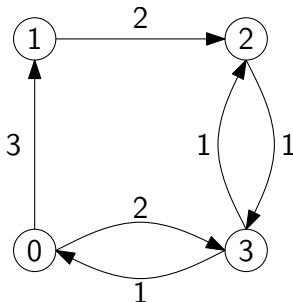
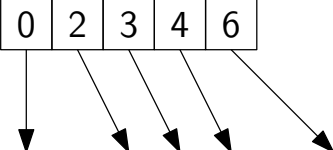
- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray



## Drei klassische Ansätze:

- Adjazenzmatrix
- Adjazenzlisten
- Adjazenzarray

firstEdge	0	2	3	4	6
targetNode	1	3	2	3	2
weight	3	2	2	1	1



# Was brauchen wir?

Eigenschaften:	Matrix	Liste	Array
Speicher	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n + m)$	$\mathcal{O}(n + m)$
Ausgehende Kanten iterieren	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\deg u)$	$\mathcal{O}(\deg u)$
Kantenzugriff $(u, v)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\deg u)$	$\mathcal{O}(\deg u)$
Effizienz (Speicherlayout)	+	-	+
Updates (neue Kante)	+	+	-
Updates (Gewicht)	+	+	+



Eigenschaften:	Matrix	Liste	Array
Speicher	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n + m)$	$\mathcal{O}(n + m)$
Ausgehende Kanten iterieren	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\deg u)$	$\mathcal{O}(\deg u)$
Kantenzugriff $(u, v)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\deg u)$	$\mathcal{O}(\deg u)$
Effizienz (Speicherlayout)	+	-	+
Updates (neue Kante)	+	+	-
Updates (Gewicht)	+	+	+

## Fragen:

- Was brauchen wir?
- Was muss nicht super effizient sein?
- erstmal Modelle anschauen!

# Modellierung (Straßengraphen)

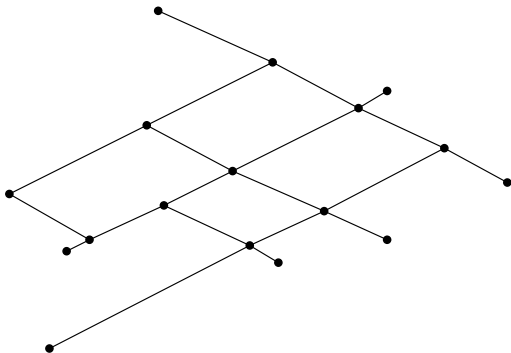


# Modellierung (Straßengraphen)



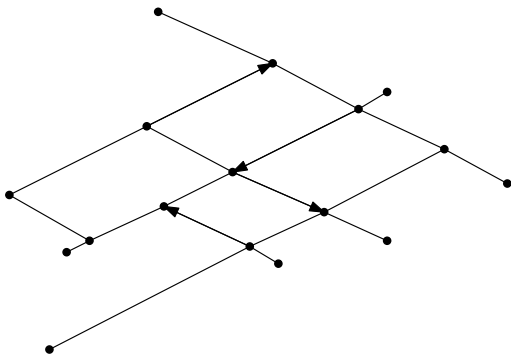
# Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen



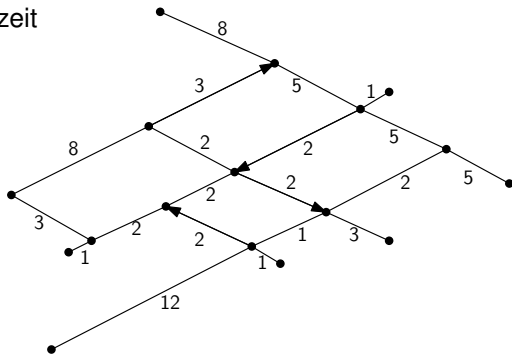
# Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen
- Einbahnstraßen

