Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen
Übung am 21.06.2016

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Karlsruher Institut für Technologie

4. Übungsblatt

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

1. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star$. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^\star, (E \setminus E')^\star)$ von $G^\star$ unzusammenhängend ist.
2. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star = (V^\star, E^\star)$, und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^\star, (E \setminus E')^\star)$ ein aufspannender Baum von $G^\star$ ist.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2

Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

1. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ Kanten
2. eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 3

Ein Matching M zu einem Graphen G heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist. Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

1. P_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Weg mit n Knoten)
2. C_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit n Knoten)
3. Q_n
4. K_n
5. $K_{n,m}$

Aufgabe 4

Sei G ein planarer Graph mit n Knoten. Geben Sie eine Datenstruktur mit linearer Größe an, mit deren Hilfe nach linearer Vorberechnung Adjazenzen von Knoten in konstanter Zeit abgefragt werden können.
Das heißt, gegeben zwei Knoten u und v von G, kann die Frage ob die Kante $\{u, v\}$ in G ist, in konstanter Zeit beantwortet werden.

Hinweis: Richten Sie die Kanten so, dass jeder Knoten höchstens fünf ausgehende Kanten hat.

5. Übungsblatt

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Mixed-Max-Cut

Definition: Mixed-Max-Cut
Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit einer Kantengewichtsfunktion $w\colon E \to K$, wobei $K = \mathbb{R}$. Finde einen Schnitt $S \subseteq E$ mit $w(S)$ maximal.

Definition: Mixed-Max-Cycle
Gegeben sei ein planarer Graph $G = (V, E)$ mit einer Kantengewichtsfunktion $w\colon E \to K$, wobei $K = \mathbb{R}$. Finde eine nichtleere gerade Menge $E' \subseteq E$ mit $w(E')$ maximal.

Mixed-Max-Cut auf G entspricht Mixed-Max-Cycle auf Dualgraph $G^\star$

Kantenmenge $E' \subseteq E$ heißt *gerade*, wenn in dem durch E' induzierten Subgraph von G jeder Knoten geraden Grad hat.

Mixed-Max-Cut

Schritt 1: Trianguliere G in $O(n)$ und ordne den hinzugefügten Kanten Gewicht 0 zu.

Schritt 2: Berechne in $O(n)$ den Dualgraph $G^* = (V^*, E^*)$ zu der Triangulierung von G, wobei $w(e^*) := w(e)$ mit e^* Dualkante zu e.

Schritt 3: Konstruiere aus G^* in $O(n)$ einen Graph $G' = (V', E')$ derart, dass ein perfektes Matching minimalen Gewichts in G' eine gerade Menge maximalen Gewichts in G^* induziert.

Schritt 4: Konstruiere in $O(n^{\frac{3}{2}} \log n)$ ein perfektes Matching M minimalen Gewichts in G'.

Schritt 5: Falls M eine nichtleere gerade Menge in E^* induziert, gib den dazu dualen Schnitt in G aus. Ansonsten berechne in $O(n^{\frac{3}{2}} \log n)$ aus M eine nichttriviale gerade Menge in G^* maximalen Gewichts.

Mixed-Max-Cut

Schritt 1: Trianguliere G in $O(n)$ und ordne den hinzugefügten Kanten Gewicht 0 zu.

Schritt 2: Berechne in $O(n)$ den Dualgraph $G^* = (V^*, E^*)$ zu der Triangulierung von G, wobei $w(e^*) := w(e)$ mit e^* Dualkante zu e.

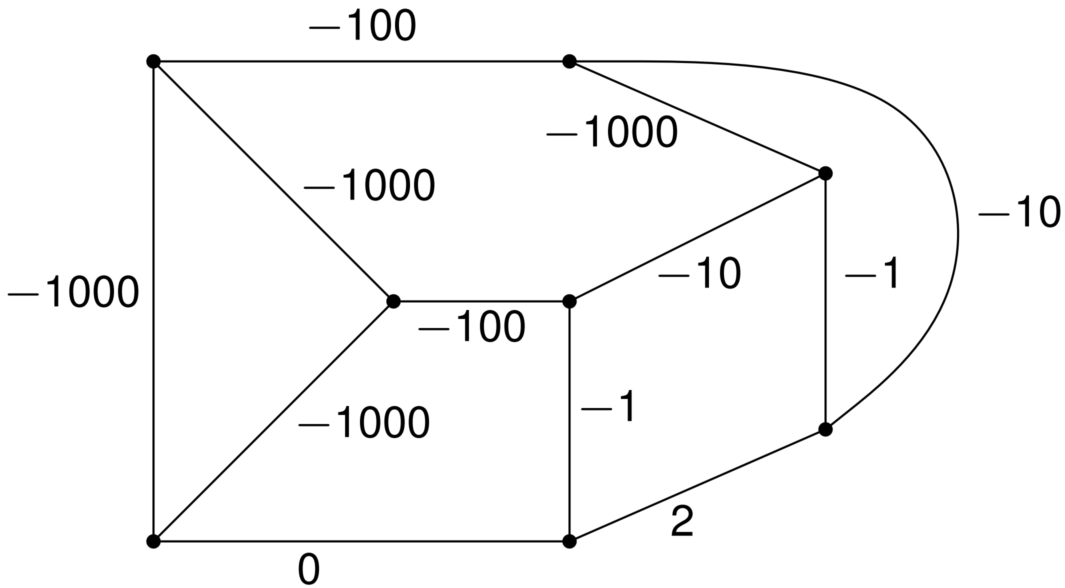
Schritt 3: Konstruiere aus G^* in $O(n)$ einen Graph $G' = (V', E')$ derart, dass ein perfektes Matching minimalen Gewichts in G' eine gerade Menge maximalen Gewichts in G^* induziert.

Schritt 4: Konstruiere in $O(n^{\frac{3}{2}} \log n)$ ein perfektes Matching M minimalen Gewichts in G'.

Schritt 5: Falls M eine nichtleere gerade Menge in E^* induziert, gib den dazu dualen Schnitt in G aus. Ansonsten berechne in $O(n^{\frac{3}{2}} \log n)$ aus M eine nichttriviale gerade Menge in G^* maximalen Gewichts.

Aufgabe 3

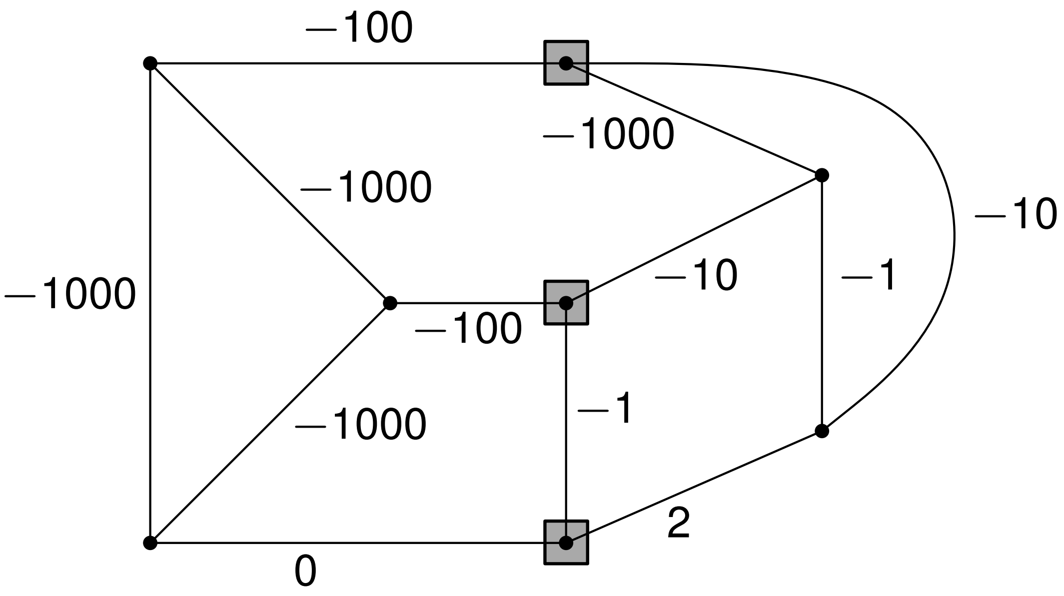
Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.



Aufgabe 3

Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

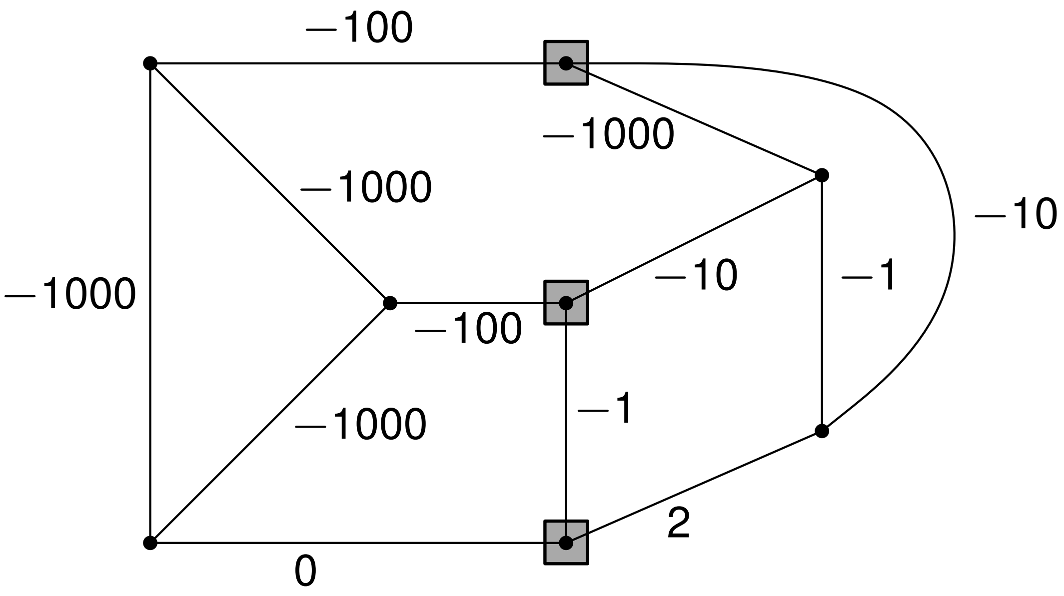
Teilschritt 1: Berechne eine Partition S, V_1, V_2 in G (Planar-Separator).



