

## Viertes Übungsblatt

**Ausgabe:** 30. Mai 2016  
**Besprechung:** 06. Juni 2016

### 1 Schnitte, Kreise und Bäume im Dualgraph

Zeigen Sie:

1. Sei  $G = (V, E)$  ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph  $G^*$ . Für eine Teilmenge  $E' \subseteq E$  gilt, dass der Teilgraph  $(V, E')$  von  $G$  genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph  $(V^*, (E \setminus E')^*)$  von  $G^*$  unzusammenhängend ist.
2. Sei  $G = (V, E)$  ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph  $G^* = (V^*, E^*)$ , und  $E' \subseteq E$ . Dann ist  $(V, E')$  ein aufspannender Baum von  $G$  genau dann, wenn  $(V^*, (E \setminus E')^*)$  ein aufspannender Baum von  $G^*$  ist.

### 2 Große und kleine Matchings

Geben Sie für jede natürliche Zahl  $n \geq 2$  einen zusammenhängenden Graphen mit  $n$  Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

1.  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  Kanten
2. eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

### 3 Perfektes Matching

Ein Matching  $M$  zu einem Graphen  $G$  heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von  $G$  zu einer Kante aus  $M$  inzident ist. Für welche  $n \geq 1$  und  $m \geq 1$  besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

1.  $P_n$  (der Graph bestehend aus einem einfachen Weg mit  $n$  Knoten)
2.  $C_n$  (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit  $n$  Knoten)
3.  $Q_n$
4.  $K_n$
5.  $K_{n,m}$

### 4 Adjazenztest in planaren Graphen

Sei  $G$  ein planarer Graph mit  $n$  Knoten. Geben Sie eine Datenstruktur mit linearer Größe an, mit deren Hilfe nach linearer Vorberechnung Adjazenzen von Knoten in konstanter Zeit abgefragt werden können. Das heißt, gegeben zwei Knoten  $u$  und  $v$  von  $G$ , kann die Frage ob die Kante  $\{u, v\}$  in  $G$  ist, in konstanter Zeit beantwortet werden.

**Hinweis:** Richten Sie die Kanten so, dass jeder Knoten höchstens fünf ausgehende Kanten hat.