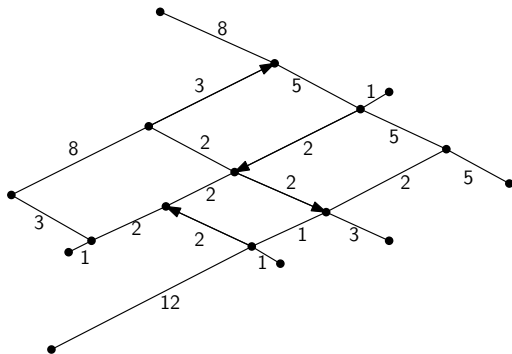


# Modellierung (Straßengraphen)

- Knoten sind Kreuzungen
- Kanten sind Straßen
- Einbahnstraßen
- Metrik ist Reisezeit

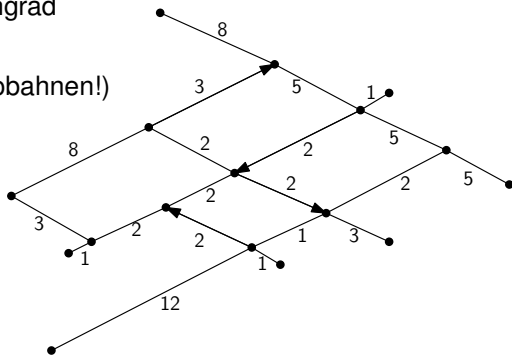


Eigenschaften (sammeln):



## Eigenschaften:

- dünn
- (fast) ungerichtet
- geringer Knotengrad
- Kantenzüge
- Hierarchie (Autobahnen!)



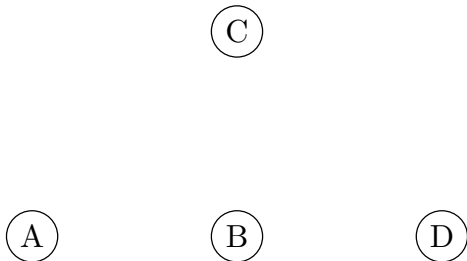


## Beispiel:

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- **Zug 1:** Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- **Zug 2:** Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- Züge operieren alle 10 Minuten

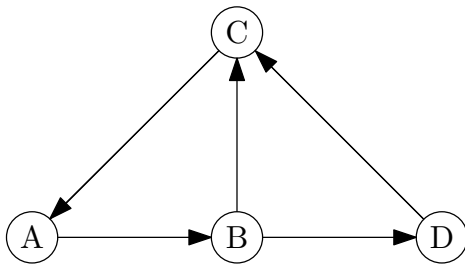
## Beispiel:

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- Zug 2: Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- Züge operieren alle 10 Minuten



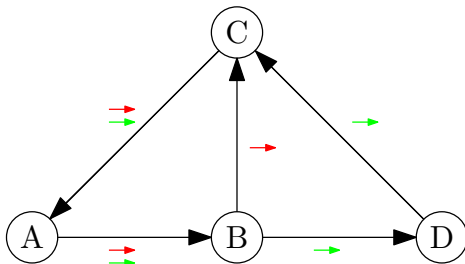
## Beispiel:

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- **Zug 1:** Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- **Zug 2:** Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- Züge operieren alle 10 Minuten



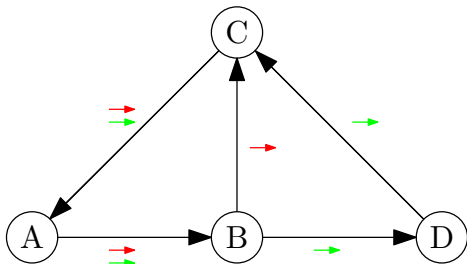
## Beispiel:

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- Zug 2: Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- Züge operieren alle 10 Minuten



## Beispiel:

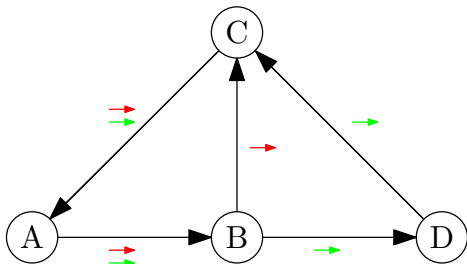
- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- Zug 2: Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- Züge operieren alle 10 Minuten



Kanten sind zeitabhängig!  
(wann fährt ein Zug wie lange?)