Aufgabe 3

Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

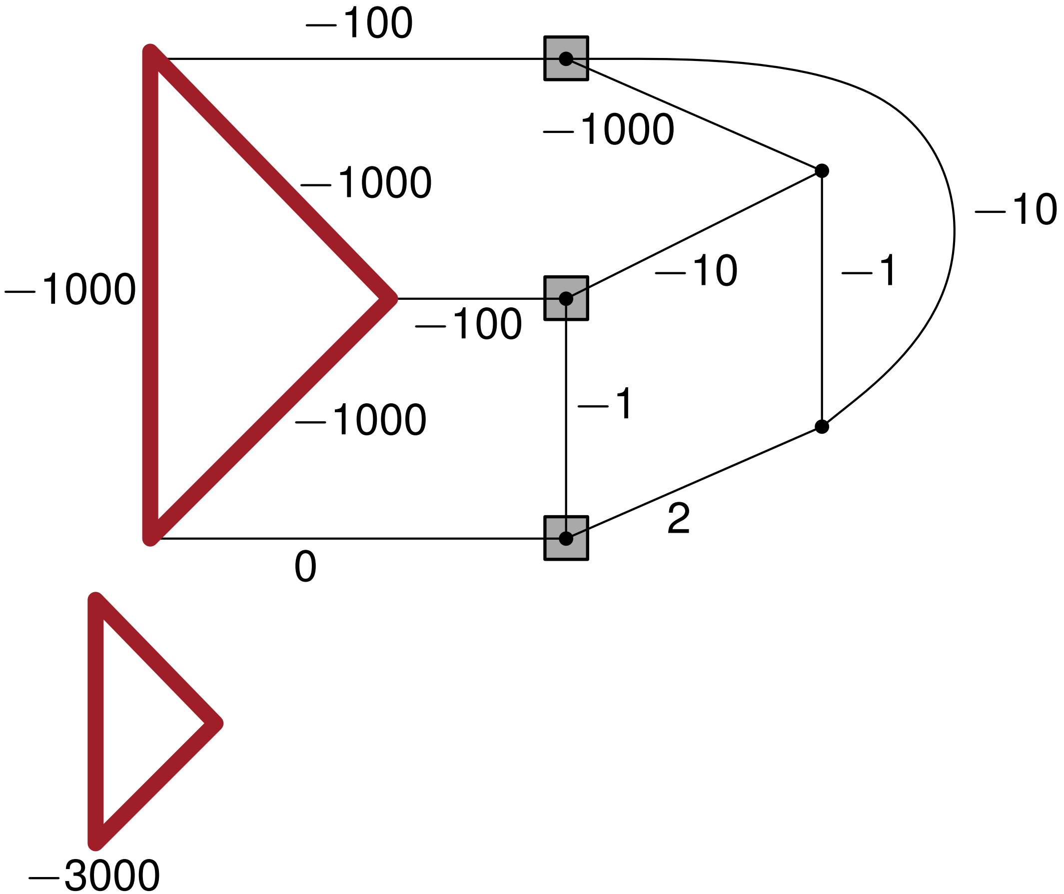
Teilschritt 2: Berechne rekursiv negative einfache Kreise maximalen Gewichts in den durch V_1 und V_2 induzierten Subgraphen von G.



Aufgabe 3

Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

Teilschritt 2: Berechne rekursiv negative einfache Kreise maximalen Gewichts in den durch V_1 und V_2 induzierten Subgraphen von G.

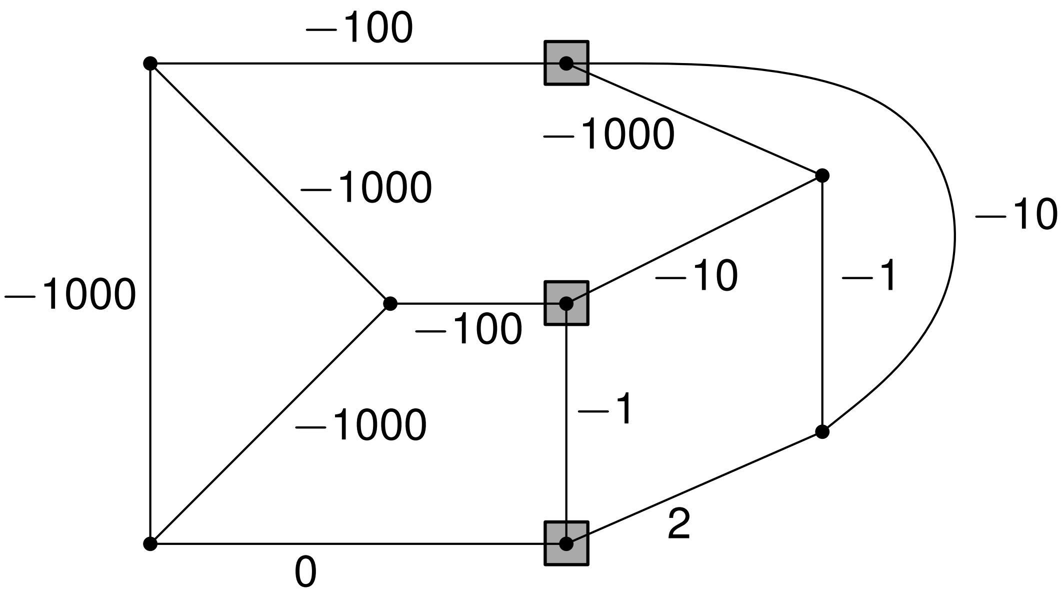


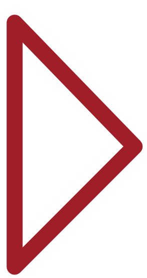
Aufgabe 3

Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

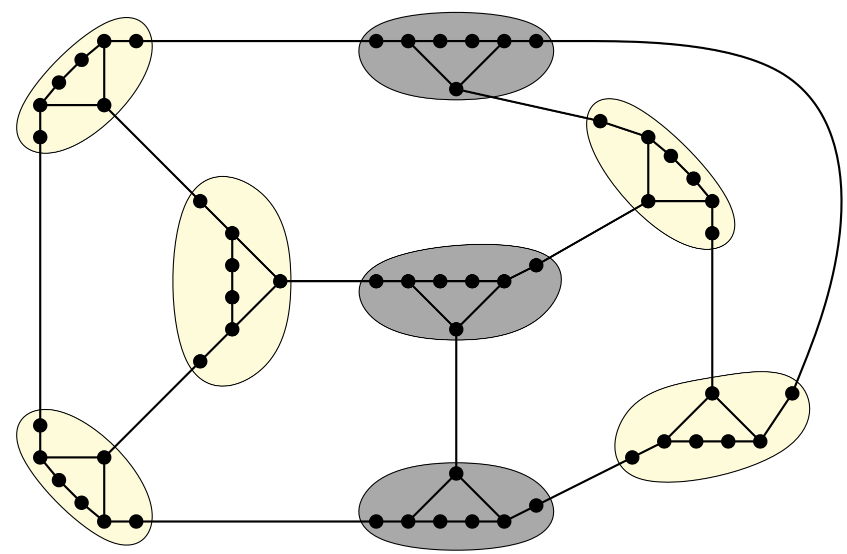
Teilschritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G, der v_i enthält:

Konstruiere Graphen G' gemäß Schritt 3 des Mixed-Max-Cut-Algorithmus.





−3000

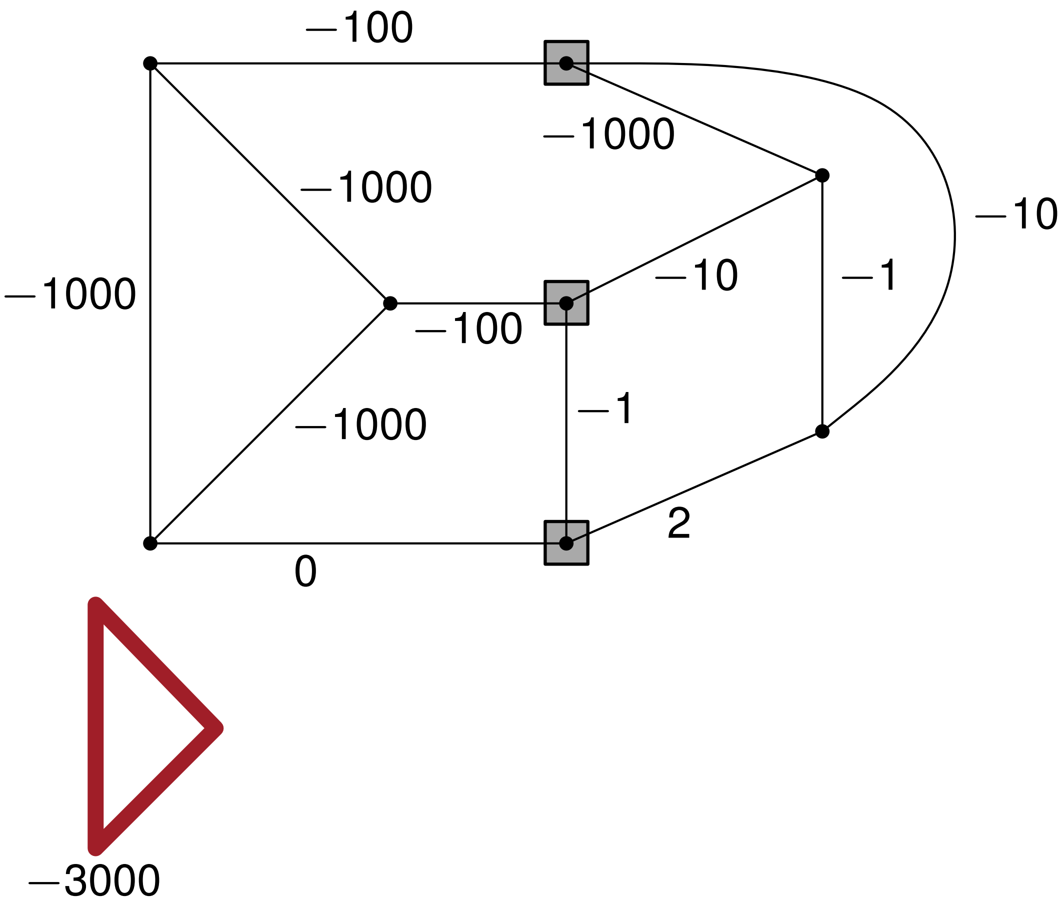


Aufgabe 3

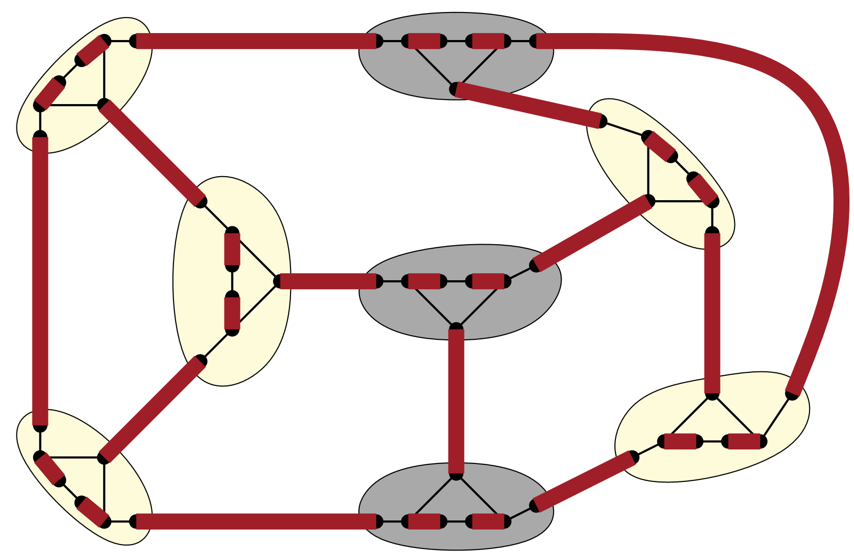
Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

Teilschritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G, der v_i enthält:

Konstruiere Graphen G' gemäß Schritt 3 des Mixed-Max-Cut-Algorithmus.



