Zweites Übungsblatt

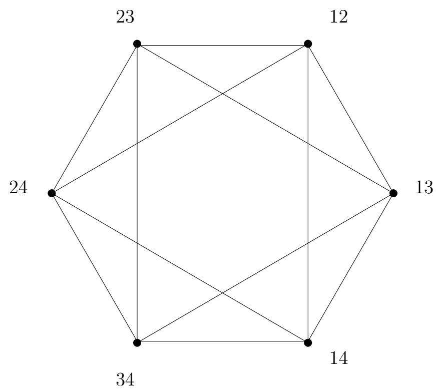
Ausgabe: 25. April 2016
Besprechung: 17. Mai 2016

1 Maximal planare Graphen und Triangulierungen

Gegeben sei ein einfacher Graph G mit einer planaren Einbettung. G heißt *maximal planar*, falls keine Kante so zu G hinzugefügt werden kann, dass die Einbettung planar und der Graph einfach bleibt. G heisst *trianguliert*, falls jede Facette an genau drei Knoten angrenzt. Zeigen Sie, dass G genau dann maximal planar ist, wenn G trianguliert ist.

2 Der Petersengraph

Definition: Der Graph T_n hat als Knotenmenge die zweielementigen Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn der Schnitt der zugehörigen Mengen nicht leer ist. Die Abbildung rechts zeigt T_4. Der *Komplementgraph*[1] P von T_5 heißt Petersengraph.



Teil 1: Zeichnen sie P.

Bemerkung: Es gibt folgende zwei Varianten des Satzes von Kuratowski.

- Ein einfacher Graph G ist genau dann planar, wenn er weder $K_{3,3}$ noch K_5 als Minor enthält.
- Ein einfacher Graph G ist genau dann planar, wenn er weder eine Unterteilung von $K_{3,3}$ noch eine Unterteilung von K_5 als Teilgraph enthält.

Teil 2: Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass der Petersengraph nicht planar ist.

Teil 3: Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H eine Unterteilung eines einfachen Graphen G als Teilgraph enthält, dann enthält H den Graphen G auch als Minor.

Teil 4: Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn ein einfacher Graph H einen Graphen G als Minor enthält, dann enthält H auch eine Unterteilung von G als Teilgraph.

Bitte Wenden!

[1] Der Komplementgraph zu $G = (V, E)$ ist $\overline{G} = (V, \binom{V}{2} \setminus E)$

3 Außenplanare Graphen

Ein planarer Graph G heißt *außenplanar*, falls er eine planare Zeichnung besitzt, in der jeder Knoten auf dem Rand der äußeren Facette liegt. Eine äquivalente Formulierung ist, dass G genau dann außenplanar ist, wenn man zu G noch einen weiteren Knoten mit Kanten zu allen vorhandenen Knoten hinzufügen kann, ohne die Planarität von G zu verletzen.

1. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann außerplanar, wenn er keine Unterteilung von K_4 oder $K_{2,3}$ enthält.
2. Zeigen Sie, dass ein außerplanarer Graph G mit n Knoten höchstens $2n-3$ Kanten enthält.

4 Selbstdualität

Definition: G heißt *selbstdual*, wenn G isomorph zum geometrischen Dualgraphen $G^\star$ ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen selbstdualen Graph mit n Knoten und m Kanten gilt: $m = 2n-2$.
2. Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ einen selbstdualen Graphen G mit einer festen Einbettung an.

5 Färbung von Graphen

Für einen Graphen G bezeichnet $\chi(G)$ die minimale Anzahl von Farben, die nötig ist um G so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

1. Zeigen Sie: Für jeden Graphen mit Maximalgrad Δ gilt $\chi(G) \leq \Delta + 1$.
2. Versuchen Sie Familien von Graphen anzugeben, für die $\chi(G) = \Delta + 1$ gilt.
3. Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann 2-färbbar, wenn G keine Kreise ungerader Länge enthält.