

## Zweites Übungsblatt

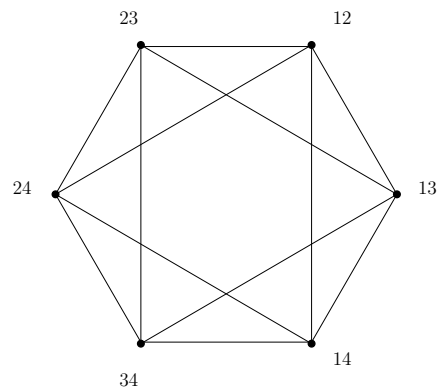
**Ausgabe:** 3. Mai 2017  
**Besprechung:** 15. Mai 2017

### 1 Maximal planare Graphen und Triangulierungen

Gegeben sei ein einfacher Graph  $G$  mit einer planaren Einbettung.  $G$  heißt *maximal planar*, falls keine Kante so zu  $G$  hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt.  $G$  heißt *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt. Zeigen Sie, dass  $G$  genau dann maximal planar ist, wenn  $G$  trianguliert ist.

### 2 Der Petersengraph

**Definition:** Der Graph  $T_n$  hat als Knotenmenge die zweielementigen Teilmengen der Menge  $\{1, \dots, n\}$ . Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist. Die Abbildung rechts zeigt  $T_4$ . Der *Komplementgraph*<sup>1</sup>  $P$  von  $T_5$  heißt Petersengraph.



**Teil 1:** Zeichnen sie  $P$ .

**Bemerkung:** Es gibt folgende zwei Varianten des Satzes von Kuratowski.

- Ein einfacher Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er weder  $K_{3,3}$  noch  $K_5$  als Minor enthält.
- Ein einfacher Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung von  $K_{3,3}$  noch eine Unterteilung von  $K_5$  als Teilgraph enthält.

**Teil 2:** Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.

**Teil 3:** Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph  $H$  eine Unterteilung eines einfachen Graphen  $G$  als Teilgraph enthält, dann enthält  $H$  den Graphen  $G$  auch als Minor.

**Teil 4:** Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph  $H$  einen Graphen  $G$  als Minor enthält, dann enthält  $H$  auch eine Unterteilung von  $G$  als Teilgraph.

**Bitte Wenden!**

<sup>1</sup>Der Komplementgraph zu  $G = (V, E)$  ist  $\bar{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$

### 3 Außenplanare Graphen

Ein planarer Graph  $G$  heißt *außenplanar*, falls er eine planare Zeichnung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Eine äquivalente Formulierung ist, dass  $G$  genau dann außenplanar ist, wenn man zu  $G$  noch einen weiteren Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten hinzufügen kann, ohne die Planarität von  $G$  zu verletzen.

1. Zeigen Sie: Ein Graph  $G$  ist genau dann außenplanar, wenn er keine Unterteilung von  $K_4$  oder  $K_{2,3}$  enthält.
2. Zeigen Sie, dass ein außenplanarer Graph  $G$  mit  $n$  Knoten höchstens  $2n - 3$  Kanten enthält.

### 4 Selbstdualität

**Definition:**  $G$  heißt *selbstdual*, wenn  $G$  isomorph zum geometrischen Dualgraphen  $G^*$  ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen selbstdualen Graph mit  $n$  Knoten und  $m$  Kanten gilt:  $m = 2n - 2$ .
2. Geben Sie für jede natürliche Zahl  $n \geq 1$  einen selbstdualen Graphen  $G$  mit einer festen Einbettung an.

### 5 Färbung von Graphen

Für einen Graphen  $G$  bezeichnet  $\chi(G)$  die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um  $G$  so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

1. Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad  $\Delta$  gilt  $\chi(G) \leq \Delta + 1$ .
2. Versuchen Sie Familien von Graphen anzugeben, für die  $\chi(G) = \Delta + 1$  gilt.
3. Zeigen Sie: Ein Graph  $G$  ist genau dann 2-färbbar, wenn  $G$  keine Kreise ungerader Länge enthält.