Perfektes Matching minimalen Gewichts aus Schritt 4 bekannt.



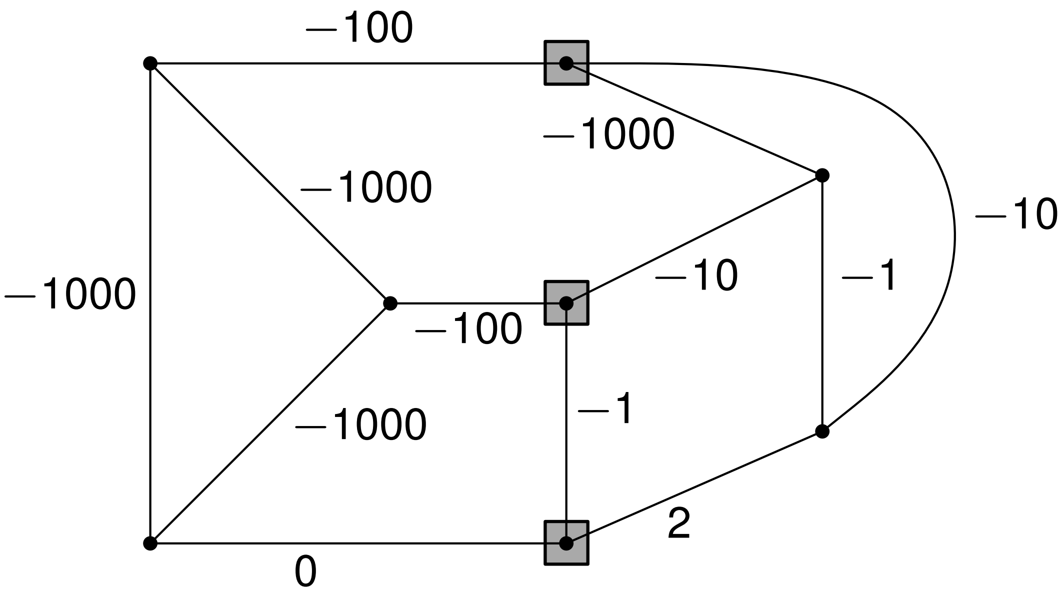
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

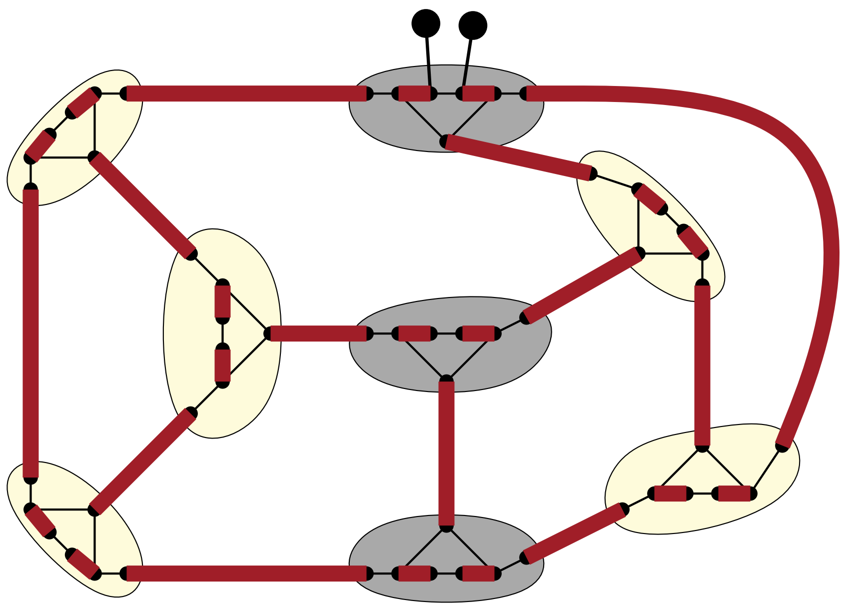
Aufgabe 3

Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

Teilschritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G, der v_i enthält:

Erweitere G' um die Knoten w und w'





Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

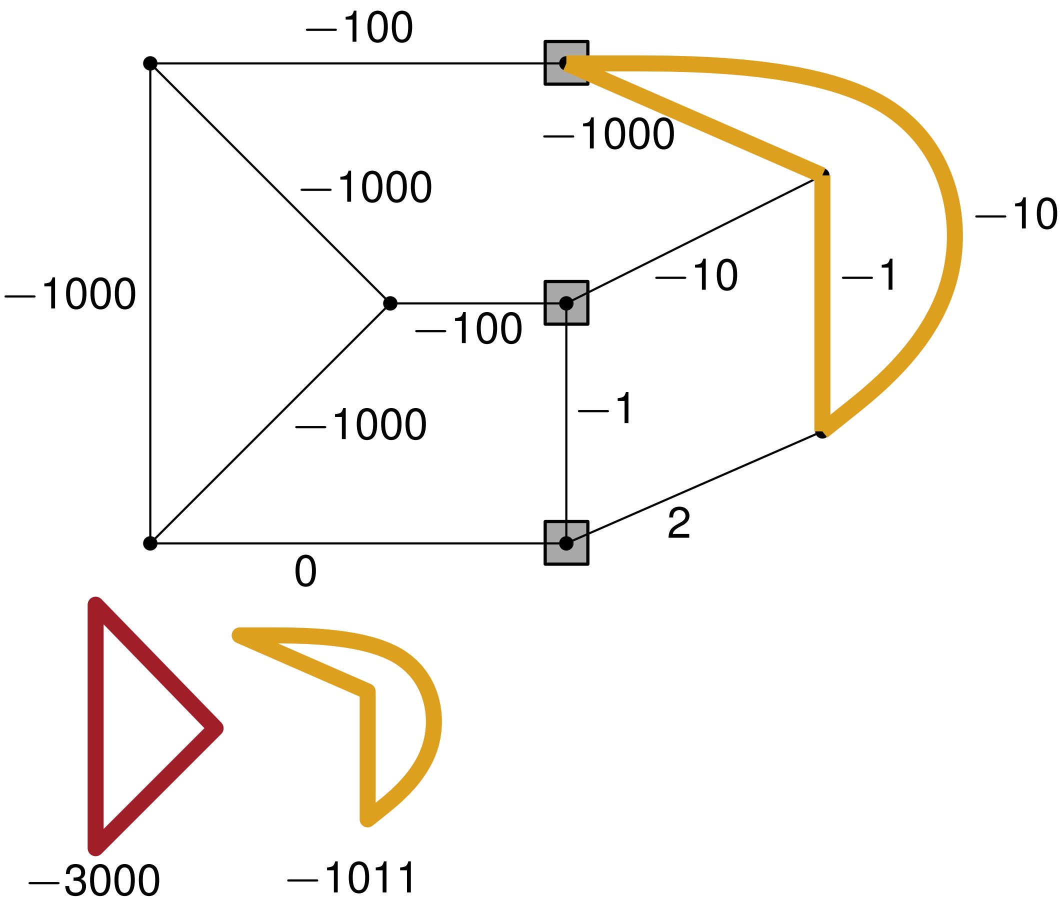
Aufgabe 3

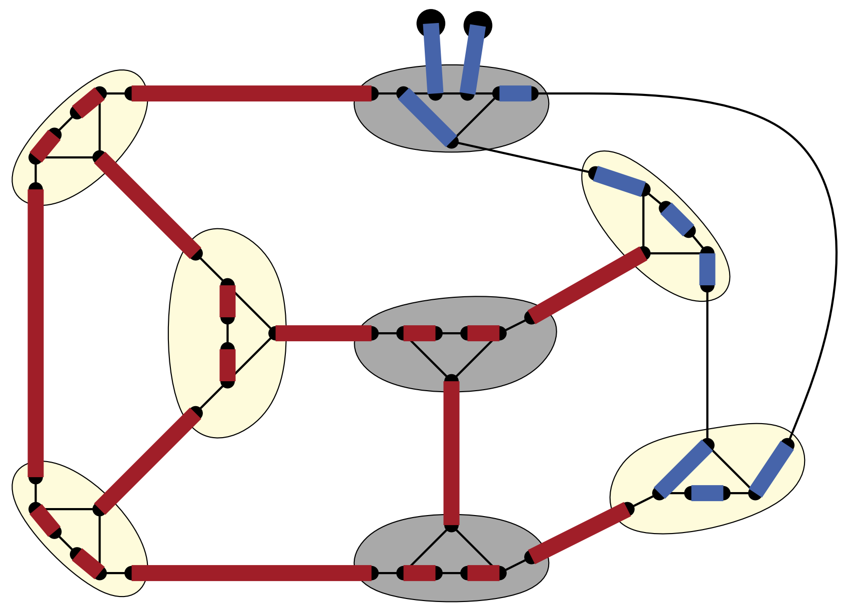
Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

Teilschritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G, der v_i enthält:

Berechne perfektes Matching: Finde erhöhende Wege von w und w'

$\rightarrow$ induziert Kreis.