## Beispiel:

- 4 Stationen (A,B,C,D)
- Zug 1: Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- Zug 2: Station A  $\rightarrow$  B  $\rightarrow$  D  $\rightarrow$  C  $\rightarrow$  A
- Züge operieren alle 10 Minuten



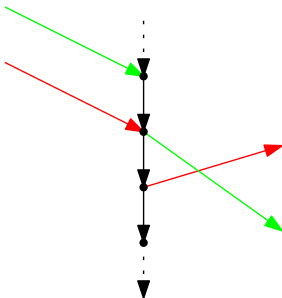
Kanten sind zeitabhängig!  
(wann fährt ein Zug wie lange?)

oder roll die Zeit aus

## Vorgehen:

- Knoten sind Abfahrts-/Ankunftseignisse
- Kanten für die Fahrt von Station zu Station
- Wartekanten an den Stationen für Umstiege

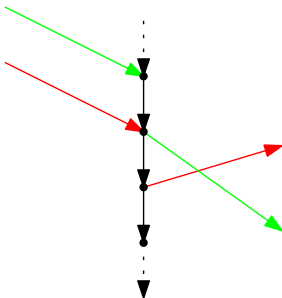
## Station B:



## Vorgehen:

- Knoten sind Abfahrts-/Ankunftsereignisse
- Kanten für die Fahrt von Station zu Station
- Wartekanten an den Stationen für Umstiege

## Station B:



## Diskussion:

- + keine zeitabhängigen Kanten
- Graph größer



- zusammenhängend
- dünn
- gerichtet
- geringer Knotengrad
- meist verborgene Hierarchie (Autobahnen, ICE)
- Einbettung vorhanden (fast planar?)
- Kantengewichte nicht-negativ
- teilweise zeitabhängig
- dünne Separatoren?

- zusammenhängend
- dünn
- gerichtet
- geringer Knotengrad
- meist verborgene Hierarchie (Autobahnen, ICE)
- Einbettung vorhanden (fast planar?)
- Kantengewichte nicht-negativ
- teilweise zeitabhängig
- dünne Separatoren?

## Diskussion:

- berechne beste Verbindungen in solchen Netzwerken
- Adjazenzarray als Graphdatenstruktur

# 2. Kürzeste Wege

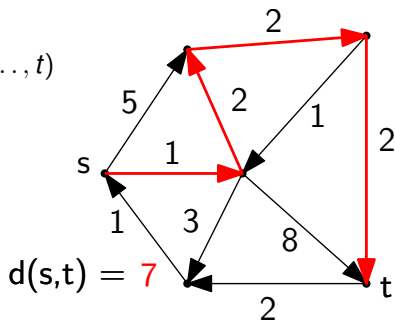


## Gegeben:

Graph  $G = (V, E, \text{len})$  mit positiver Kantenfunktion  $\text{len}: E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  
Knoten  $s, t \in V$

## Mögliche Aufgaben

- Berechne Distanz  $d(s, t)$
- Finde kürzesten  $s$ - $t$ -Pfad  $P := (s, \dots, t)$



## Azyklichkeit:

- Kürzeste Wege sind zyklenfrei

## Aufspannungseigenschaft:

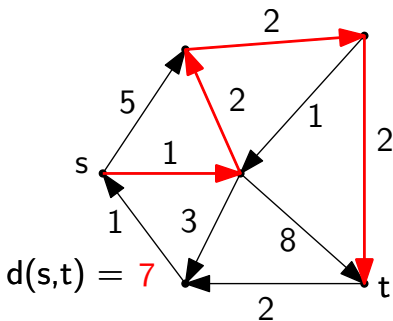
- Alle kürzesten Wege von  $s$  aus bilden DAG bzw. Baum

## Vererbungseigenschaft:

- Teilwege von kürzesten Wegen sind kürzeste Wege

## Abstand:

- Steigender Abstand von Wurzel zu Blättern



Komplexität von **Single-Source Shortest Paths** abhängig vom Eingabegraphen.

- In dieser Vorlesung: Kantengewichte (*fast*) immer nicht-negativ.
- Ein *negativer Zyklus* ist ein Kreis mit negativem Gesamtgewicht.
- Ein *einfacher Pfad* ist ein Pfad bei dem sich kein Knoten wiederholt.

