

## Erstes Übungsblatt

**Ausgabe:** 25. April 2017  
**Besprechung:** 2. Mai 2017

### 1 Hyperkubus

**Definition:** Der  $n$ -dimensionale Würfel  $Q_n$  ist ein Graph mit folgenden Knoten und Kanten: Die Knotenmenge besteht aus den Wörtern der Länge  $n$  über dem Alphabet  $\{0, 1\}$ . D.h.  $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$ . Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden.

1. Wieviele Knoten hat  $Q_n$ ? Wieviele Kanten hat  $Q_n$ ?
2. Beschreiben Sie die Knotengrade der Knoten im  $Q_n$ .
3. Betten Sie  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  und  $Q_4$  (wenn möglich kreuzungsfrei) in die Ebene ein.
4. Betten Sie  $Q_4$  kreuzungsfrei auf der Oberfläche eines Torus ein.

### 2 Facettengradfolge

Gegeben ein planarer Graph  $G$  mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die  $f$  Facetten enthält. Sei  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq f$ , die Anzahl der zur Facette  $i$  inzidenten Kanten von  $G$ . Numeriere die Facetten so, dass die Folge  $(a_1, a_2, \dots, a_f)$  nichtabsteigend sortiert ist.

Kann es zu einem planaren Graph  $G$  zwei Einbettungen in die Ebene geben, sodass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

### 3 Die Schiefe

Die *Skewness* eines Graphen  $G$  ist die minimale Anzahl von Kanten, die aus  $G$  gelöscht werden müssen, damit der resultierende Graph planar ist. D.h. die Skewness eines Graphen ist Null genau dann, wenn der Graph planar ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen einfachen Graphen  $G$  mit  $n \geq 3$  Knoten und  $m$  Kanten gilt:  
$$\text{skewness}(G) \geq m - 3n + 6.$$
2. Berechnen Sie die *Skewness* von  $K_3$ ,  $K_5$ ,  $K_{3,3}$  und  $K_6$ .

**Bitte Wenden!**

## 4 Bäume

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen  $G$  mit  $n$  Knoten:

1.  $G$  ist ein Baum, d.h.  $G$  ist zusammenhängend und kreisfrei.
2.  $G$  ist zusammenhängend und hat  $n - 1$  Kanten.
3.  $G$  ist kreisfrei und hat  $n - 1$  Kanten.