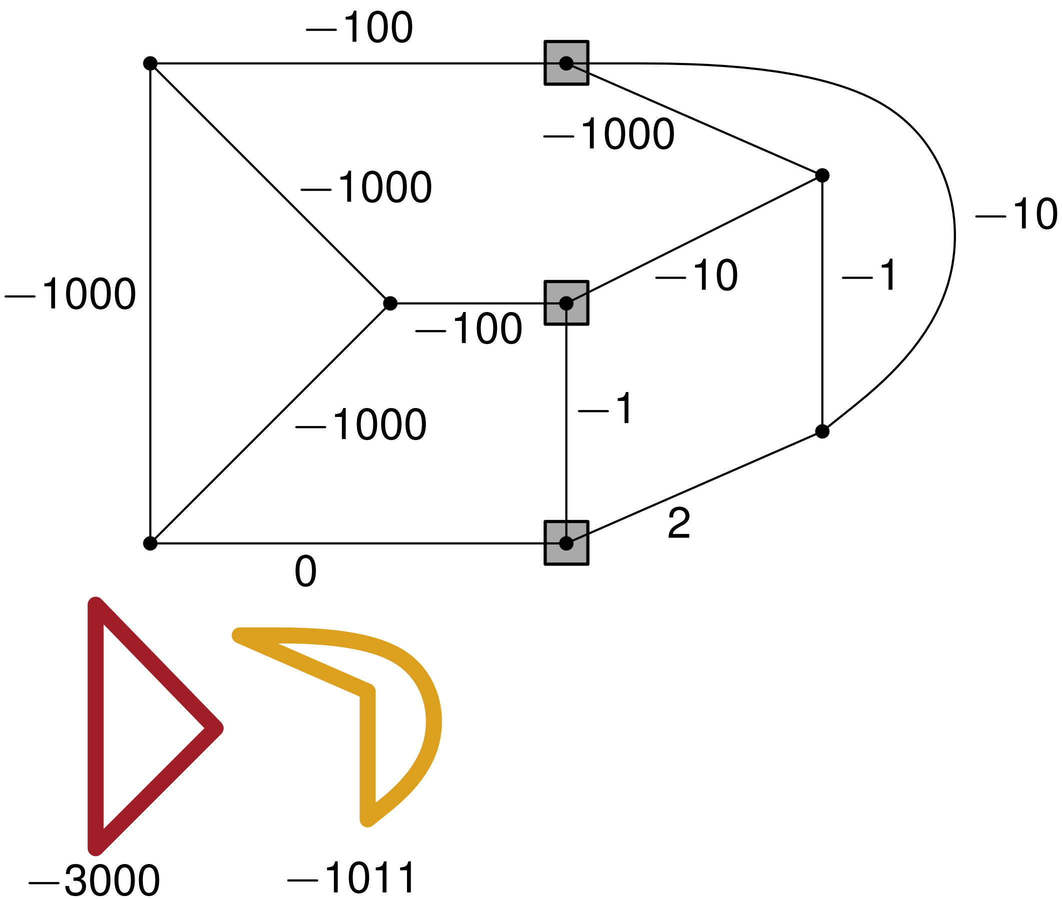


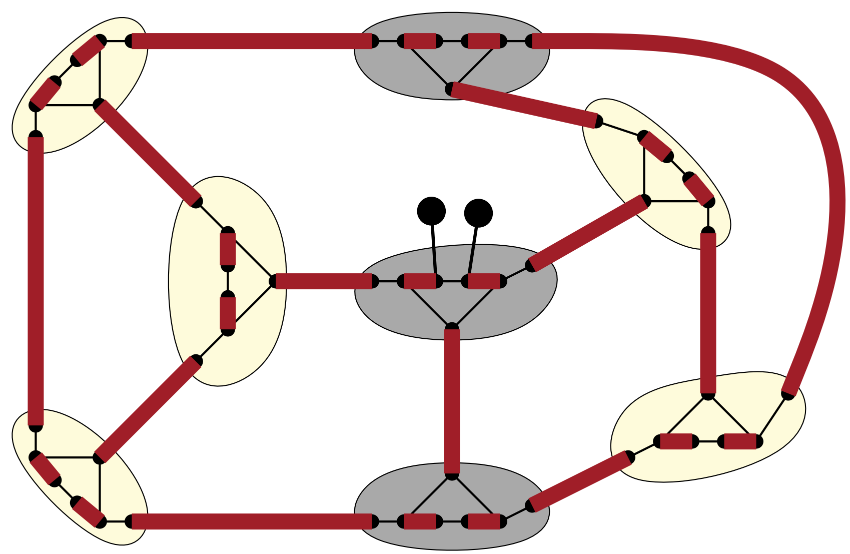
Aufgabe 3

Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

Teilschritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G, der v_i enthält:

Erweitere G' um die Knoten w und w'





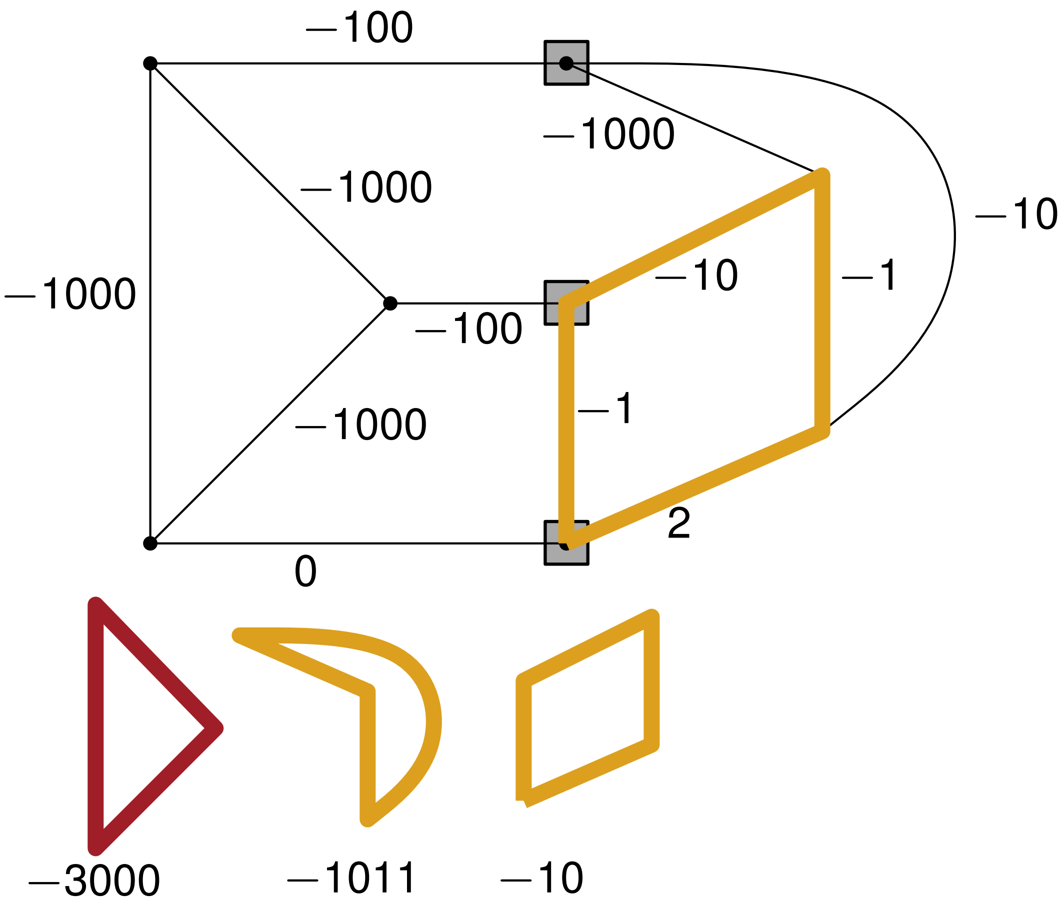
Aufgabe 3

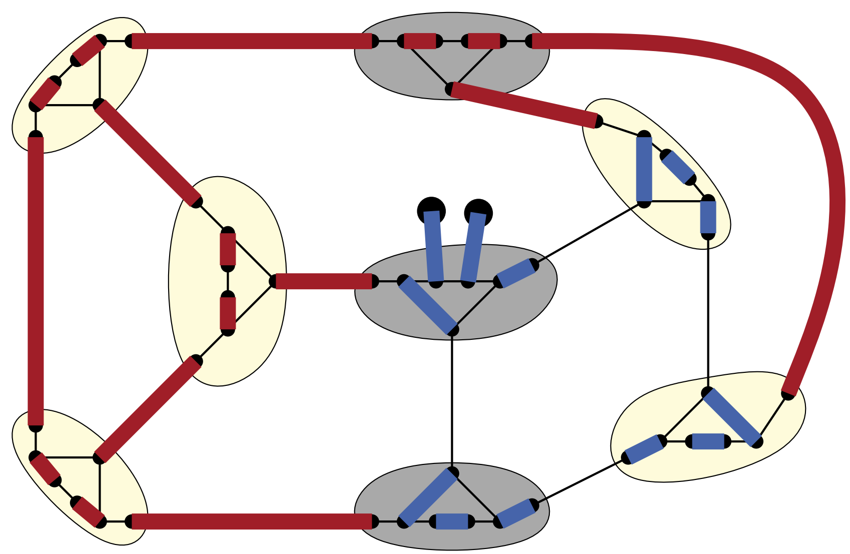
Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

Teilschritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G, der v_i enthält:

Berechne perfektes Matching: Finde erhöhende Wege von w und w'

$\rightarrow$ induziert Kreis.