## Problemvarianten

- Kantengewichte alle positiv:  
Dijkstra's Algorithmus anwendbar (Laufzeit  $|V| \log |V| + |E|$ )
- Kantengewichte auch negativ, aber kein negativer Zyklus:  
Algorithmus von Bellmann-Ford anwendbar (Laufzeit  $|V| \cdot |E|$ )
- Kantengewichte auch negativ, suche kürzesten einfachen Pfad:  
 $\mathcal{NP}$ -schwer, Reduktion von „Problem Longest Path“

---

Bellman-Ford( $G, s$ )

---

```
1 for  $v \in V$  do  $d[v] \leftarrow \infty$ 
2  $d[s] \leftarrow 0$ 
3 for  $i = 1$  to  $|V| - 1$  do
4   forall the edges  $(u, v) \in E$  do
5     if  $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$  then
6        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$ 
```

---

Bellman-Ford( $G, s$ )

---

```
1 for  $v \in V$  do  $d[v] \leftarrow \infty$ 
2  $d[s] \leftarrow 0$ 
3 for  $i = 1$  to  $|V| - 1$  do
4   forall the edges  $(u, v) \in E$  do
5     if  $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$  then
6        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$ 
7 forall the edges  $(u, v) \in E$  do
8   if  $d[v] > d[u] + \text{len}(u, v)$  then
9     negative cycle found
```

---



## Problem Longest Path

### Gegeben:

- Gerichteter, gewichteter Graph  $G = (V, E)$  mit gewicht  $len: E \rightarrow \mathbb{N}$
- Zahl  $K \in \mathbb{N}$
- Knoten  $s, t \in V$

### Frage:

- Gibt es einen einfachen  $s$ - $t$ -Pfad der Länge mindestens  $K$ ?

Problem Longest Path ist  $\mathcal{NP}$ -schwer (siehe [Garey & Johnson 79])

---

DIJKSTRA( $G = (V, E), s$ )

