Karlsruher Institut für Technologie
Fakultät für Informatik
ITI Wagner

Algorithmen für Planare Graphen
Sommersemester 2017
Dorothea Wagner, Guido Brückner

Fünftes Übungsblatt

Ausgabe:	07. Juni 2017
Besprechung:	20. Juni 2017

1 Entfernung von Rechtskreisen

In Schritt 2 des Algorithmus für das kantendisjunkte Menger-Problem werden in einem planaren Graphen G mit fester Einbettung einfache Kreise $C_1, \ldots, C_l$ wie folgt konstruiert:

Sei F die Menge der Facetten und f_0 die äußere Facette von G. Bezeichne weiter $\operatorname{dist}(f)$ die Länge eines kürzesten Weges vom der Facette f entsprechenden Dualknoten zum f_0 entsprechenden Dualknoten, und $l := \max_{f \in F} \operatorname{dist}(f)$. Für $1 \leq i \leq l$ sei C_i die Vereinigung der einfachen Kreise in G so, dass $\operatorname{dist}(f) \geq i$ für alle Facetten f im Inneren und $\operatorname{dist}(f) < i$ für alle Facetten f im Äußeren eines Kreises aus C_i gilt.

Aufgabe: Geben Sie einen Algorithmus mit linearer Laufzeit an, der zu einem gegebenen Graphen G mit fester Einbettung die Kantenmengen $C_1, \ldots, C_l$ bestimmt.

2 Spezialfall von s-t-Wegen

Geben Sie einen einfachen Algorithmus an, der folgendes Problem in Linearzeit löst:

Gegeben ein planarer Graph G mit fester Einbettung und ausgezeichneten Knoten s und t, die an der äußeren Facette liegen, bestimme eine maximale Anzahl von paarweise kantendisjunkten s-t-Wegen in G.

Hinweis: Ein Algorithmus für dieses Problem benötigt keinen der komplizierten Schritte, die der in der Vorlesung für das allgemeine kantendisjunkte Menger-Problem in planaren Graphen angegebene Algorithmus ausführt. Es genügt eine Vorgehensweise ähnlich wie bei einer Graphsuche, die die gegebene Einbettung des planaren Graphen ausnutzt.

3 Mixed-Max-Cut

Im Folgenden sei der Algorithmus aus Lemma 6.6 noch einmal präzisiert: In einem 3-regulären planaren Graphen G, der keinen positiven Kreis enthält, kann ein negativer einfacher Kreis maximalen Gewichts in $\mathcal{O}(n^{3/2} \log n)$ bestimmt werden.

Schritt 1: Berechne eine Partition S, V_1, V_2 in G, die die Bedingungen des Planar-Separator-Theorems erfüllt.

Schritt 2: Berechne rekursiv negative einfache Kreise maximalen Gewichts in den durch V_1 und V_2 induzierten Subgraphen von G. Hierzu muss zunächst durch iteratives Entfernen von Grad-1-Knoten und Kompression von Grad-2-Knoten 3-Regularität hergestellt werden.

Schritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts *in G, der v_i enthält, wie folgt:*
Konstruiere zu G den Graphen G' gemäß Schritt 3 des Mixed-Max-Cut-Algorithmus. Für jeden Knoten $v_i \in S$ erweitere G' zu G'_{v_i}, indem v_i durch den durch $\{u', u'', v', v'', w', w''\}$ induzierten Subgraphen (vgl. Abb. 6.4, rechts) ersetzt wird (jeder dieser Graphen enthält also die Knoten w' und w'' genau einmal), und bestimme in $\mathcal{O}(n \log n)$ ein perfektes Matching minimalen Gewichts von G'_{v_i}; berechne den dazu korrespondierenden negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G.

Schritt 4: Gib den Kreis maximalen Gewichts unter allen konstruierten Kreisen aus. Dieser ist der gewünschte Kreis in G, da jeder einfache Kreis in G entweder ganz in G_1 oder ganz in G_2 liegt *oder (mindestens) ein $v_i \in S$ enthält.*

Aufgabe: Wenden Sie diesen Algorithmus schrittweise auf den nachfolgenden Graphen an.

Hinweise: Wählen Sie dabei für die Separatormenge S in Schritt 2 die durch fettere Quadrate bezeichneten Knoten. Subroutinen wie das Finden eines Matchings brauchen nicht detailliert nachvollzogen, sondern können ‚einfach angegeben' werden.