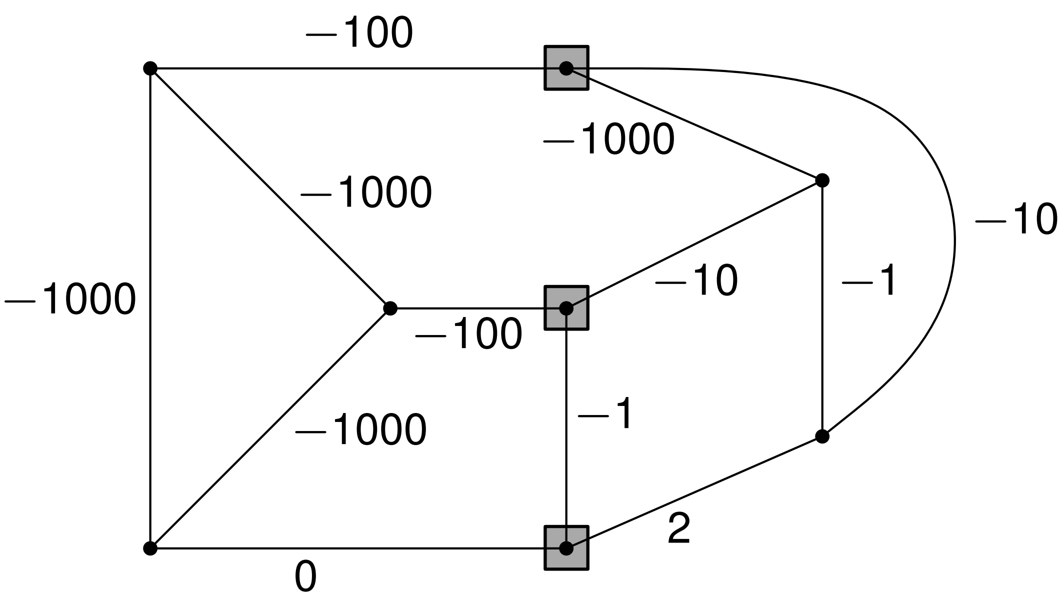


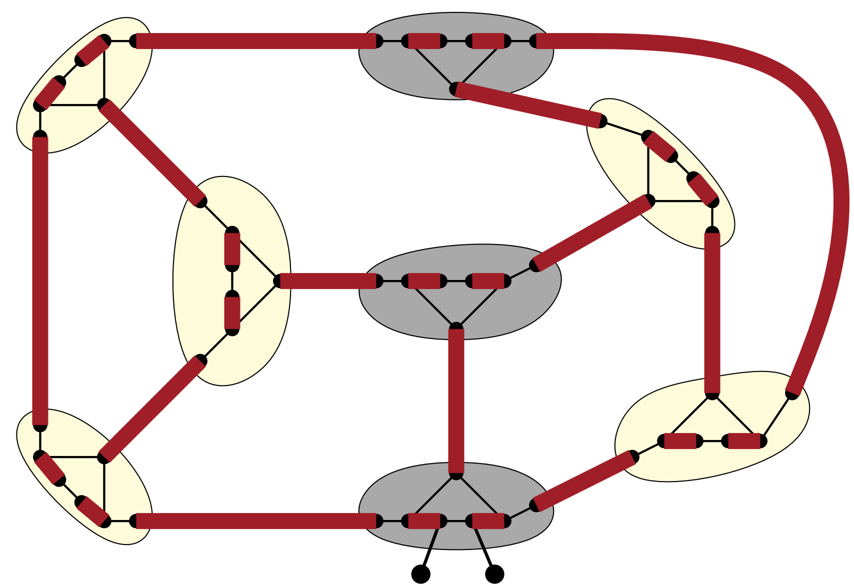
Aufgabe 3

Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

Teilschritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G, der v_i enthält:

Erweitere G' um die Knoten w und w'





Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

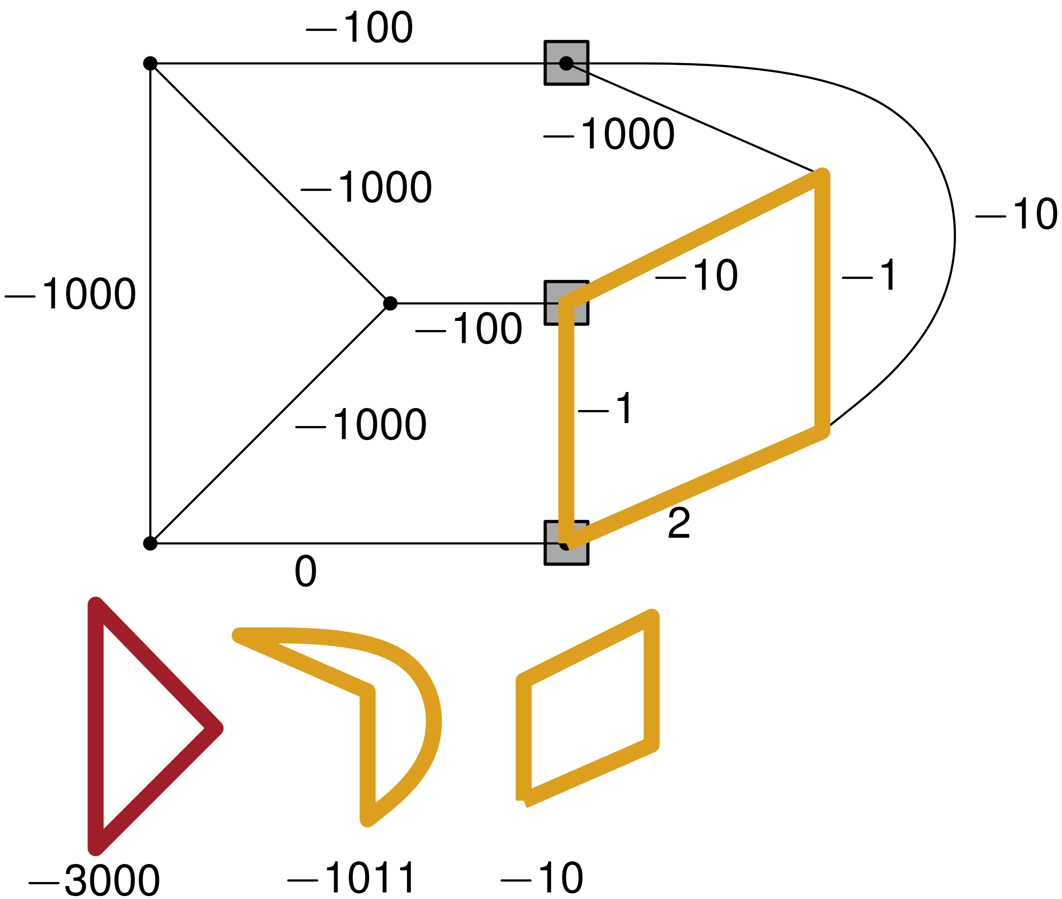
Aufgabe 3

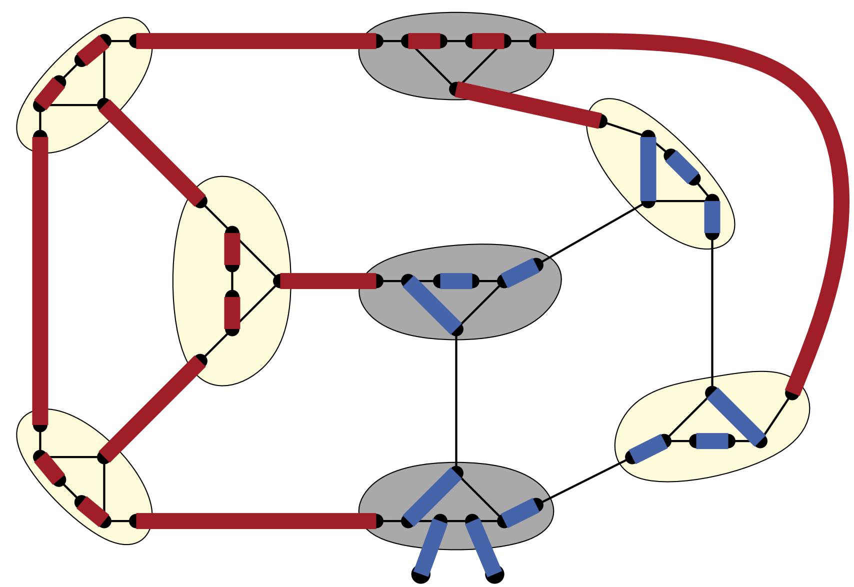
Annahme: G ist 3-regulär und enthält keinen positiven Kreis.

Teilschritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G, der v_i enthält:

Berechne perfektes Matching: Finde erhöhende Wege von w und w'

$\rightarrow$ induziert Kreis.





Aufgabe 1

$F =$	Menge der Facetten
$f_0 =$	äußere Facette von G.
$\mathrm{dist}(f) =$	Länge eines kürzesten Weges vom der Facette f entsprechenden Dualknoten zum f_0 entsprechenden Dualknoten.
$l :=$	$\max_{f \in F} \mathrm{dist}(f)$.

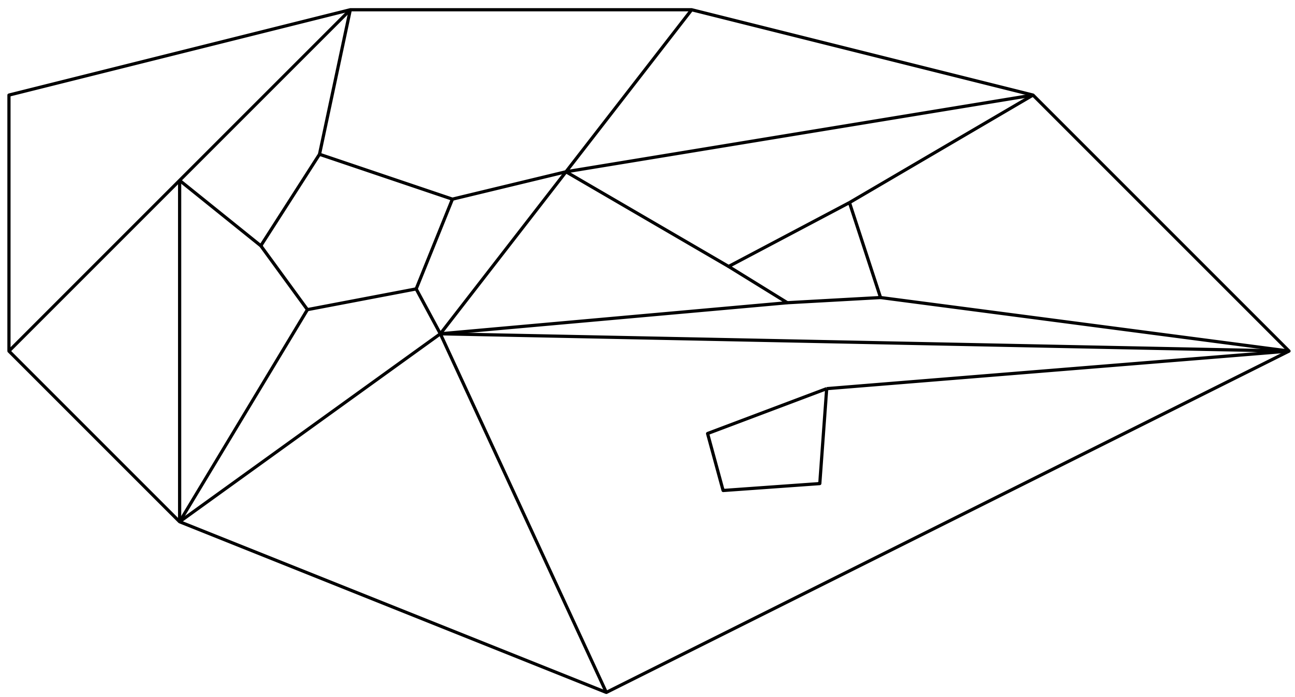
Aufgabe 1

F =	Menge der Facetten
f_0 =	äußere Facette von G.
$\text{dist}(f)$ =	Länge eines kürzesten Weges vom der Facette f entsprechenden Dualknoten zum f_0 entsprechenden Dualknoten.
l :=	$\max_{f \in F} \text{dist}(f)$.