---

```
1 forall the nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL}$            // distances, parents
3  $d[s] = 0$ 
4  $Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0)$            // container
5 while  $!Q.\text{empty}()$  do
6    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$            // settling node u
7   forall the edges  $e = (u, v) \in E$  do
8     // relaxing edges
9     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
10       $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
11       $p[v] \leftarrow u$ 
12      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
13      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

---

# Dijkstras Algorithmus

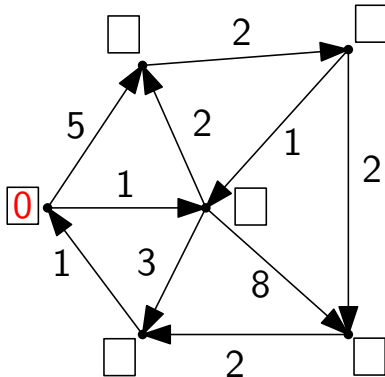
**Gegeben:** Graph  $G$ , Startknoten.

**Idee:** Suche in  $G$  mit zunehmender *Distanz* von  $s$ .

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph  $G$ , Startknoten.

**Idee:** Suche in  $G$  mit zunehmender *Distanz* von  $s$ .

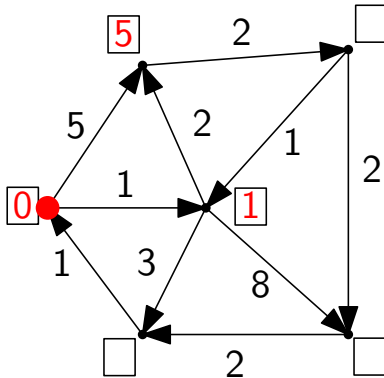


**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph  $G$ , Startknoten.

**Idee:** Suche in  $G$  mit zunehmender *Distanz* von  $s$ .

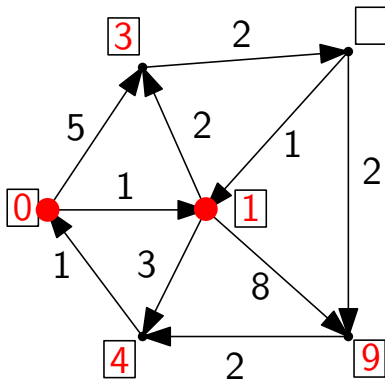


**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph  $G$ , Startknoten.

**Idee:** Suche in  $G$  mit zunehmender *Distanz* von  $s$ .

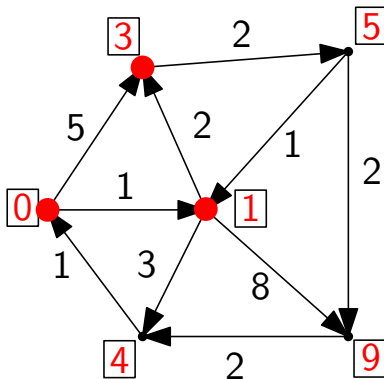


**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph  $G$ , Startknoten.

**Idee:** Suche in  $G$  mit zunehmender *Distanz* von  $s$ .

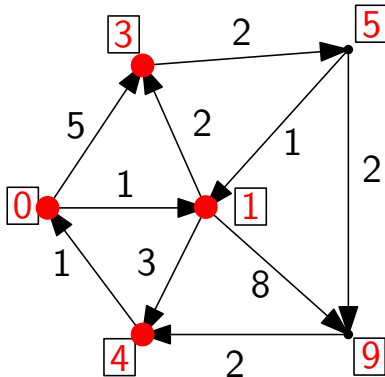


**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph  $G$ , Startknoten.

**Idee:** Suche in  $G$  mit zunehmender *Distanz* von  $s$ .



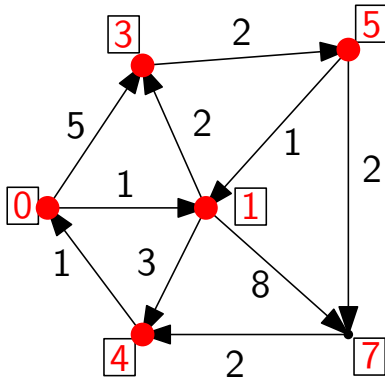
**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.



# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph  $G$ , Startknoten.

**Idee:** Suche in  $G$  mit zunehmender *Distanz* von  $s$ .

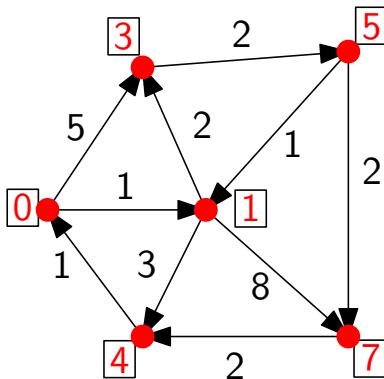


**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph  $G$ , Startknoten.

**Idee:** Suche in  $G$  mit zunehmender *Distanz* von  $s$ .

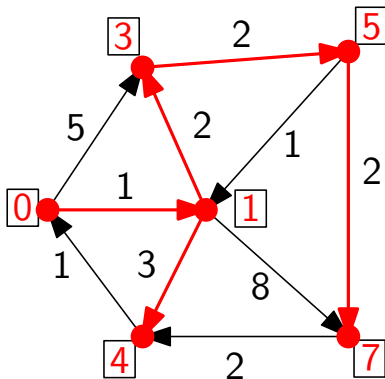


**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

# Dijkstras Algorithmus

**Gegeben:** Graph  $G$ , Startknoten.

**Idee:** Suche in  $G$  mit zunehmender *Distanz* von  $s$ .



**Invariante:** Pfade zu *roten* Knoten sind **optimal**.

---

DIJKSTRA( $G = (V, E)$ ,  $s$ )

---

```
1 forall the nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty$ ,  $p[v] = \text{NULL}$            // distances, parents
3  $d[s] = 0$ 
4  $Q.\text{clear}()$ ,  $Q.\text{insert}(s, 0)$            // container
5 while  $!Q.\text{empty}()$  do
6    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$            // settling node  $u$ 
7   forall the edges  $e = (u, v) \in E$  do
8     // relaxing edges
9     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
10       $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
11       $p[v] \leftarrow u$ 
12      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
13      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

**Kantenrelaxierung:** Der Vorgang

1 **if**  $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$  **then**  $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

**Kantenrelaxierung:** Der Vorgang

1 **if**  $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$  **then**  $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

**Besuchte Knoten:** Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *besucht* (*visited*) wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt wurde (unabhängig davon, ob er noch in der Queue ist).