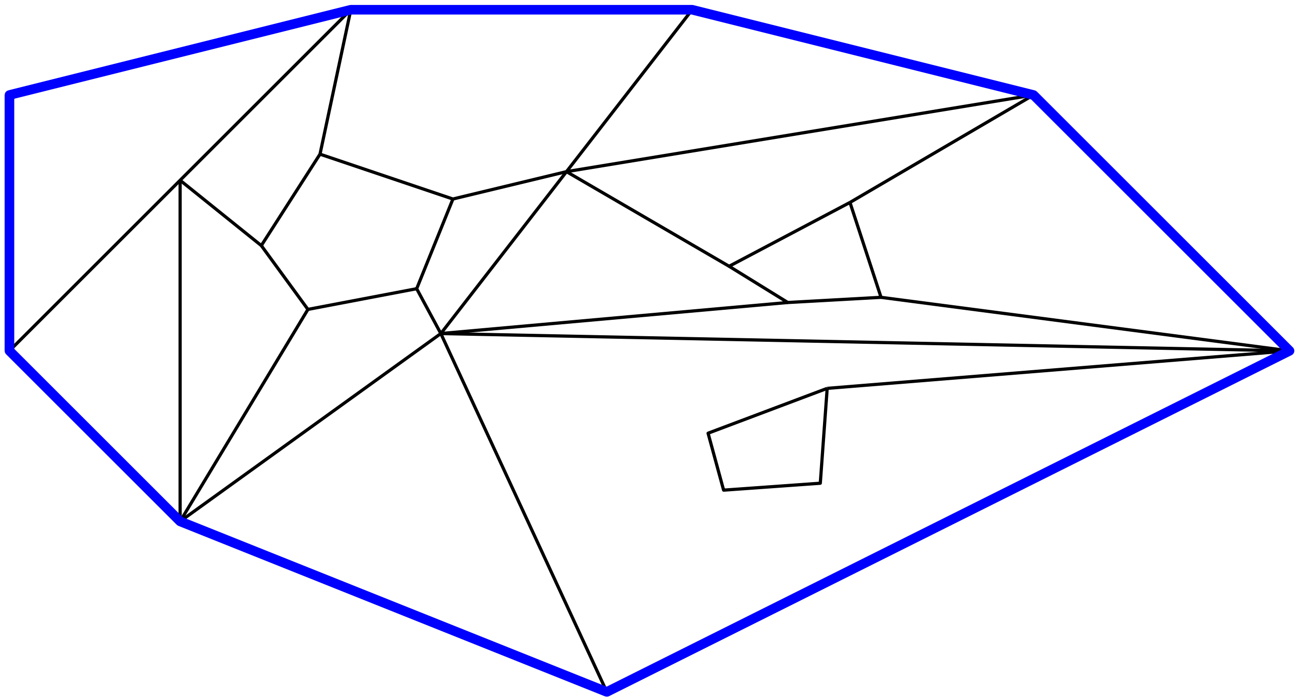
In Schritt 2 des Algorithmus für das kantendisjunkte Menger-Problem werden in einem planaren Graphen G mit fester Einbettung einfache Kreise $C_1, \ldots, C_l$ wie folgt konstruiert:

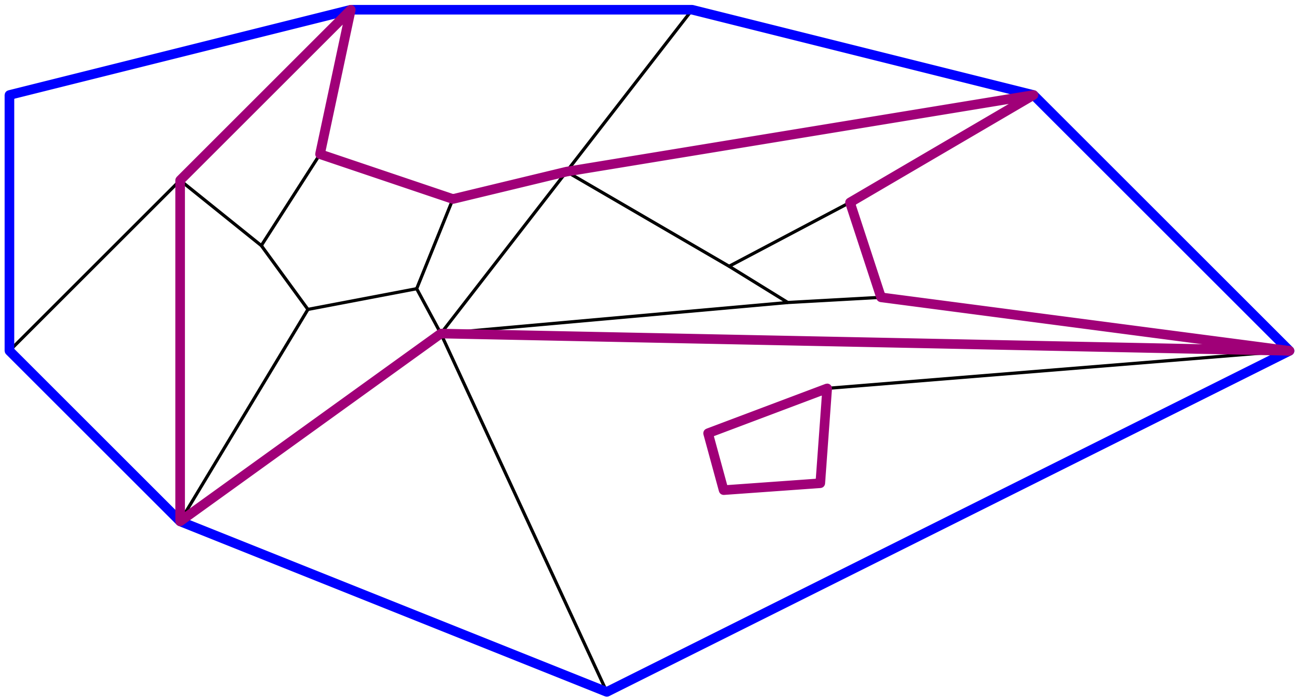
Für $1 \leq i \leq l$ sei C_i die Vereinigung der einfachen Kreise in G so, dass $\text{dist}(f) \geq i$ für alle Facetten f im Inneren und $\text{dist}(f) < i$ für alle Facetten f im Äußeren eines Kreises aus C_i gilt.

Aufgabe: Geben Sie einen Algorithmus mit linearer Laufzeit an, der zu einem gegebenen Graphen G mit fester Einbettung die Kantenmengen $C_1, \ldots, C_l$ bestimmt.