**Kantenrelaxierung:** Der Vorgang

1 **if**  $d[u] + \text{len}(u, v) < d[v]$  **then**  $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(u, v)$

heißt *Kantenrelaxierung*.

**Besuchte Knoten:** Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *besucht* (*visited*) wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt wurde (unabhängig davon, ob er noch in der Queue ist).

**Abgearbeitete Knoten:** Ein Knoten heißt (zu einem Zeitpunkt) *abgearbeitet* (*settled*) wenn er (zu diesem Zeitpunkt) schon in die Queue eingefügt und wieder extrahiert wurde.

---

DIJKSTRA( $G = (V, E), s$ )

---

```
1 forall the nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL}$ 
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0)$ 
4 while ! $Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$ 
6   forall the edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
10      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
11      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

---



---

DIJKSTRA( $G = (V, E), s$ )

---

```
1 forall the nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL}$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0)$ 
4 while ! $Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$ 
6   forall the edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
10      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
11      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

---

---

DIJKSTRA( $G = (V, E), s$ )

---

```
1 forall the nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL}$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0)$  // 1 Mal
4 while ! $Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$ 
6   forall the edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
10      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
11      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

---

---

DIJKSTRA( $G = (V, E), s$ )

---

```
1 forall the nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL}$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0)$  // 1 Mal
4 while ! $Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$  // n Mal
6   forall the edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
10      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$ 
11      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

---

---

DIJKSTRA( $G = (V, E), s$ )

---

```
1 forall the nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL}$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0)$  // 1 Mal
4 while ! $Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$  // n Mal
6   forall the edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
10      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$  // m Mal
11      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$ 
```

---

---

DIJKSTRA( $G = (V, E), s$ )

---

```
1 forall the nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL}$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0)$  // 1 Mal
4 while ! $Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$  // n Mal
6   forall the edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
10      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$  // m Mal
11      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$  // n Mal
```

---

---

DIJKSTRA( $G = (V, E), s$ )

---

```
1 forall the nodes  $v \in V$  do
2    $d[v] = \infty, p[v] = \text{NULL}$  // n Mal
3  $d[s] = 0, Q.\text{clear}(), Q.\text{insert}(s, 0)$  // 1 Mal
4 while ! $Q.\text{empty}()$  do
5    $u \leftarrow Q.\text{deleteMin}()$  // n Mal
6   forall the edges  $e = (u, v) \in E$  do
7     if  $d[u] + \text{len}(e) < d[v]$  then
8        $d[v] \leftarrow d[u] + \text{len}(e)$ 
9        $p[v] \leftarrow u$ 
10      if  $v \in Q$  then  $Q.\text{decreaseKey}(v, d[v])$  // m Mal
11      else  $Q.\text{insert}(v, d[v])$  // n Mal
```

---

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{\text{init}} + n \cdot T_{\text{deleteMin}} + m \cdot T_{\text{decreaseKey}} + n \cdot T_{\text{insert}}$$

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{\text{init}} + n \cdot T_{\text{deleteMin}} + m \cdot T_{\text{decreaseKey}} + n \cdot T_{\text{insert}}$$

Operation	Liste (worst-case)	Binary Heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
Init	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DeleteMin	$\Theta(n)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Union	$\Theta(1)$	$\Theta(k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
<b>Dijkstra</b>	$\mathcal{O}(n^2 + m)$	$\mathcal{O}((n + m) \log n)$	$\mathcal{O}((n + m) \log n)$	$\mathcal{O}(m + n \log n)$

$$T_{\text{DIJKSTRA}} = T_{\text{init}} + n \cdot T_{\text{deleteMin}} + m \cdot T_{\text{decreaseKey}} + n \cdot T_{\text{insert}}$$

Operation	Liste (worst-case)	Binary Heap (worst-case)	Binomial heap (worst-case)	Fibonacci heap (amortized)
Init	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
Insert	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
Minimum	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DeleteMin	$\Theta(n)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
Union	$\Theta(1)$	$\Theta(k)$	$\mathcal{O}(\log k)$	$\Theta(1)$
DecreaseKey	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(1)$
Delete	$\Theta(1)$	$\Theta(\log k)$	$\Theta(\log k)$	$\mathcal{O}(\log k)$
<b>Dijkstra</b>	$\mathcal{O}(n^2 + m)$	$\mathcal{O}((n + m) \log n)$	$\mathcal{O}((n + m) \log n)$	$\mathcal{O}(m + n \log n)$
$m \in \mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$	$\mathcal{O}(n \log n)$

Transportnetzwerke sind dünn  $\Rightarrow$  Binary Heaps



k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

k	Query [sec]
2	1.834
3	1.595
4	1.507
5	1.525
8	1.561

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

k	Query [sec]
2	1.834
3	1.595
4	1.507
5	1.525
8	1.561

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

Dijkstra:  $\approx 1.5$  s  $\Rightarrow$  nicht interaktiv

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

k	Query [sec]
2	1.834
3	1.595
4	1.507
5	1.525
8	1.561

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

Dijkstra:  $\approx 1.5$  s  $\Rightarrow$  nicht interaktiv  
 $n + m$  CPU clock cycles:  $\approx 30$  ms  $\Rightarrow$  viel schneller

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

k	Query [sec]
2	1.834
3	1.595
4	1.507
5	1.525
8	1.561

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

Dijkstra:	$\approx 1.5$ s	$\Rightarrow$ nicht interaktiv
$n + m$ CPU clock cycles:	$\approx 30$ ms	$\Rightarrow$ viel schneller
BFS:	$\approx 1.2$ s	$\Rightarrow$ an der Queue liegt's nicht

k-ary Heap: Baum mit (max.) k Kindern je Vorgängerknoten

k	Query [sec]
2	1.834
3	1.595
4	1.507
5	1.525
8	1.561

Graph: 18M Knoten, 42M Kanten

Dijkstra:  $\approx 1.5$  s  $\Rightarrow$  nicht interaktiv  
 $n + m$  CPU clock cycles:  $\approx 30$  ms  $\Rightarrow$  viel schneller  
BFS:  $\approx 1.2$  s  $\Rightarrow$  an der Queue liegt's nicht

Performanz von Graphsuchen ist speicher-begrenzt

# Mittwoch, 3. Mai 2017

-  Ittai Abraham, Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, and Renato F. Werneck.  
**Hierarchical Hub Labelings for Shortest Paths.**  
In Leah Epstein and Paolo Ferragina, editors, *Proceedings of the 20th Annual European Symposium on Algorithms (ESA'12)*, volume 7501 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 24–35. Springer, 2012.
-  Julian Arz, Dennis Luxen, and Peter Sanders.  
**Transit Node Routing Reconsidered.**  
In *Proceedings of the 12th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'13)*, volume 7933 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 55–66. Springer, 2013.
-  Daniel Delling, Andrew V. Goldberg, Thomas Pajor, and Renato F. Werneck.  
**Customizable Route Planning.**  
In Panos M. Pardalos and Steffen Rebennack, editors, *Proceedings of the 10th International Symposium on Experimental Algorithms (SEA'11)*, volume 6630 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 376–387. Springer, 2011.
-  Edsger W. Dijkstra.  
**A Note on Two Problems in Connexion with Graphs.**  
*Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.
-  Andrew V. Goldberg and Chris Harrelson.  
**Computing the Shortest Path: A\* Search Meets Graph Theory.**  
In *Proceedings of the 16th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA'05)*, pages 156–165. SIAM, 2005.
-  Robert Geisberger, Peter Sanders, Dominik Schultes, and Daniel Delling.  
**Contraction Hierarchies: Faster and Simpler Hierarchical Routing in Road Networks.**  
In Catherine C. McGeoch, editor, *Proceedings of the 7th Workshop on Experimental Algorithms (WEA'08)*, volume 5038 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 319–333. Springer, June 2008.



Andrew V. Goldberg and Renato F. Werneck.

Computing Point-to-Point Shortest Paths from External Memory.

In *Proceedings of the 7th Workshop on Algorithm Engineering and Experiments (ALENEX'05)*, pages 26–40. SIAM, 2005.



Ulrich Lauther.

An Extremely Fast, Exact Algorithm for Finding Shortest Paths in Static Networks with Geographical Background.

In *Geoinformation und Mobilität - von der Forschung zur praktischen Anwendung*, volume 22, pages 219–230. IfGI prints, 2004.