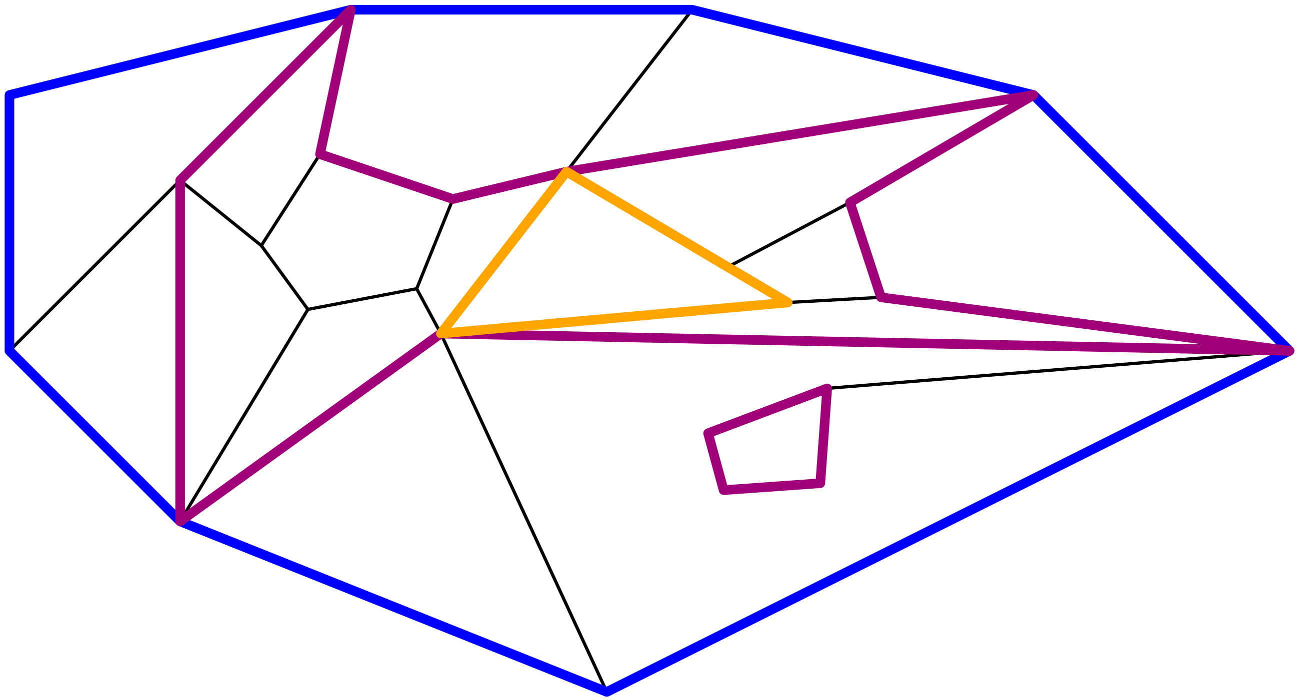


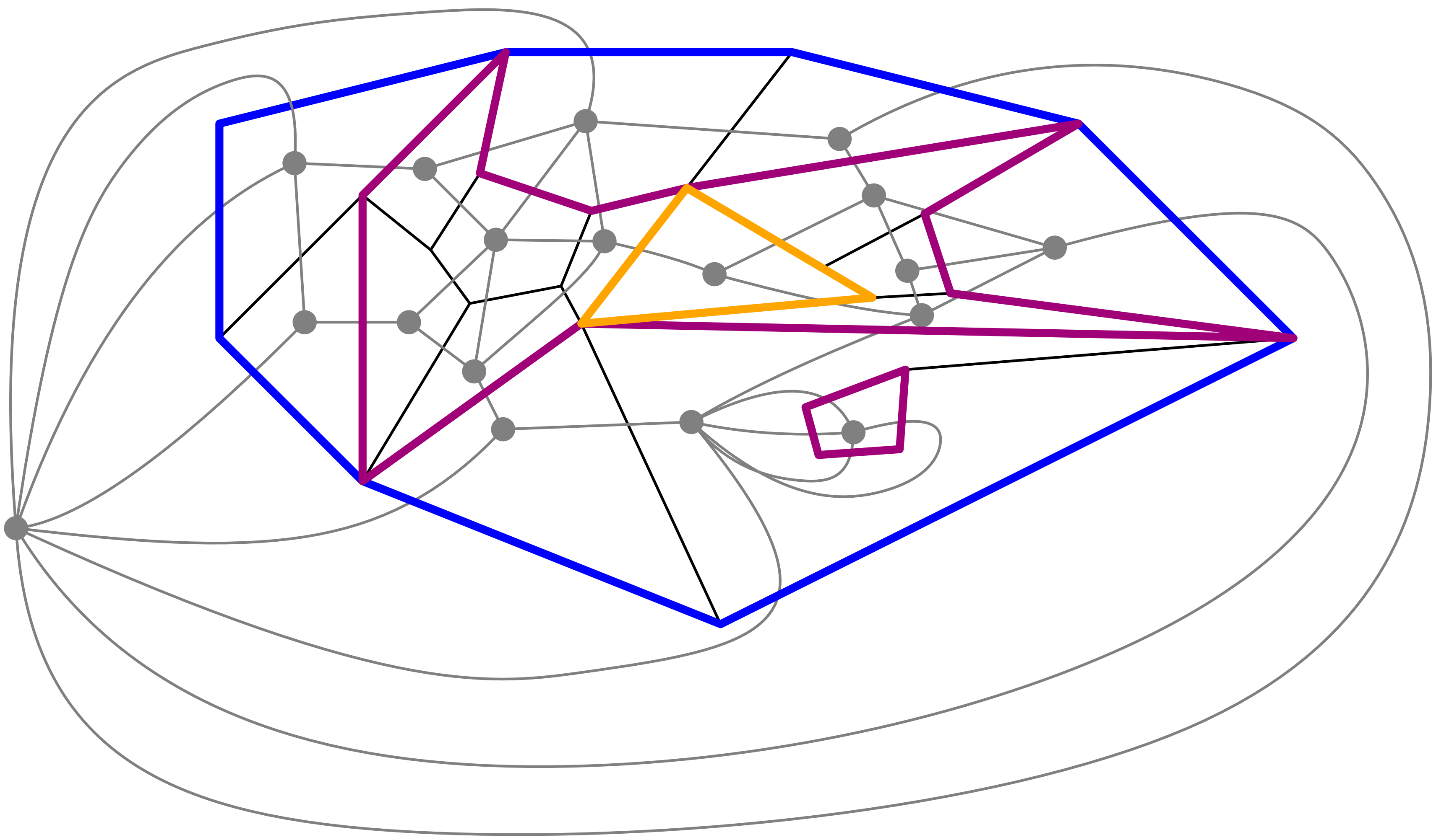
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

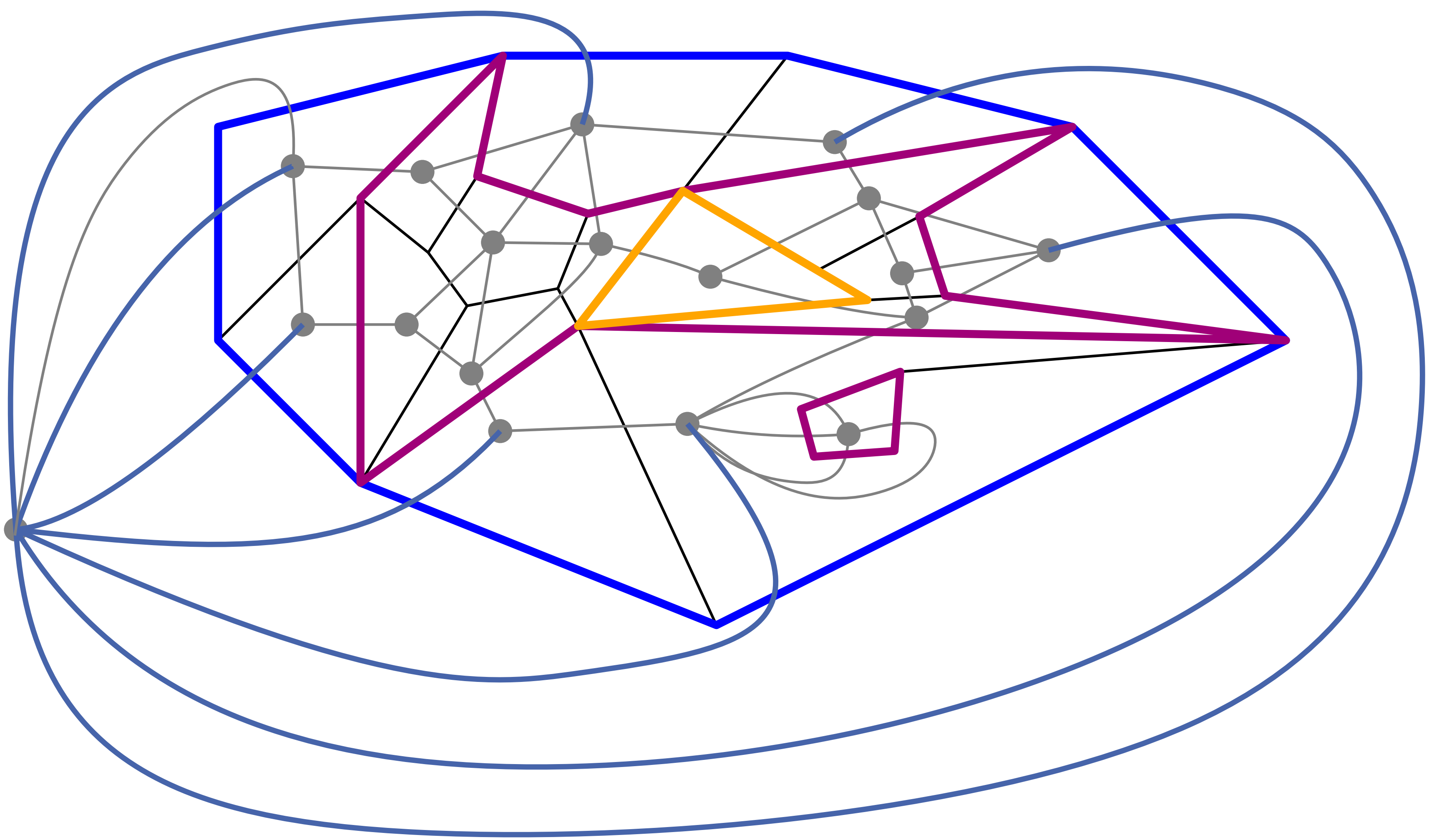




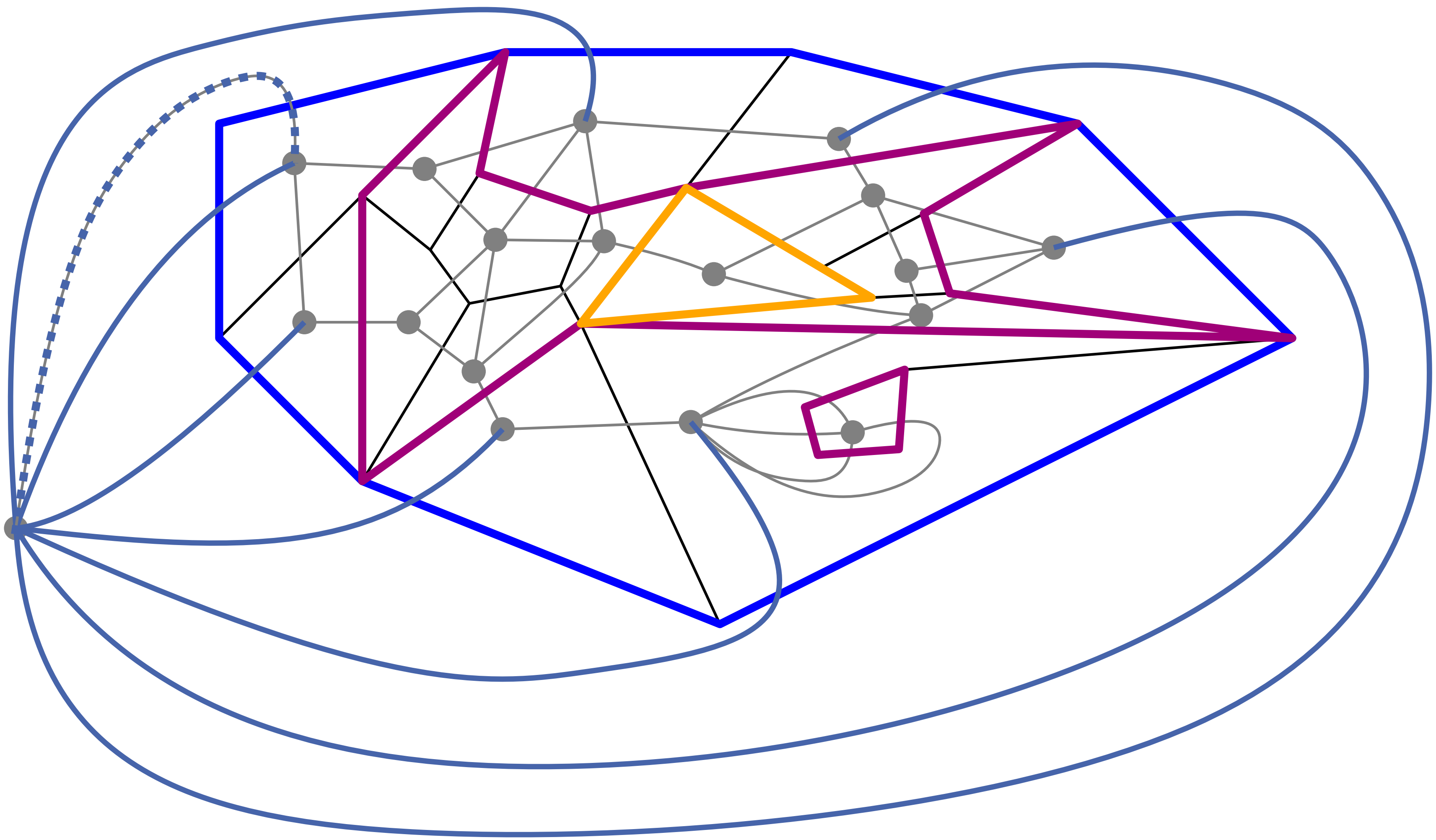
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

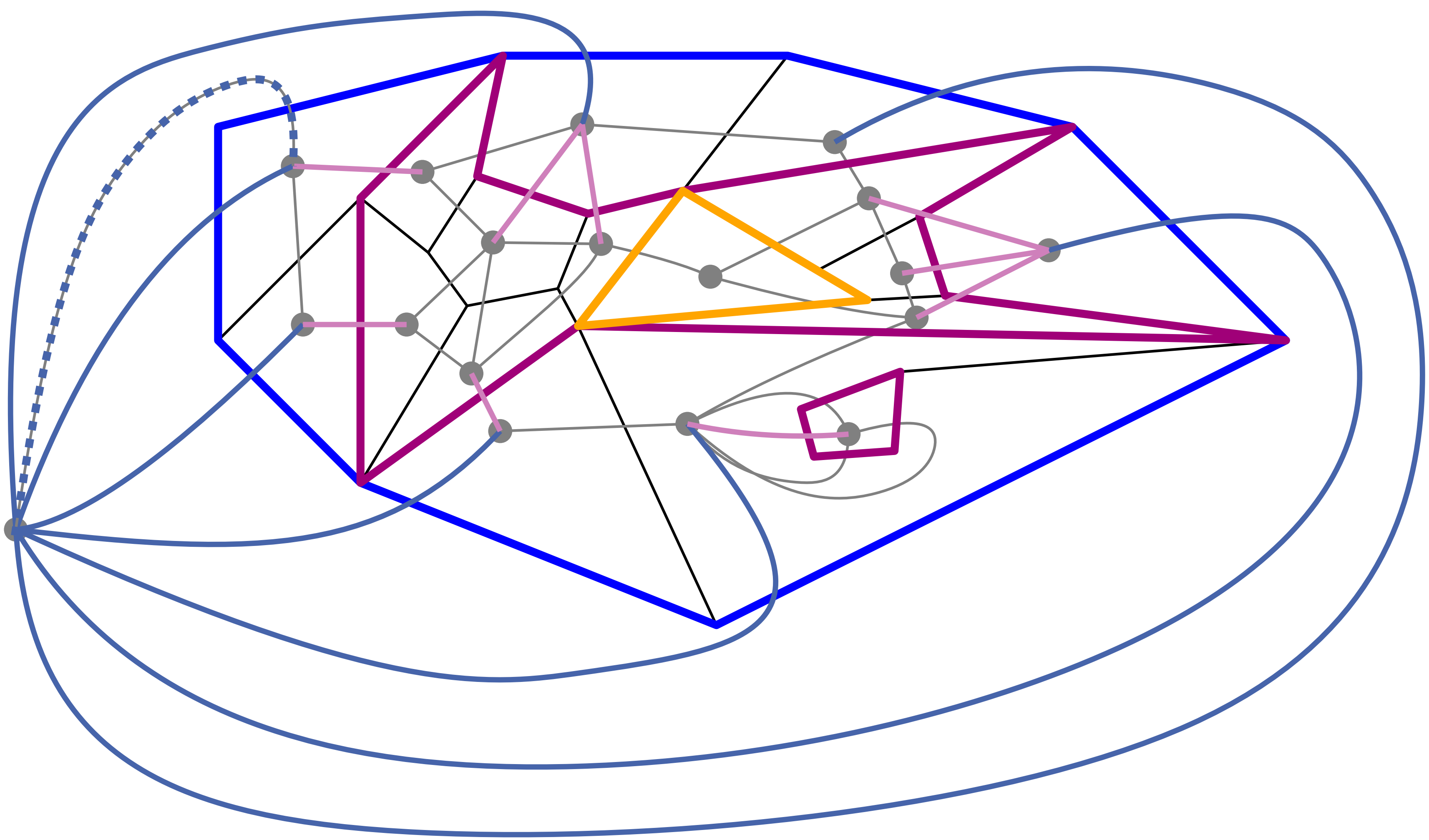


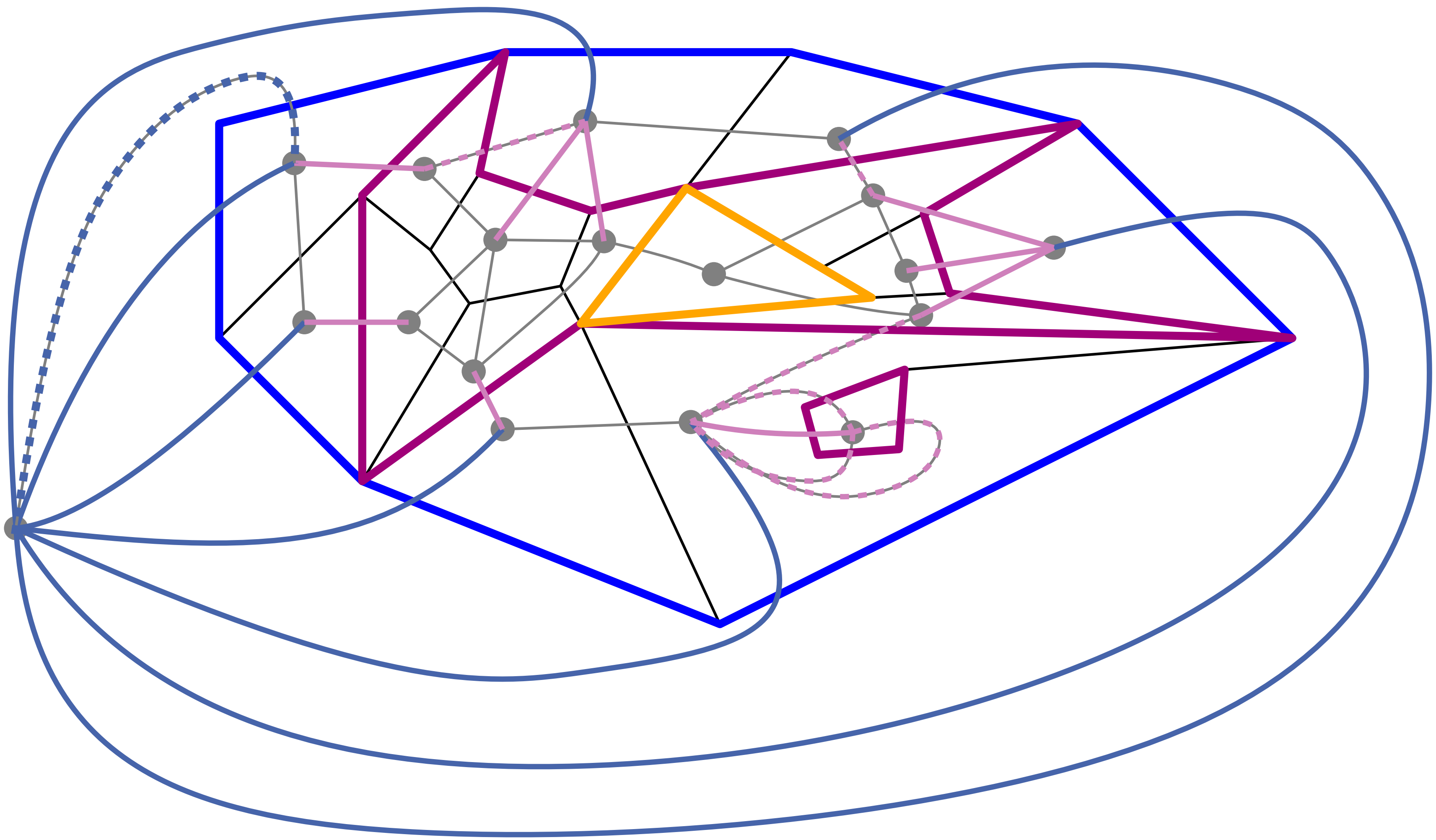




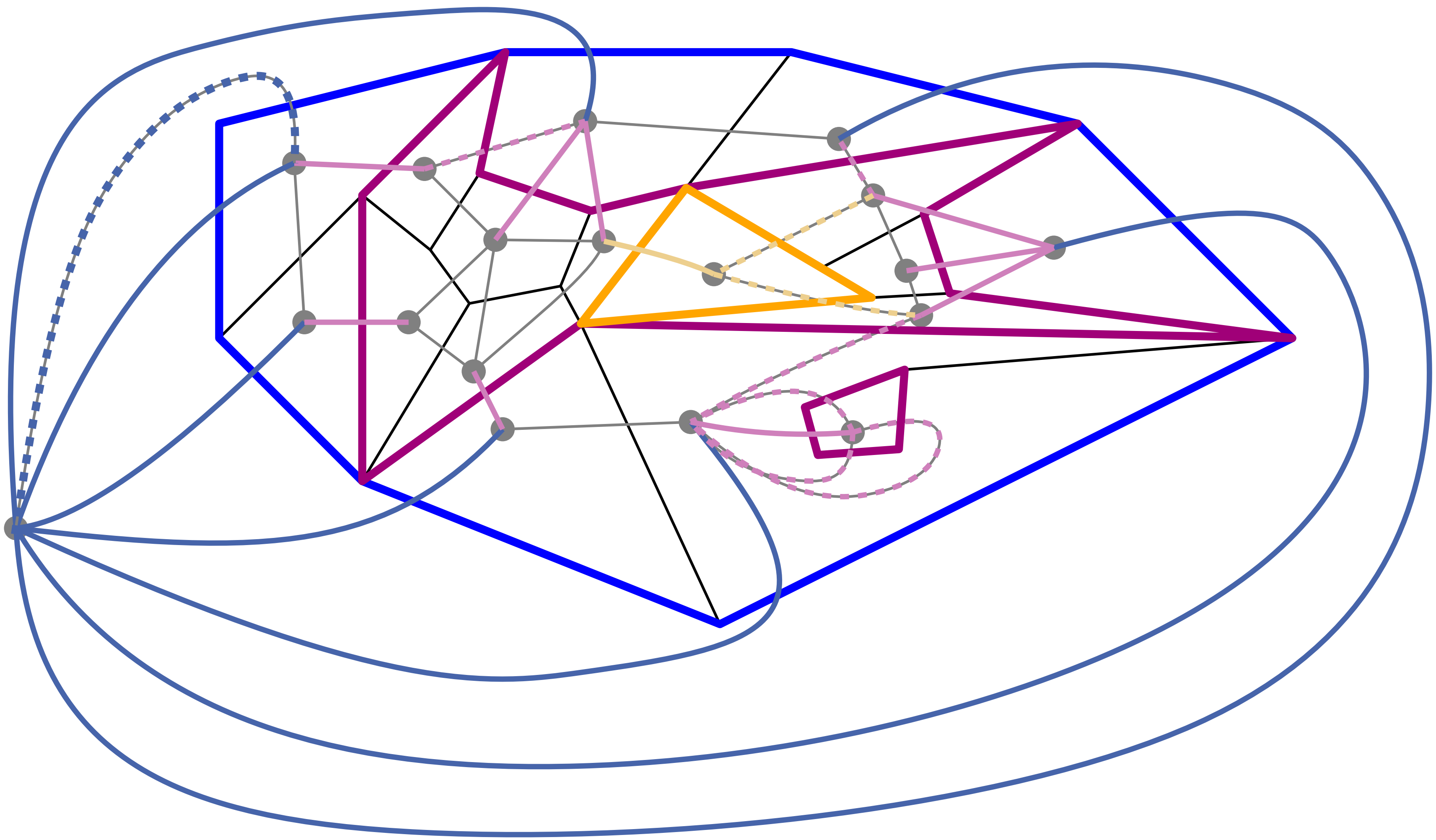
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner







Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner



Aufgabe 2

Geben Sie einen Algorithmus an, der folgendes Problem in Linearzeit löst:

Gegeben ein planarer Graph G mit fester Einbettung und ausgezeichneten Knoten s und t, die an der äußeren Facette liegen, bestimme eine maximale Anzahl von paarweise kantendisjunkten s-t-Wegen in G.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner