Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen
Übung am 07.06.2016

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER

Mündliche Prüfungen

Die Prüfungstermine in diesem Semester sind:

- ~~15. Juli~~ (ausgebucht)
- 18. August
- 15. September
- 6. Oktober

Anmeldung erfolgt per e-Mail an das Sekretariat **sekr-wagner@ira.uka.de** nach dem „first come, first served“-Prinzip.

Wichtig: Anmeldung bis spätestens 3 Wochen vor dem Prüfungstermin.

3. Übungsblatt

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 3

(a) **Zeigen oder widerlegen Sie**:

- In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w und Höhe höchstens $2\sqrt{n}$.
- Wie sieht es bei triangulierten Graphen aus?

Aufgabe 3

(a) **Zeigen oder widerlegen Sie**:

- In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w und Höhe höchstens $2\sqrt{n}$.
- Wie sieht es bei triangulierten Graphen aus?

(b) **Zeigen oder widerlegen Sie:** In jedem planaren, zusammenhängenden Graphen gibt es einen Knoten w und einen Breitensuchbaum T mit Wurzel w so, dass der PLANAR-SEPARATOR-Algorithmus spätestens nach Schritt 4 mit $S = S_m \cup S_M$ einen gültigen Separator findet.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Wiederholung

Satz (Planar-Separator-Theorem) Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S ist ein Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

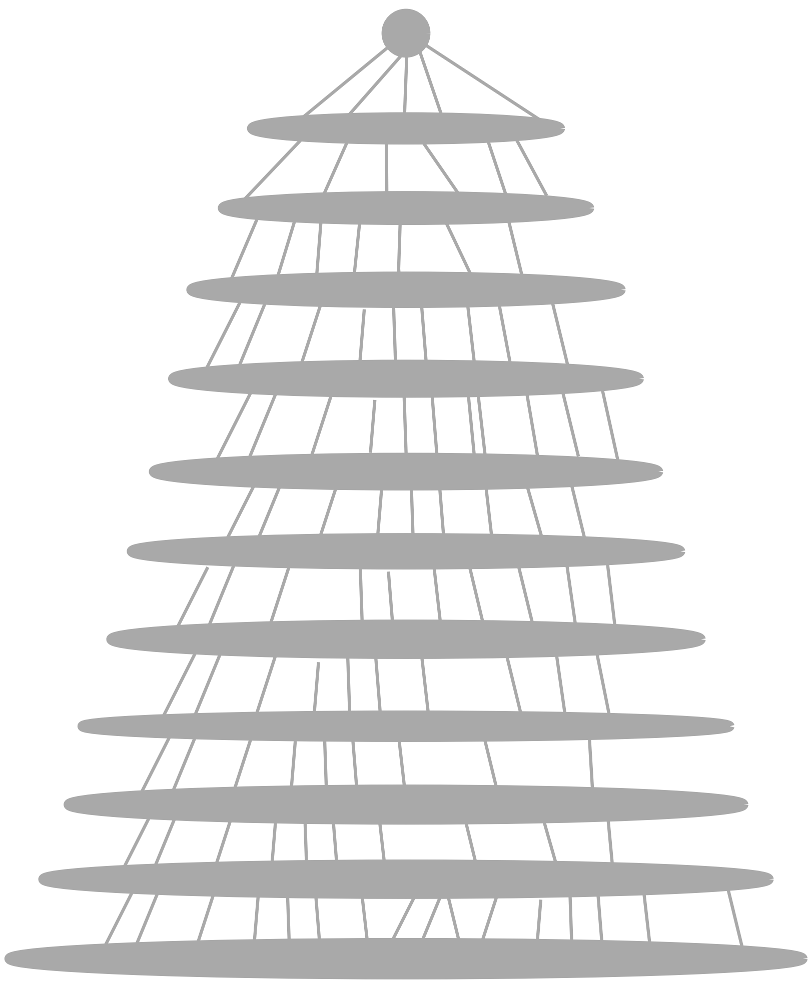
Lipton & Tarjan 1977

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

Beweis des Planar-Separator-Theorem

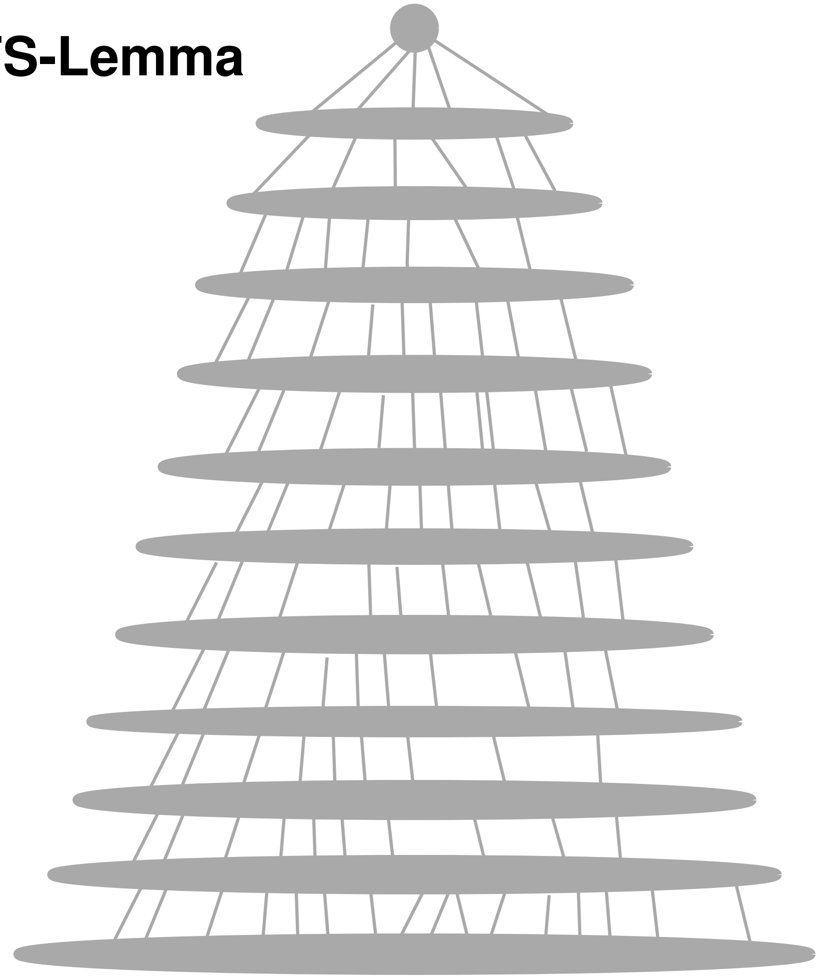
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

BFS-Lemma

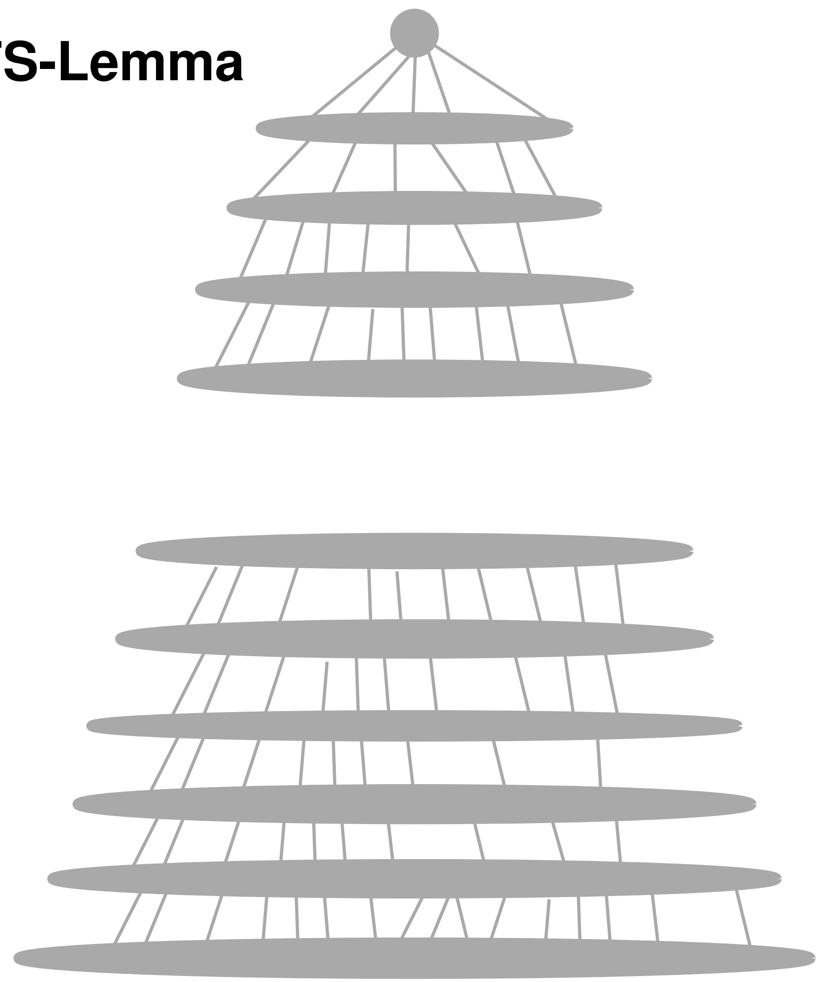


Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

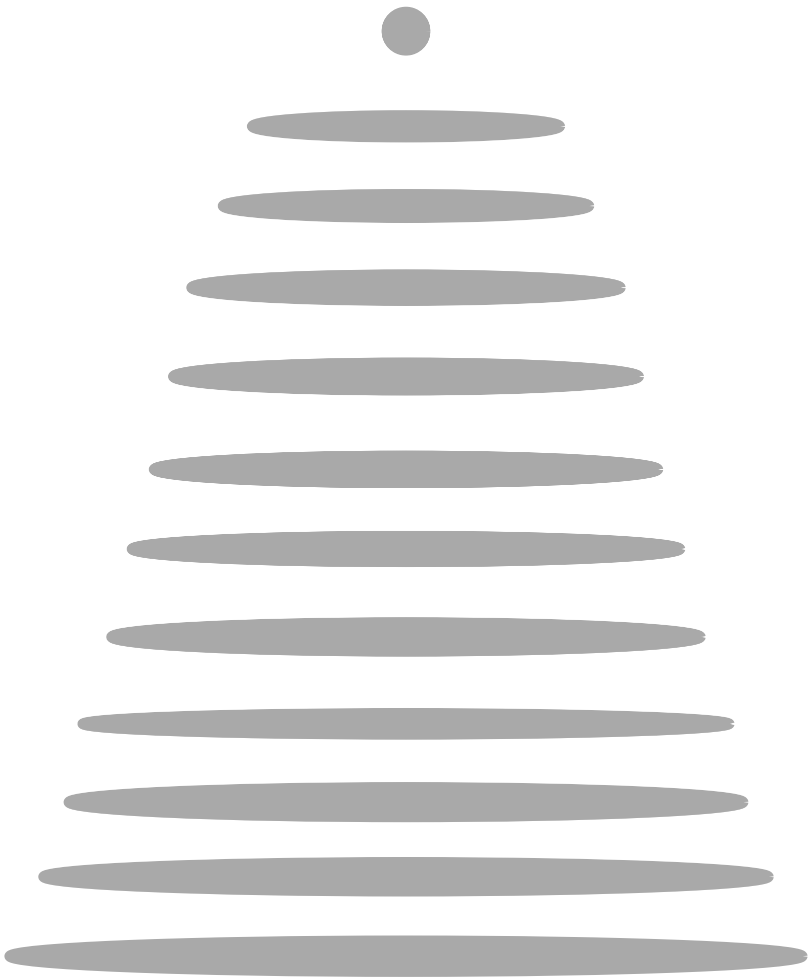
BFS-Lemma



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

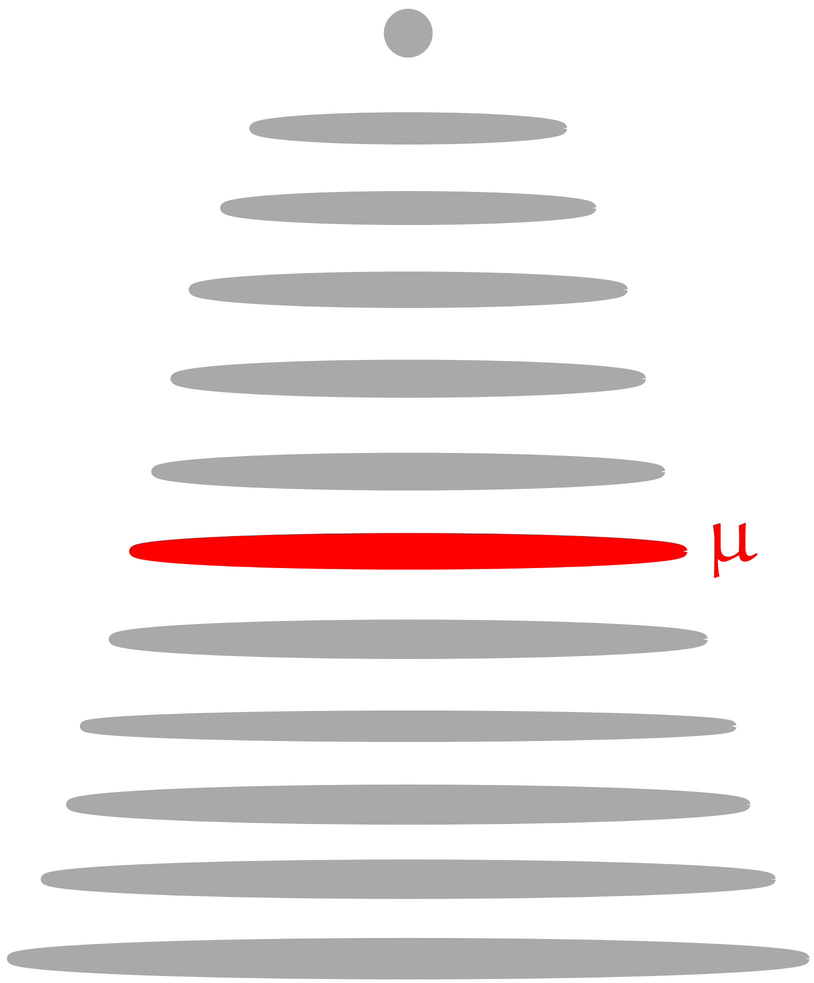
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



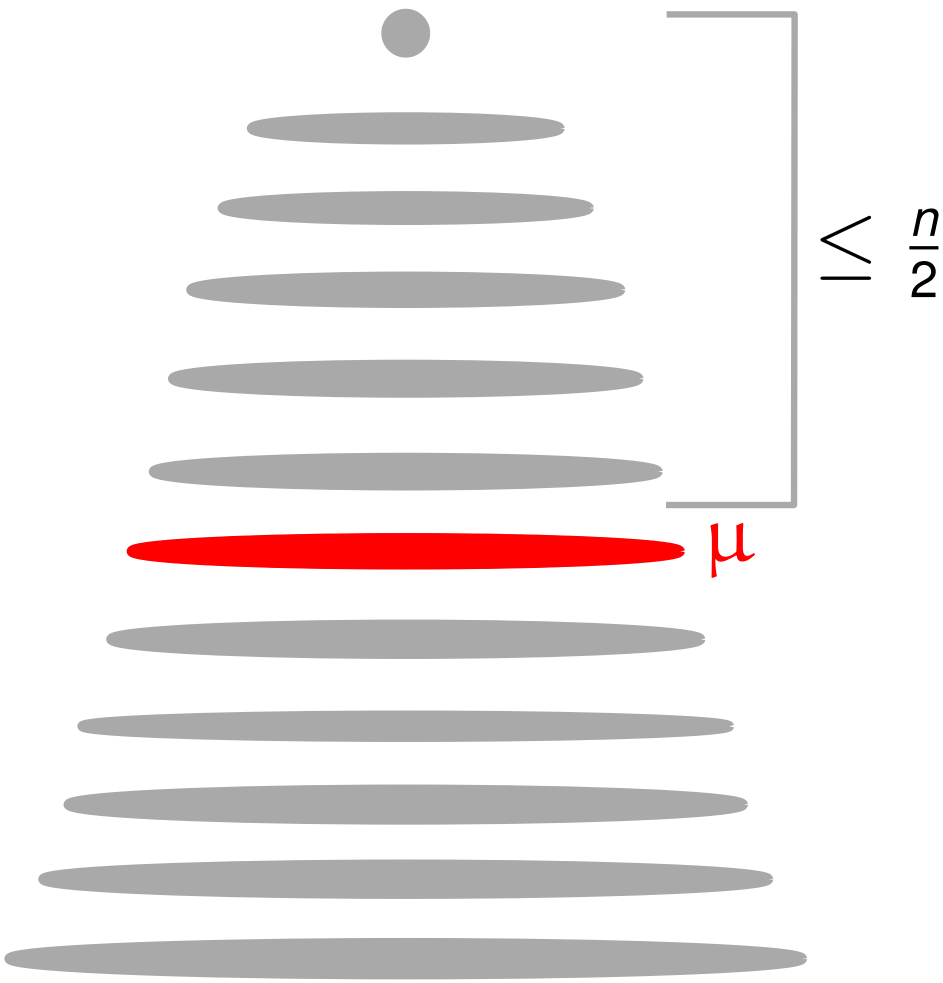
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



Beweis des Planar-Separator-Theorem

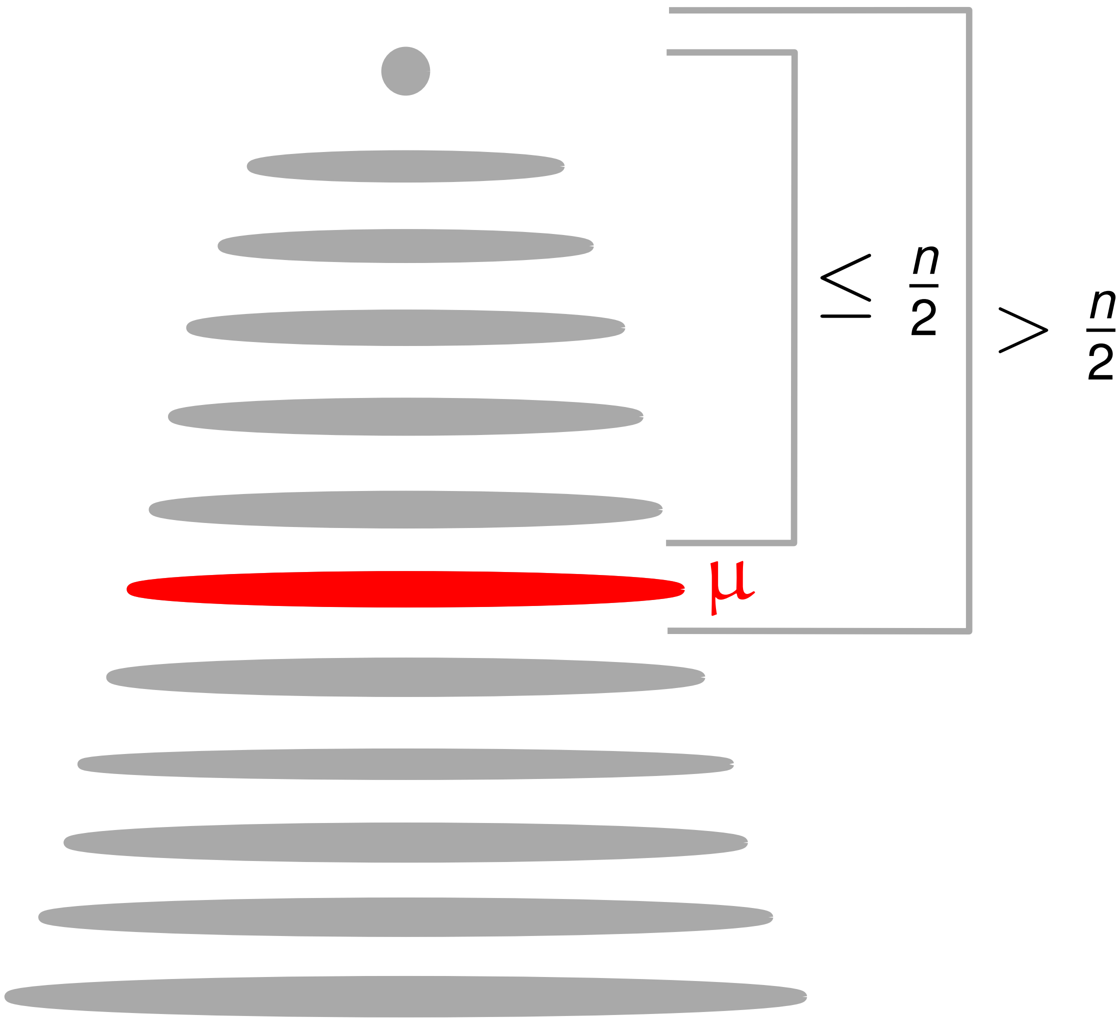
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

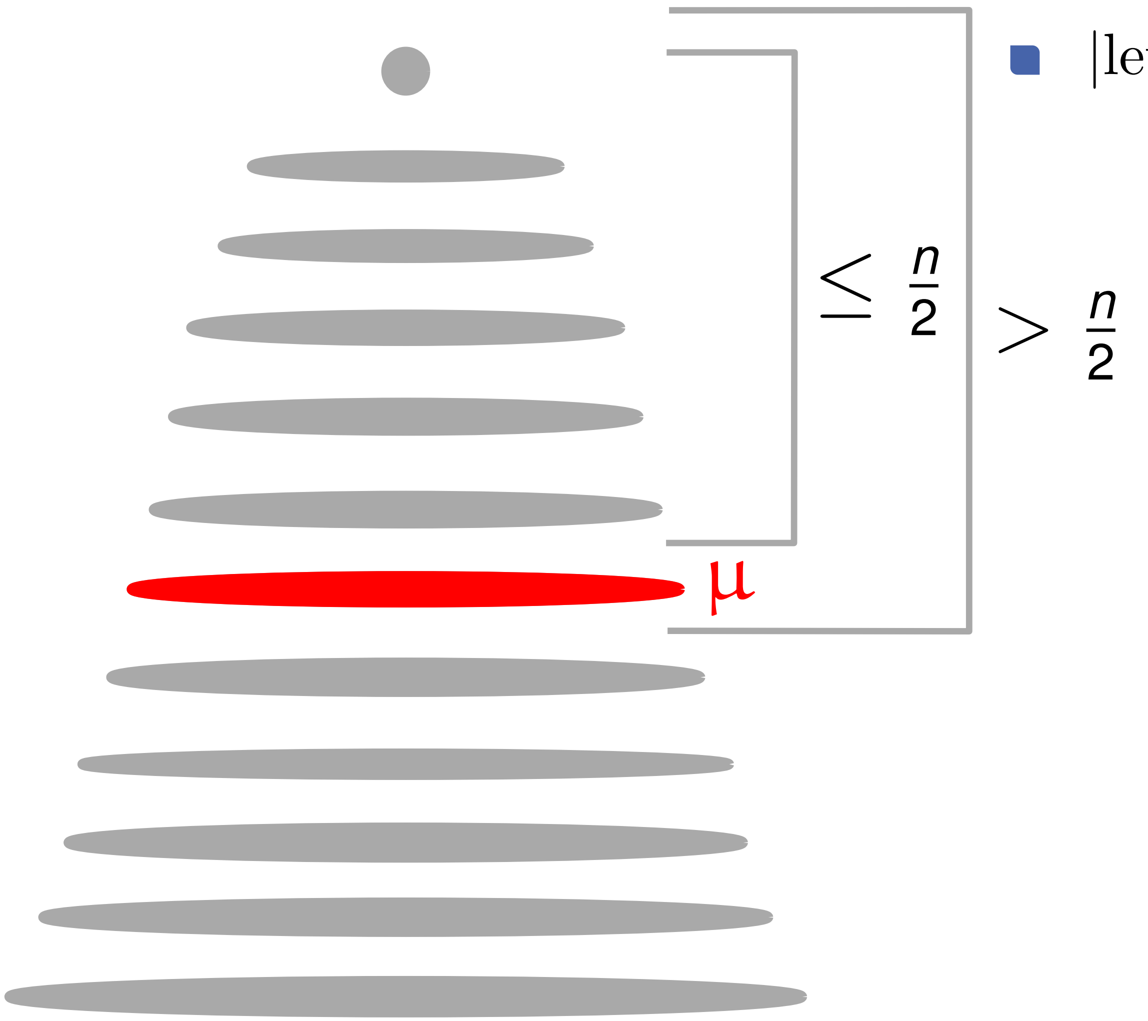
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



Beweis des Planar-Separator-Theorem

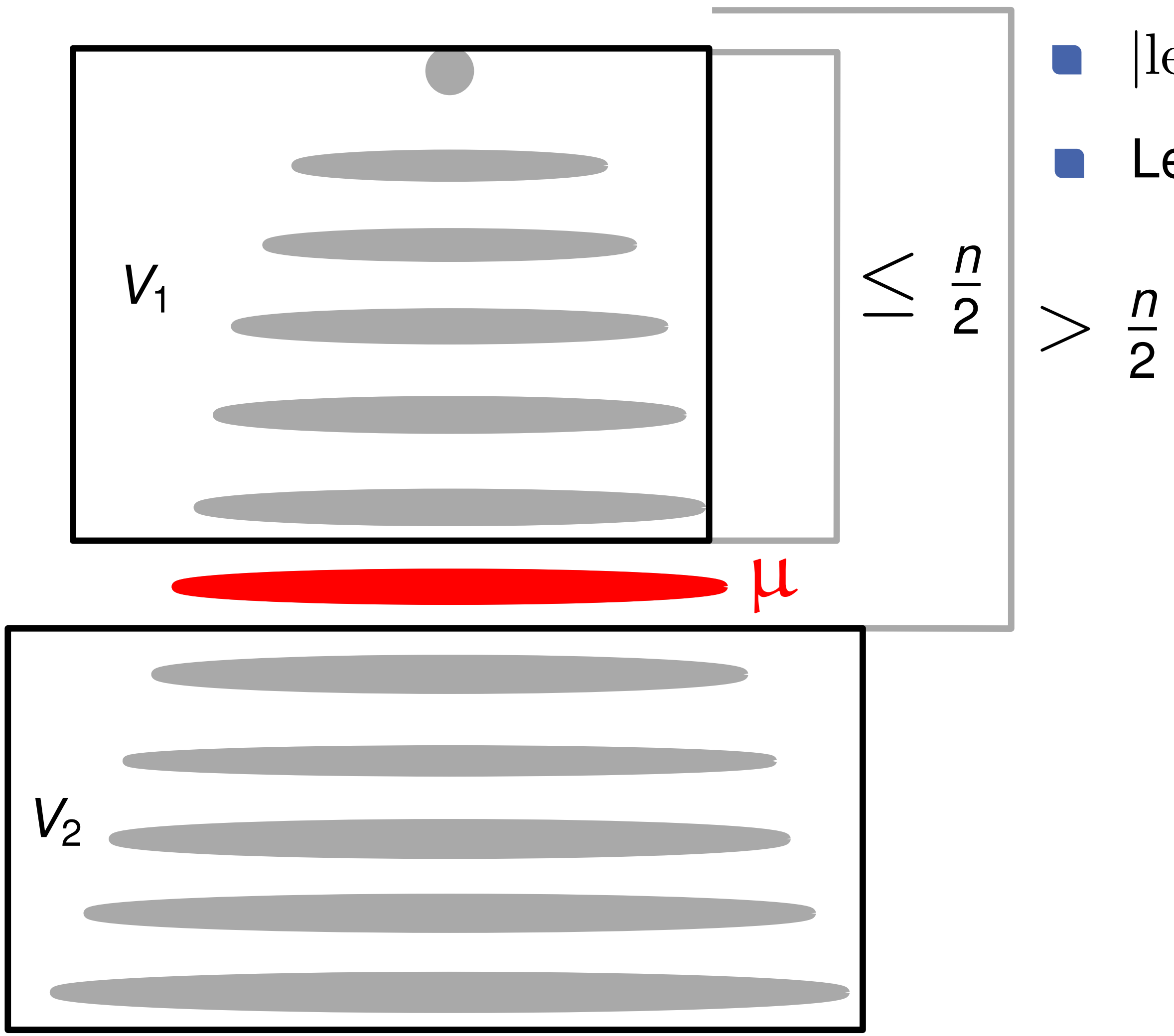
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- $|\text{level } \mu| \leq 4\sqrt{n}$ - Fertig!

Beweis des Planar-Separator-Theorem

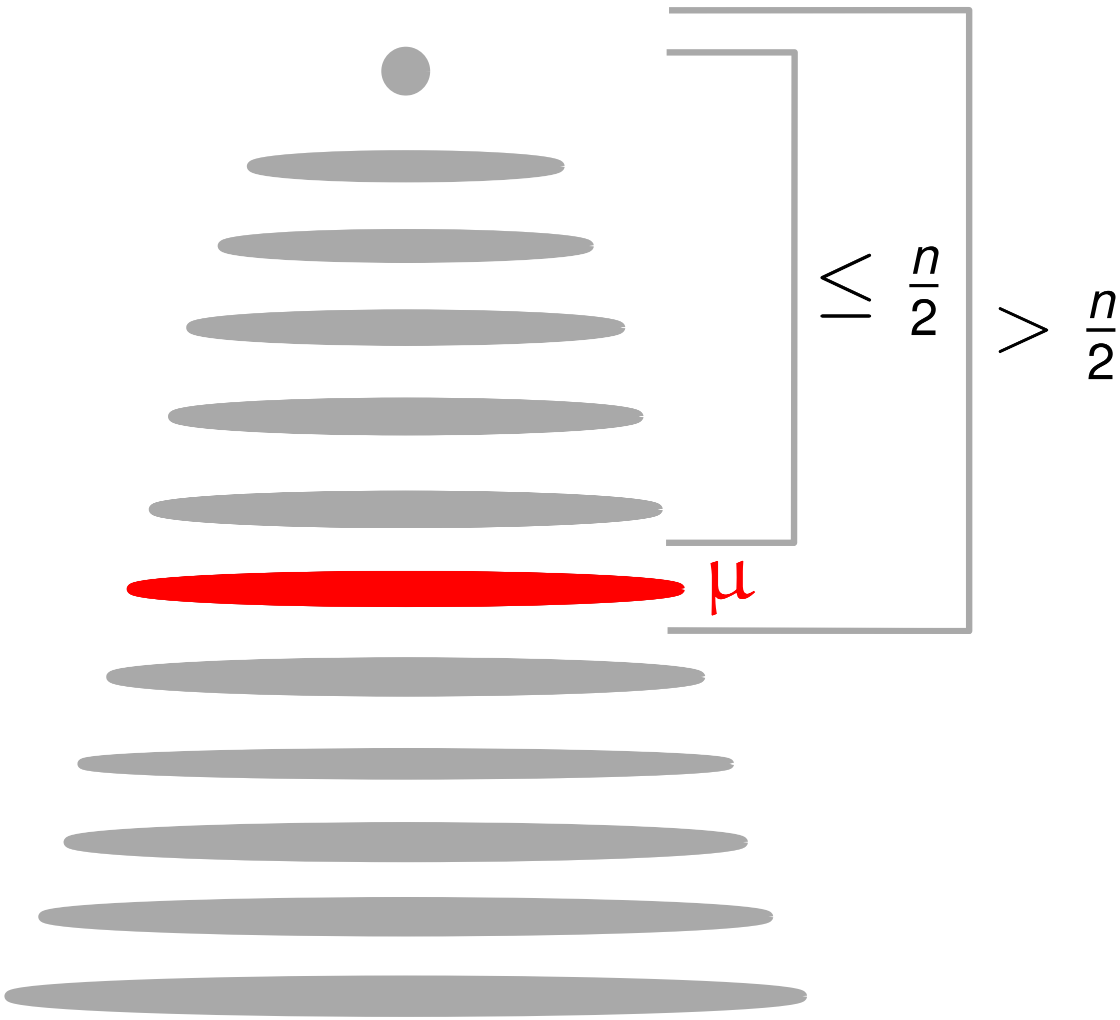
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- $|\text{level } \mu| \leq 4\sqrt{n}$ - Fertig!
- Level μ ist Separator S

Beweis des Planar-Separator-Theorem

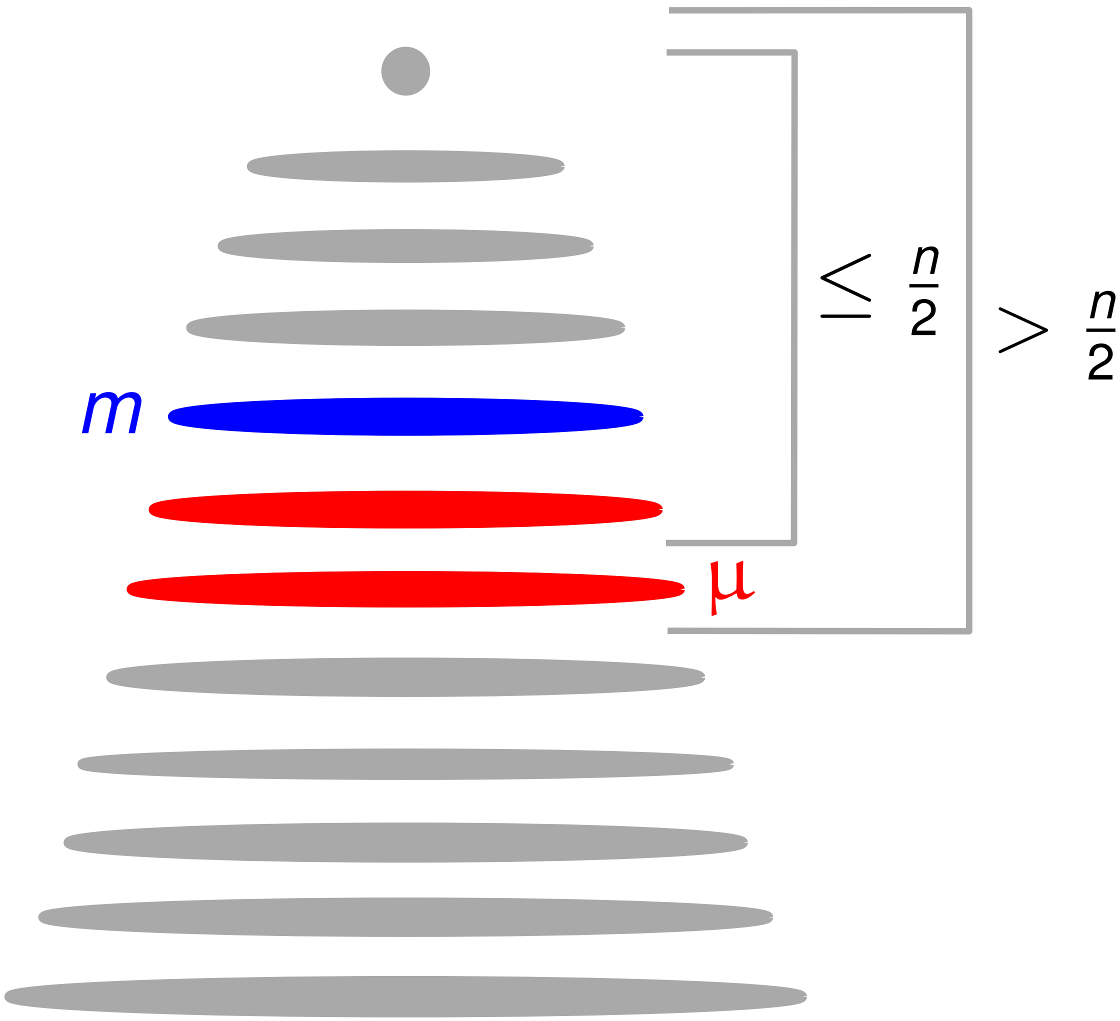
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



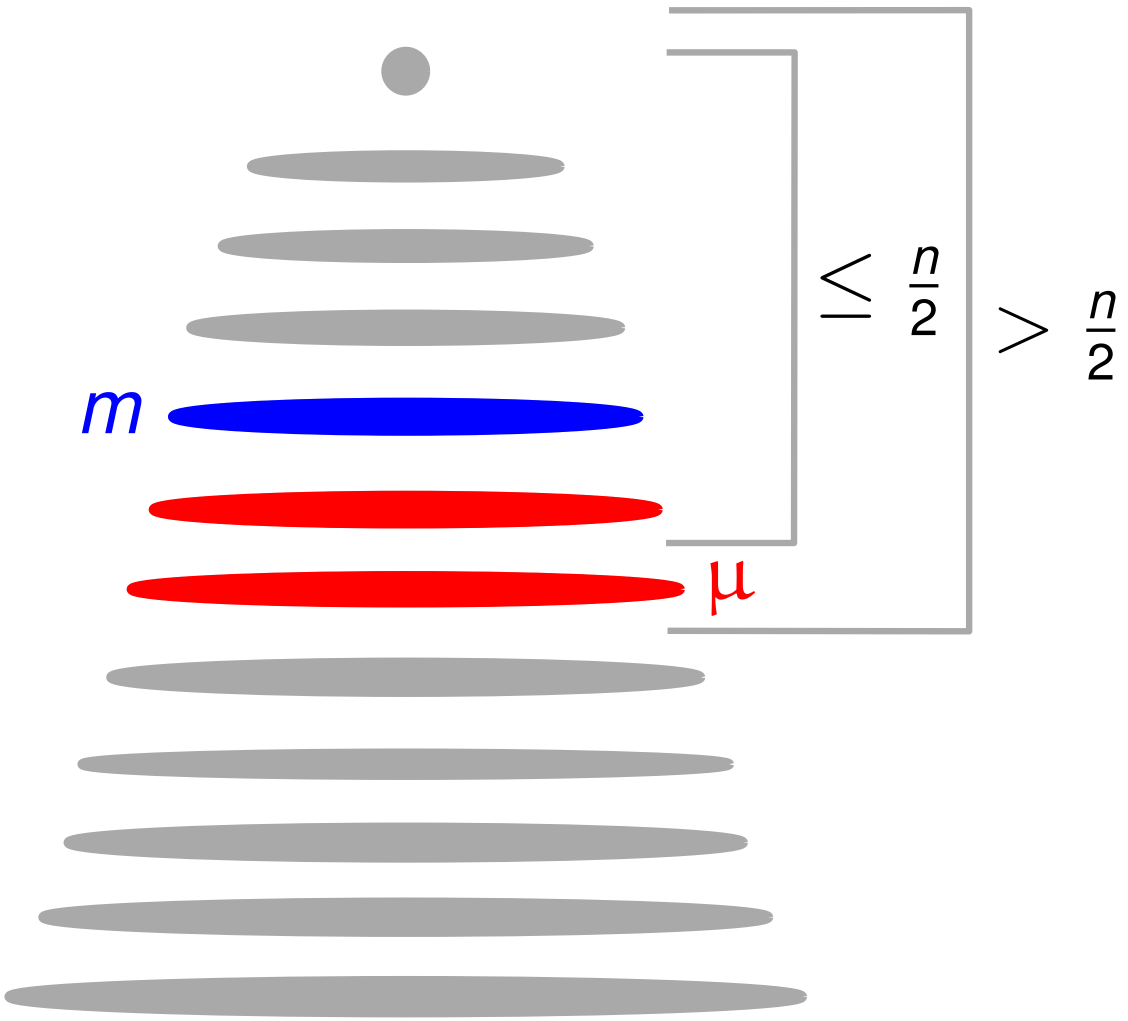
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beweis des Planar-Separator-Theorem

Karlsruher Institut für Technologie

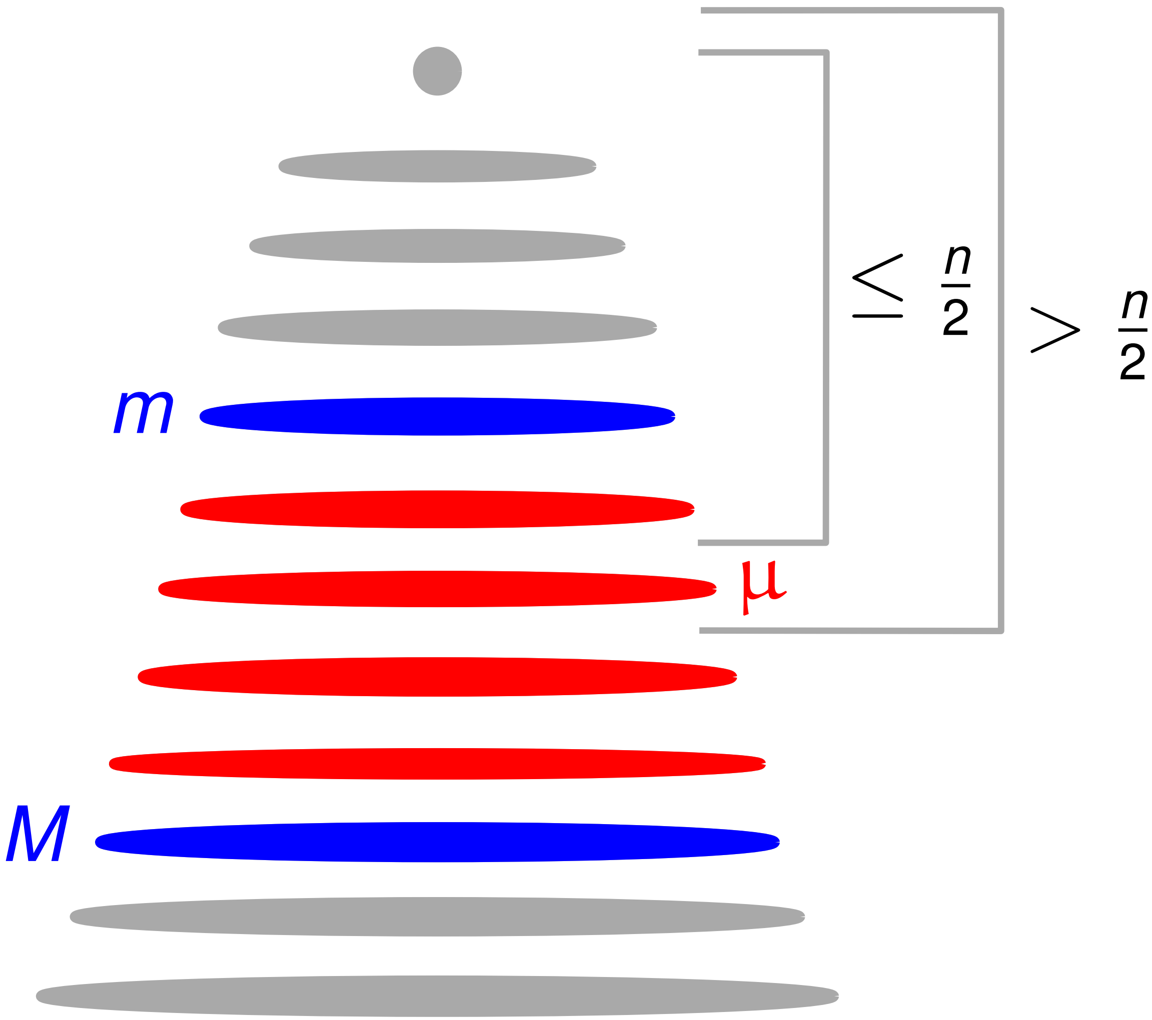
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\mathrm{level}\ \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\mathrm{level}\ m| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

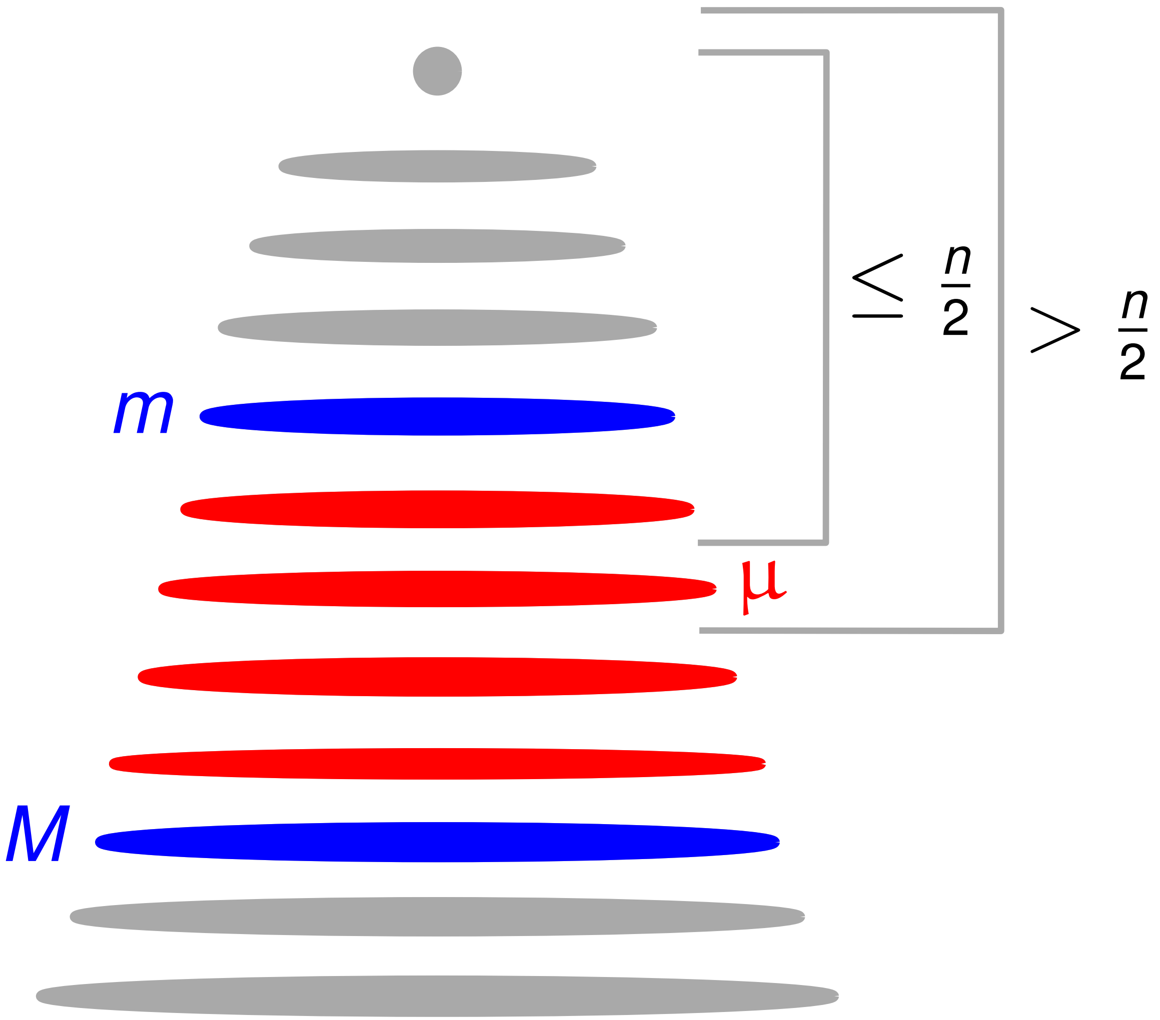


- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

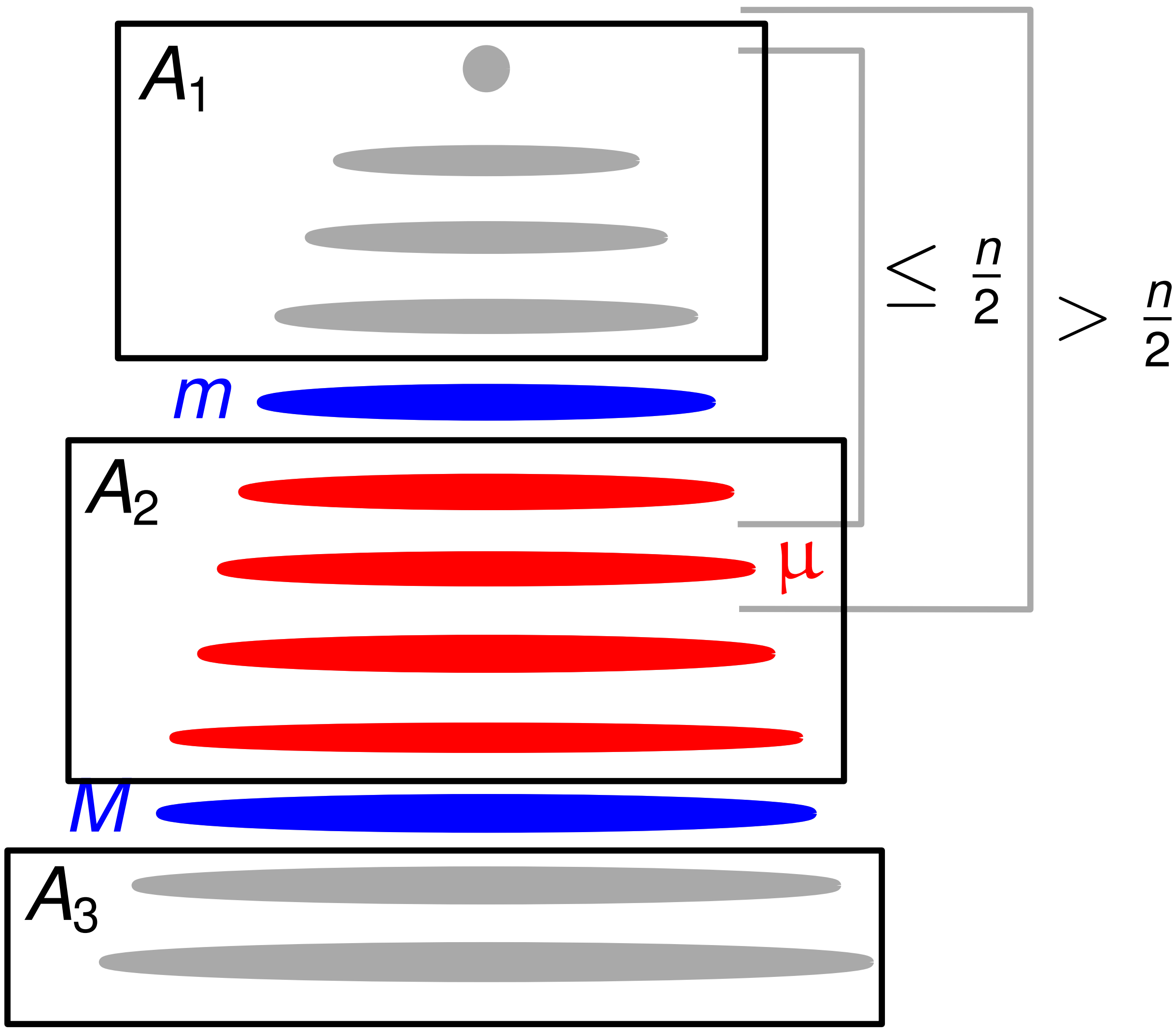


- Sei $|\mathrm{level}\ \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\mathrm{level}\ m| < \sqrt{n}$
- $|\mathrm{level}\ M| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

Karlsruher Institut für Technologie

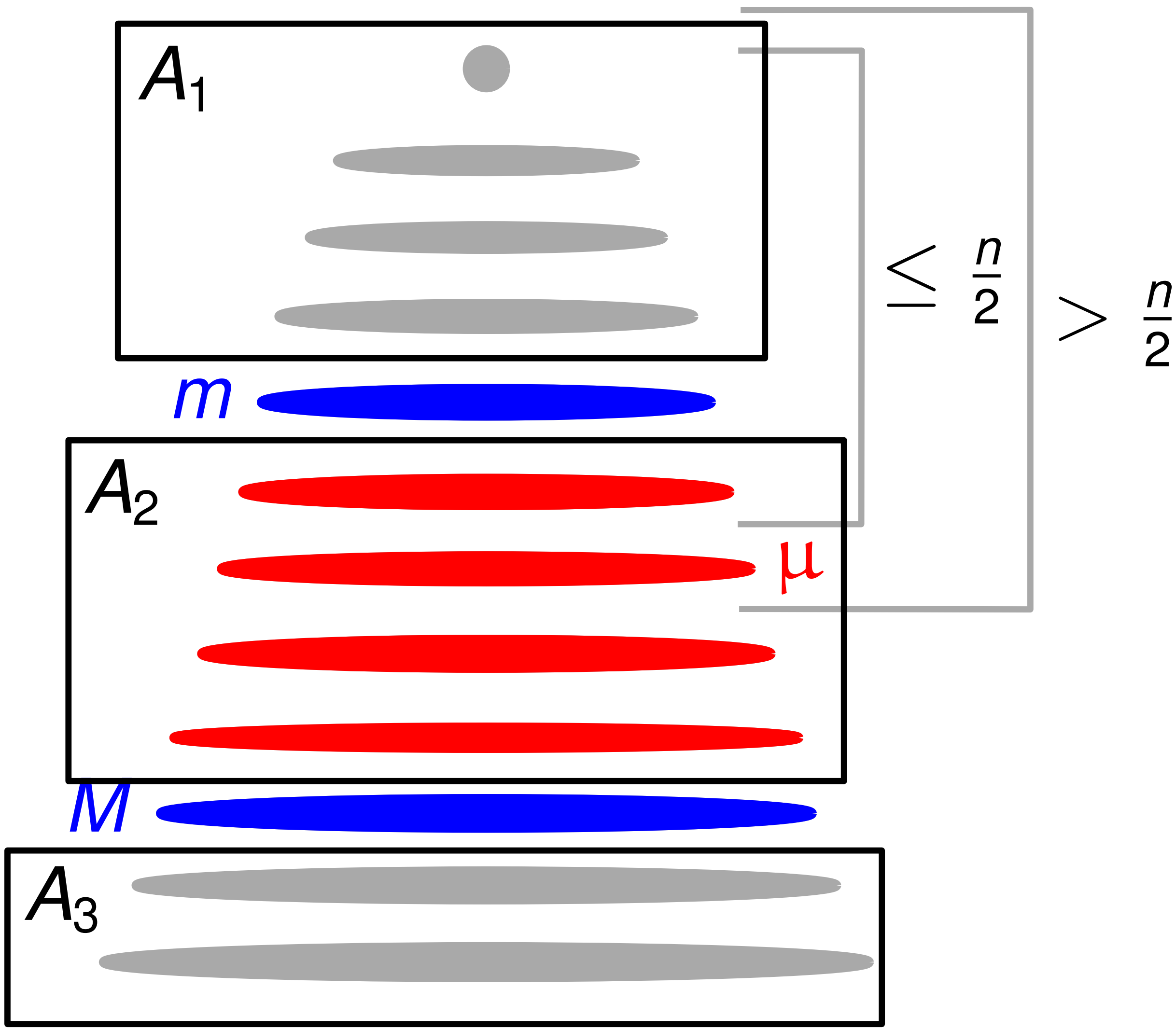
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\mathrm{level}\ \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\mathrm{level}\ m| < \sqrt{n}$
- $|\mathrm{level}\ M| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

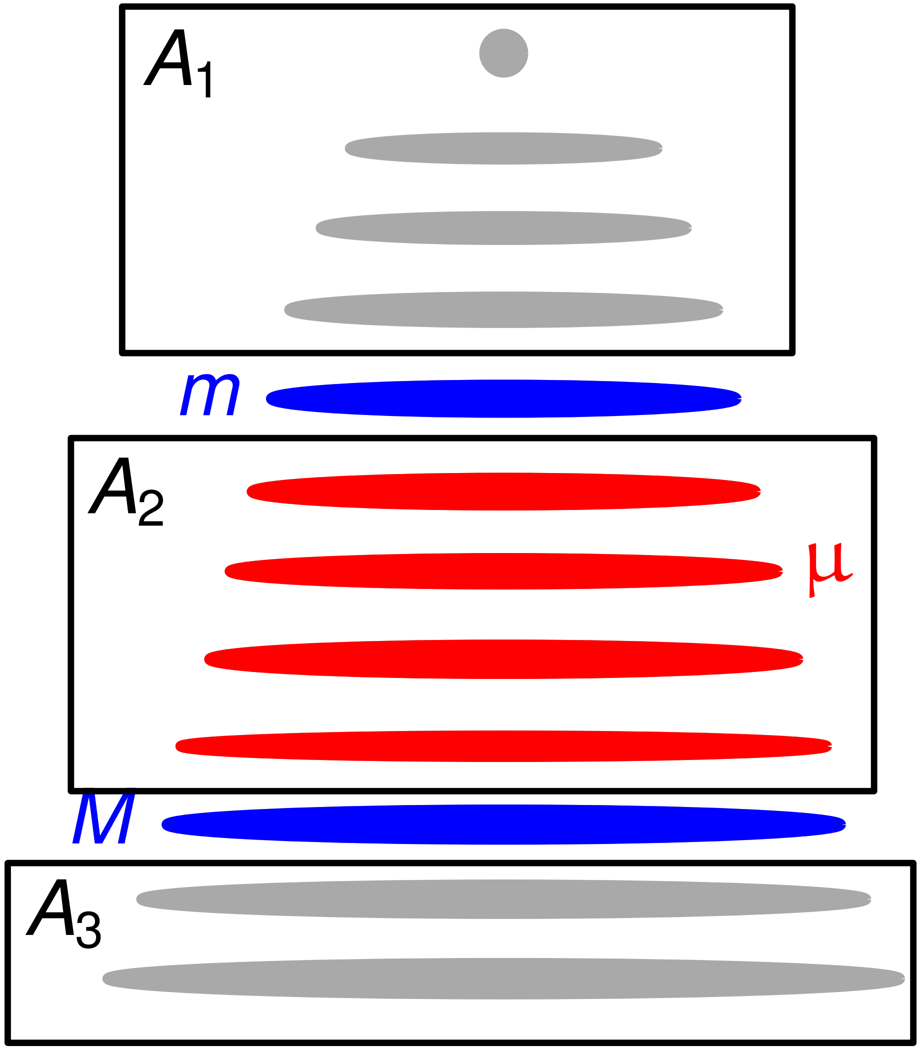
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

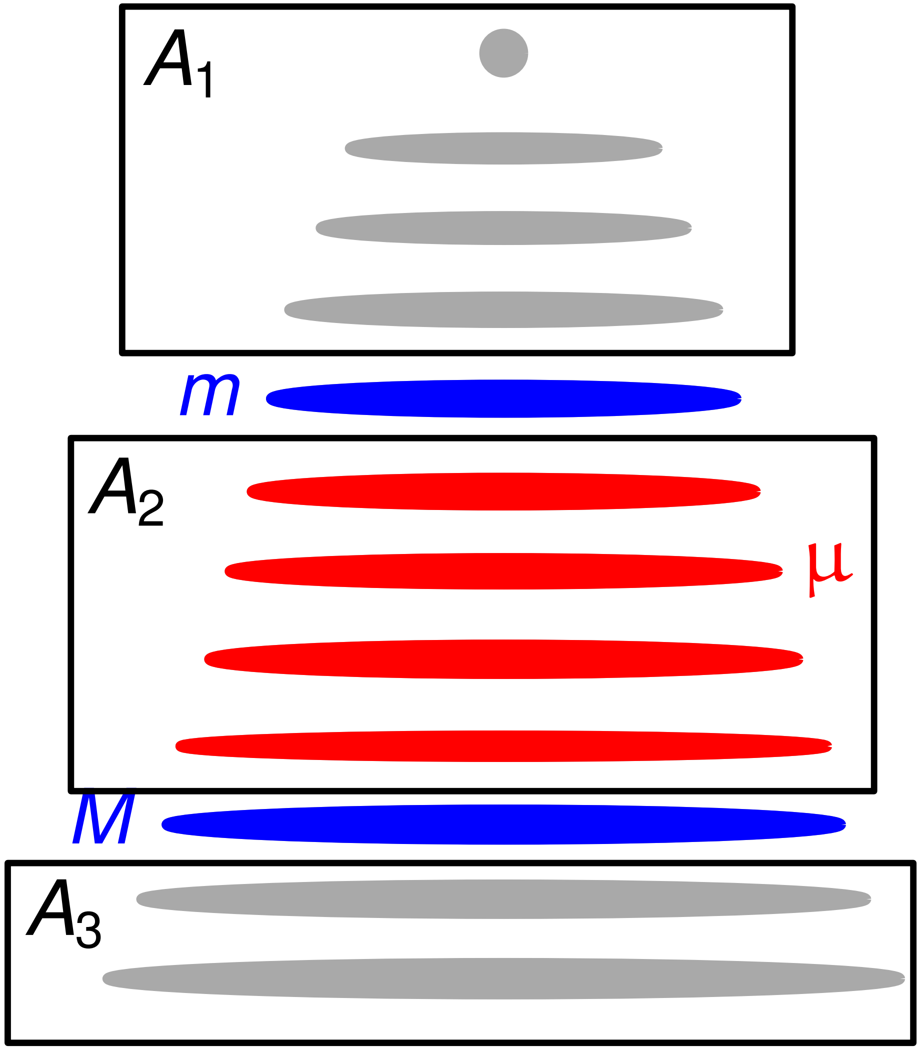


- Sei $|\mathrm{level}\ \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\mathrm{level}\ m| < \sqrt{n}$
- $|\mathrm{level}\ M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

Karlsruher Institut für Technologie

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

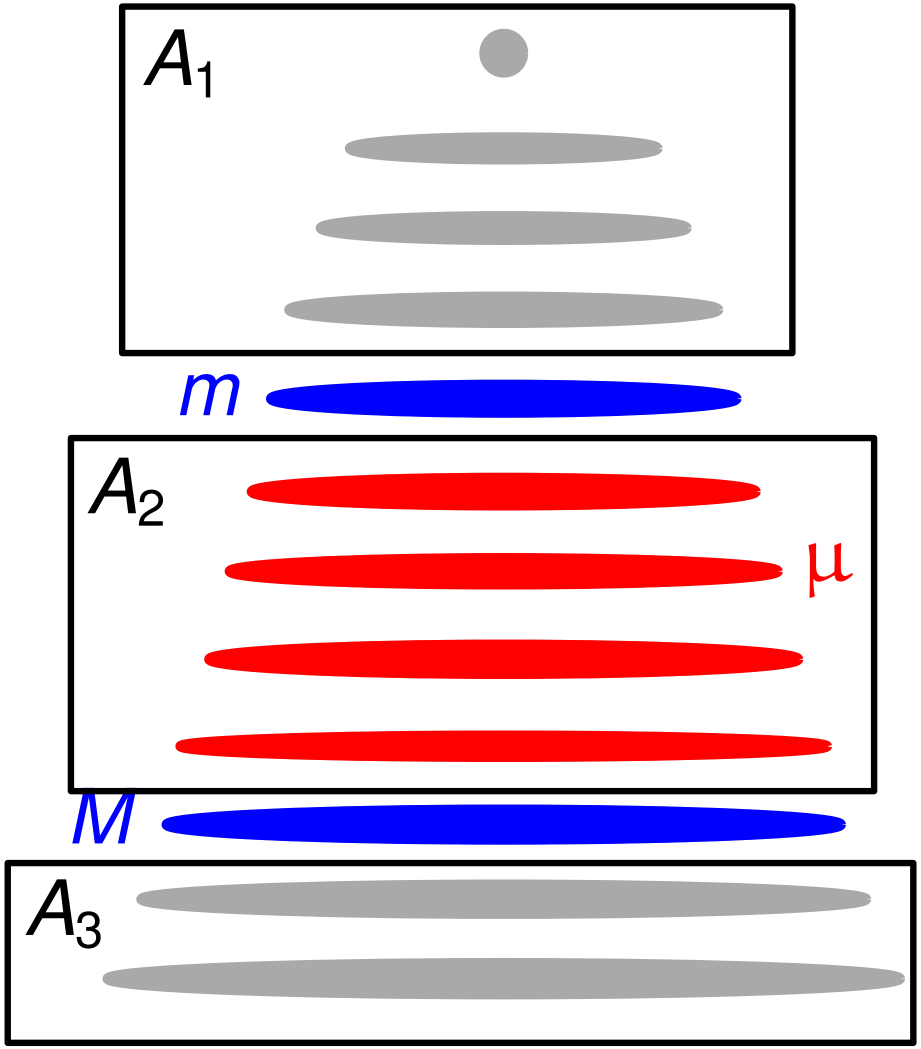


- Sei $|\mathrm{level}\ \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\mathrm{level}\ m| < \sqrt{n}$
- $|\mathrm{level}\ M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



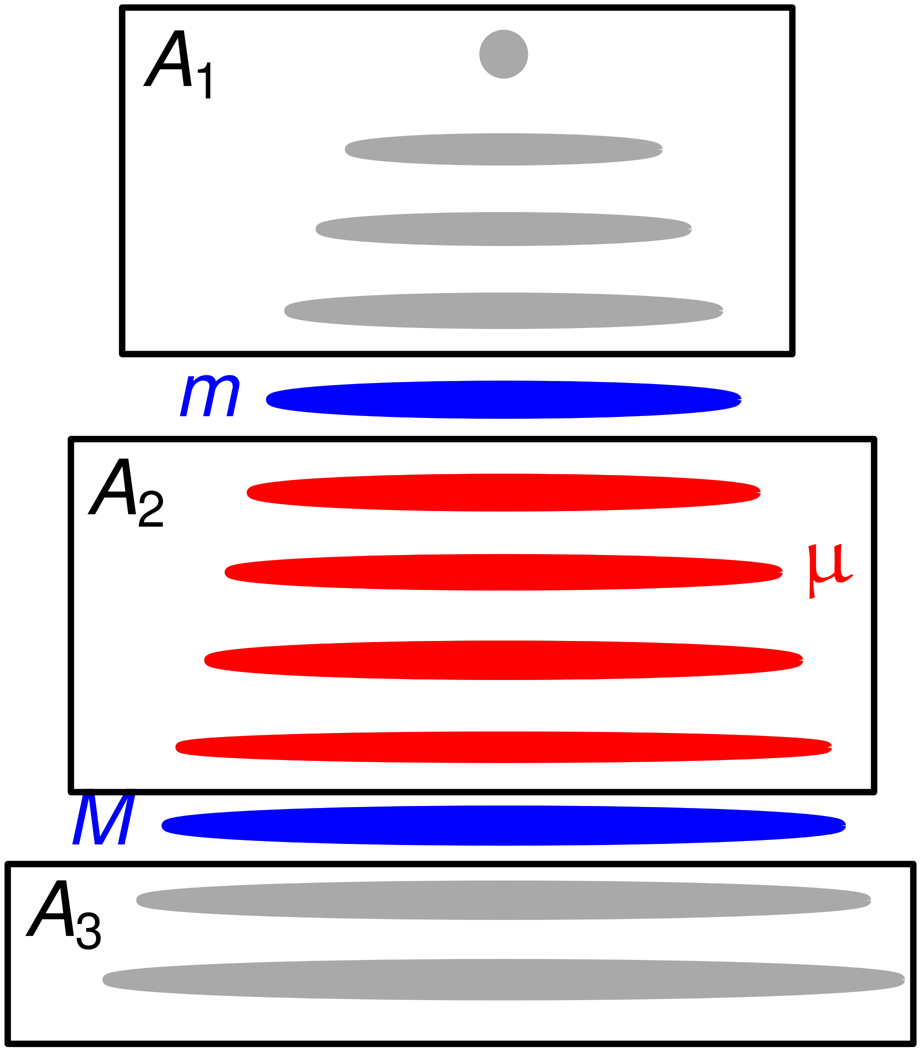
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

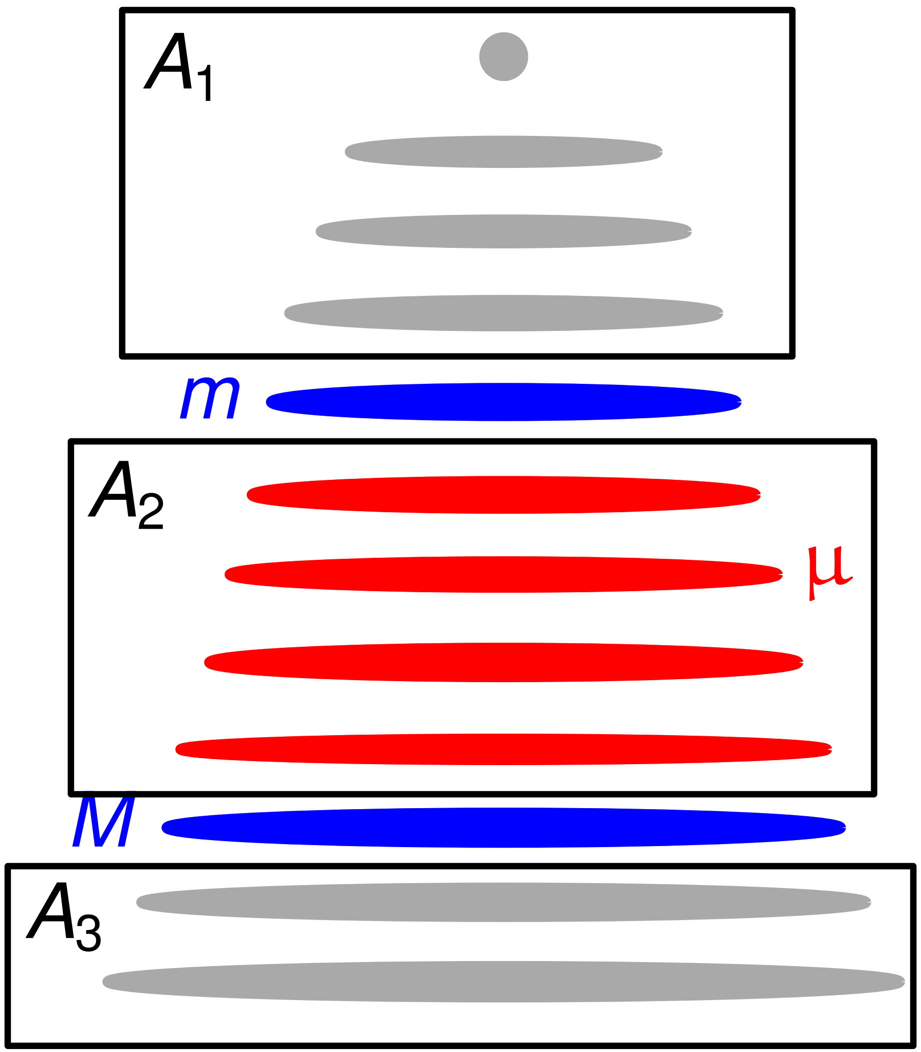
Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

Karlsruher Institut für Technologie

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



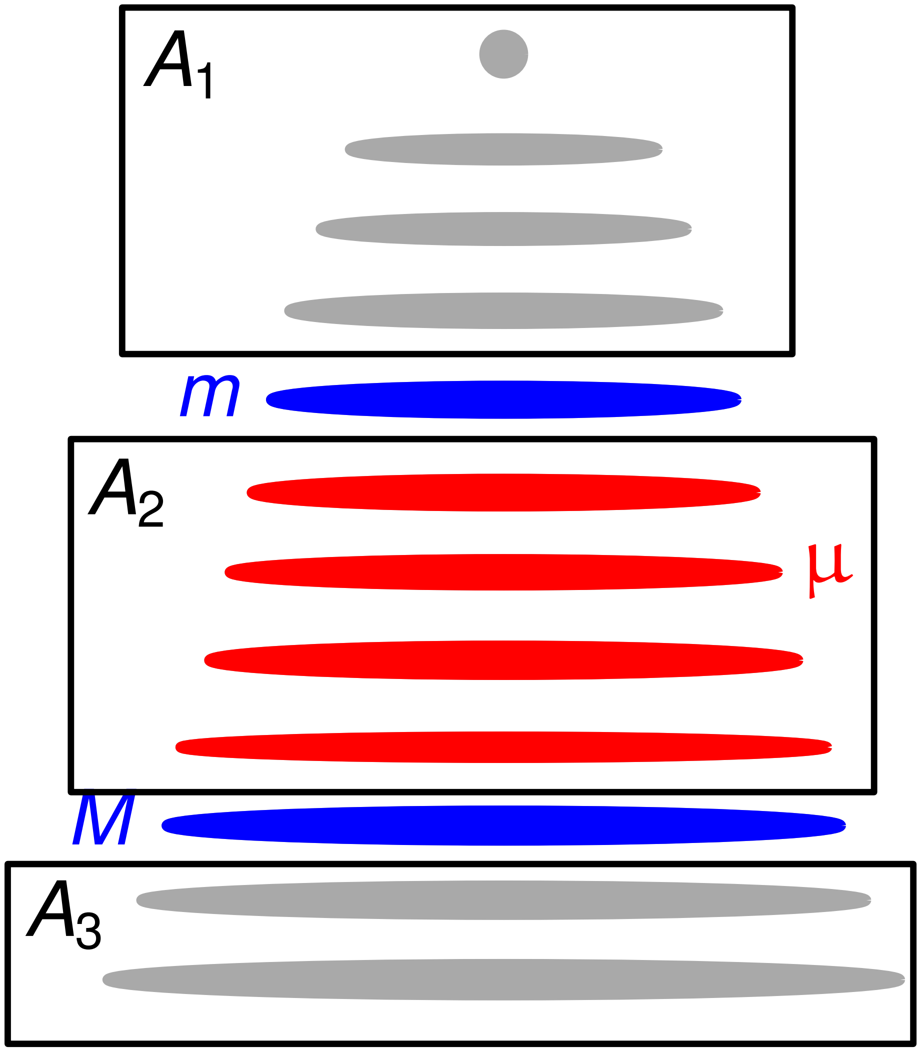
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



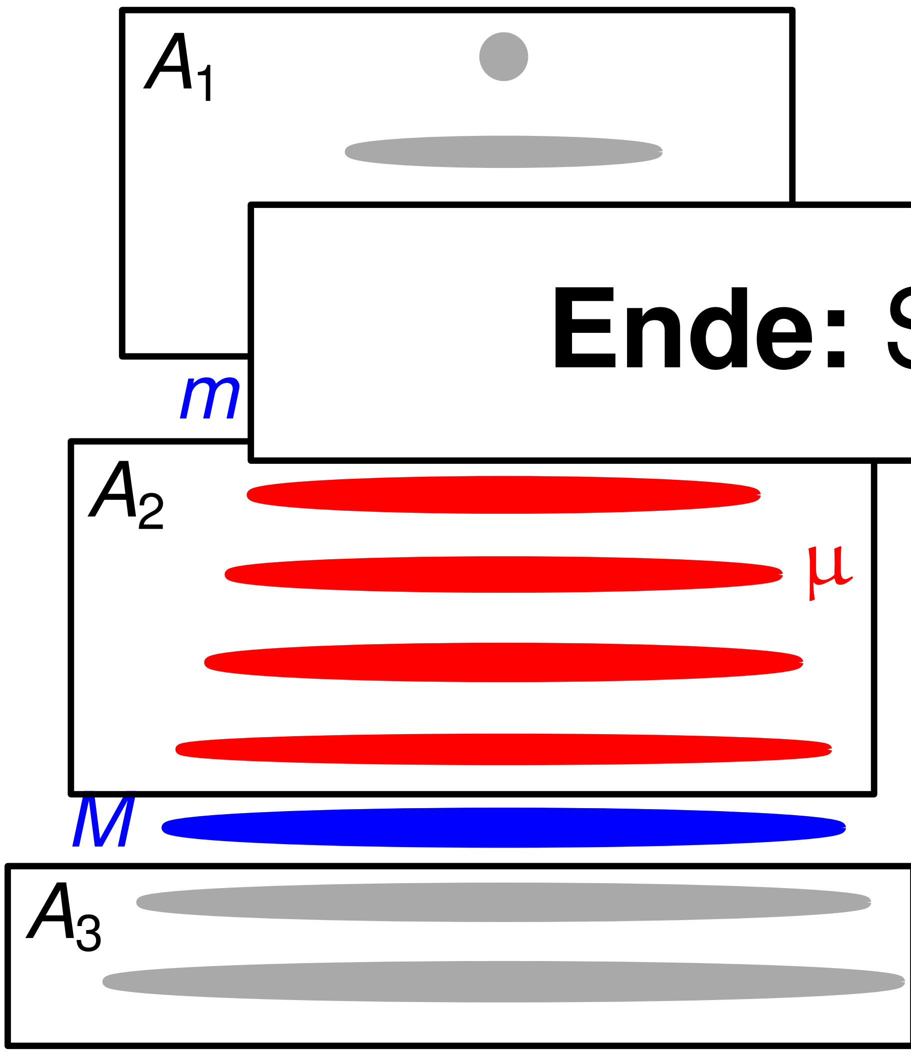
- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1) \quad , |V_2| < \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



Ende: Schritt 4

- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

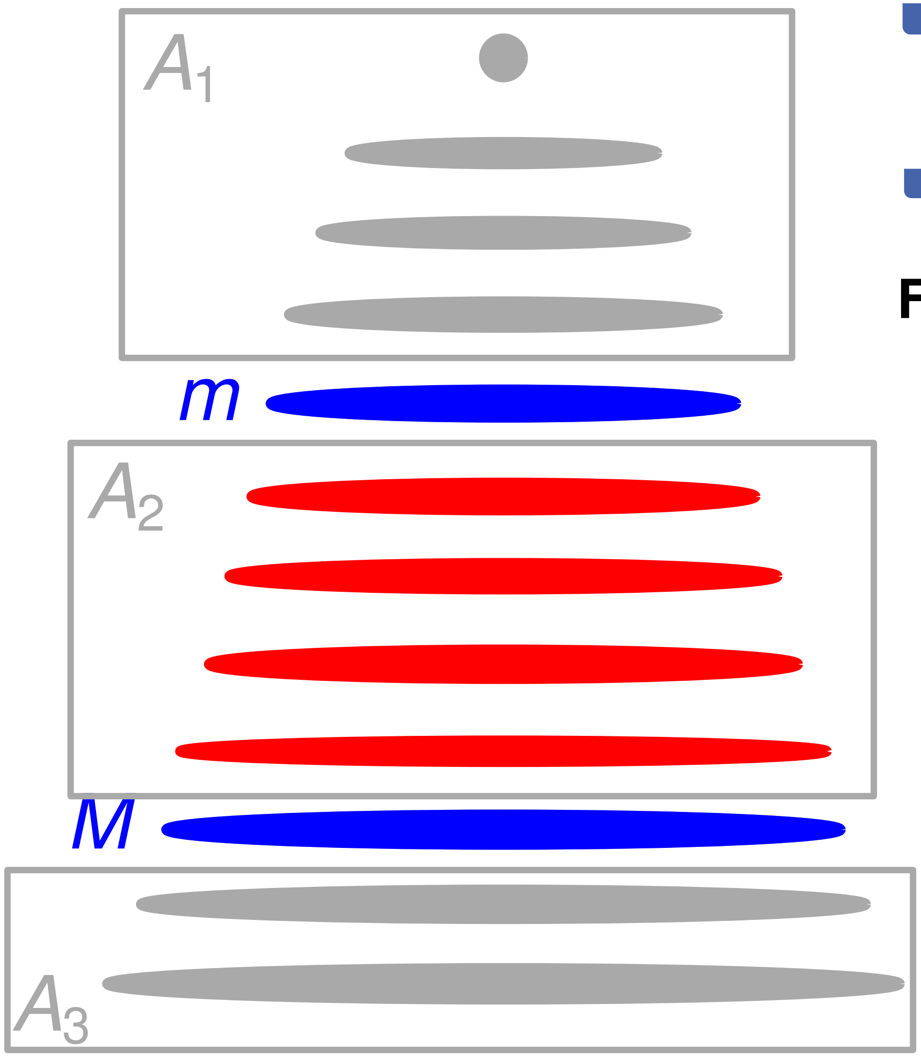
$< \sqrt{n}$

$|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}$, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$, $|V_2| < \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

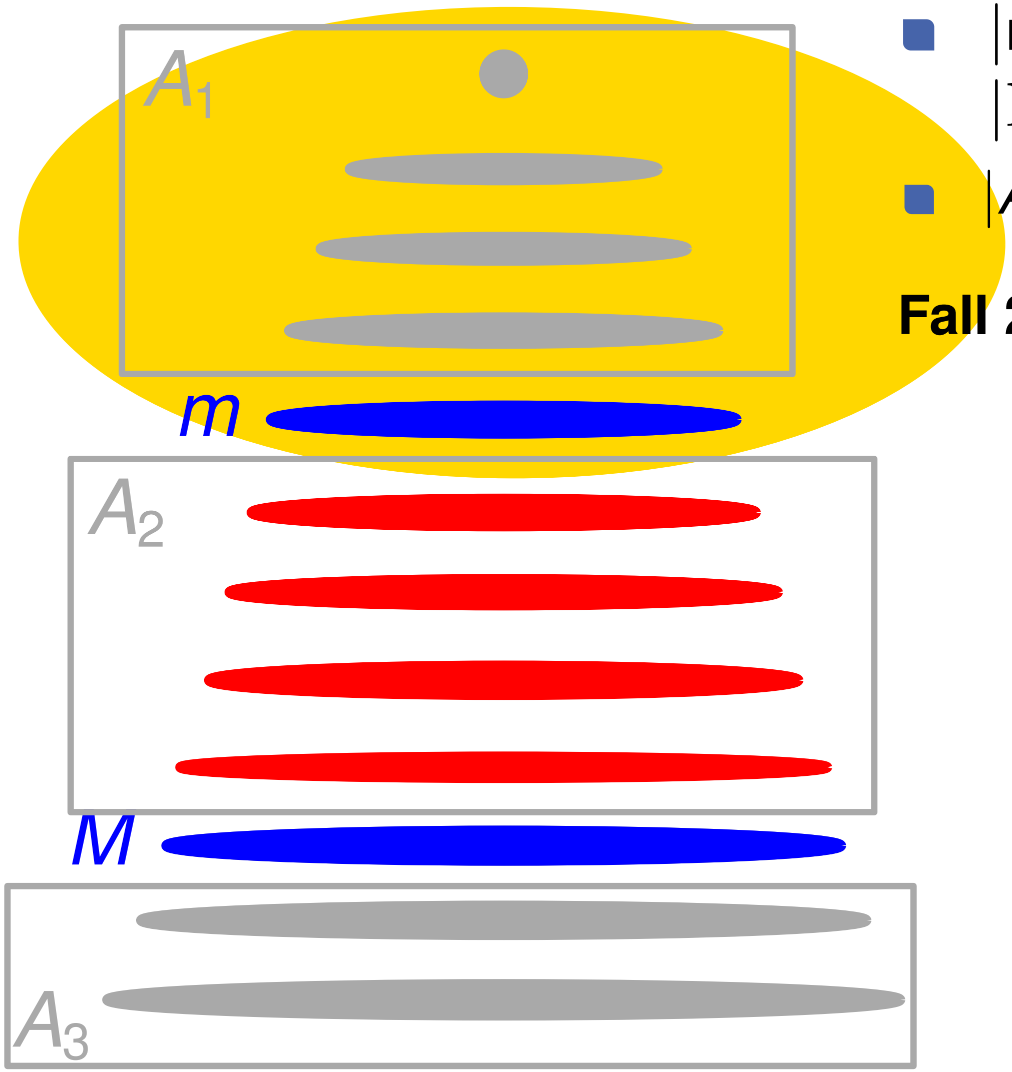


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beweis des Planar-Separator-Theorem

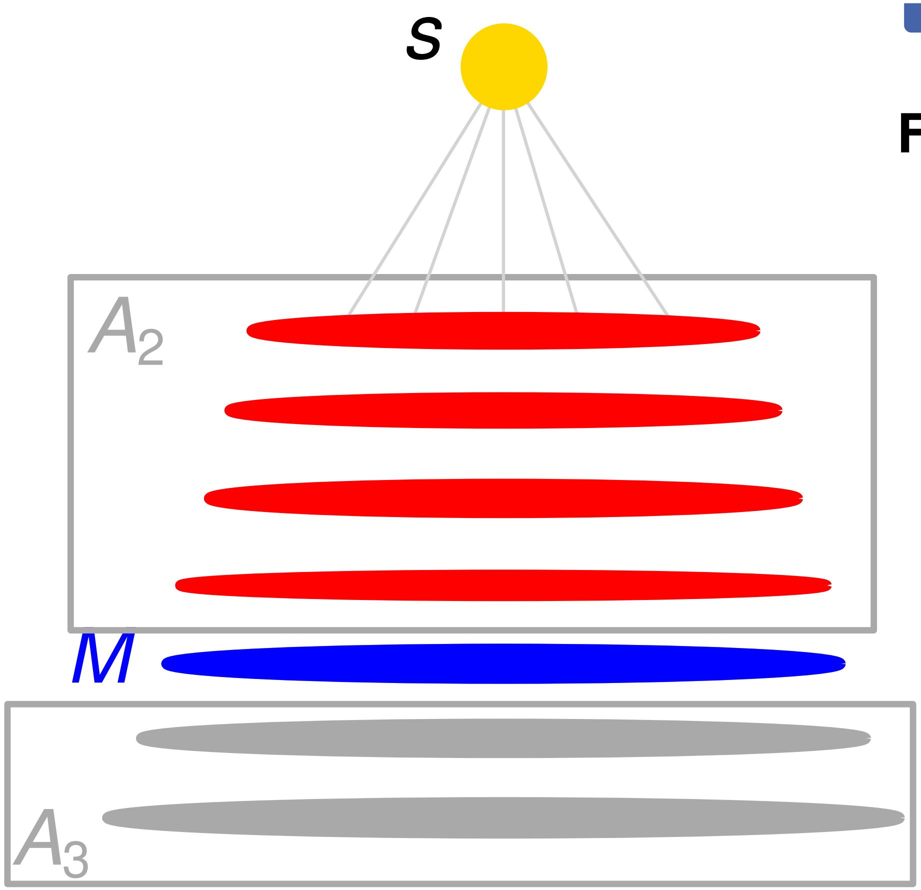


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

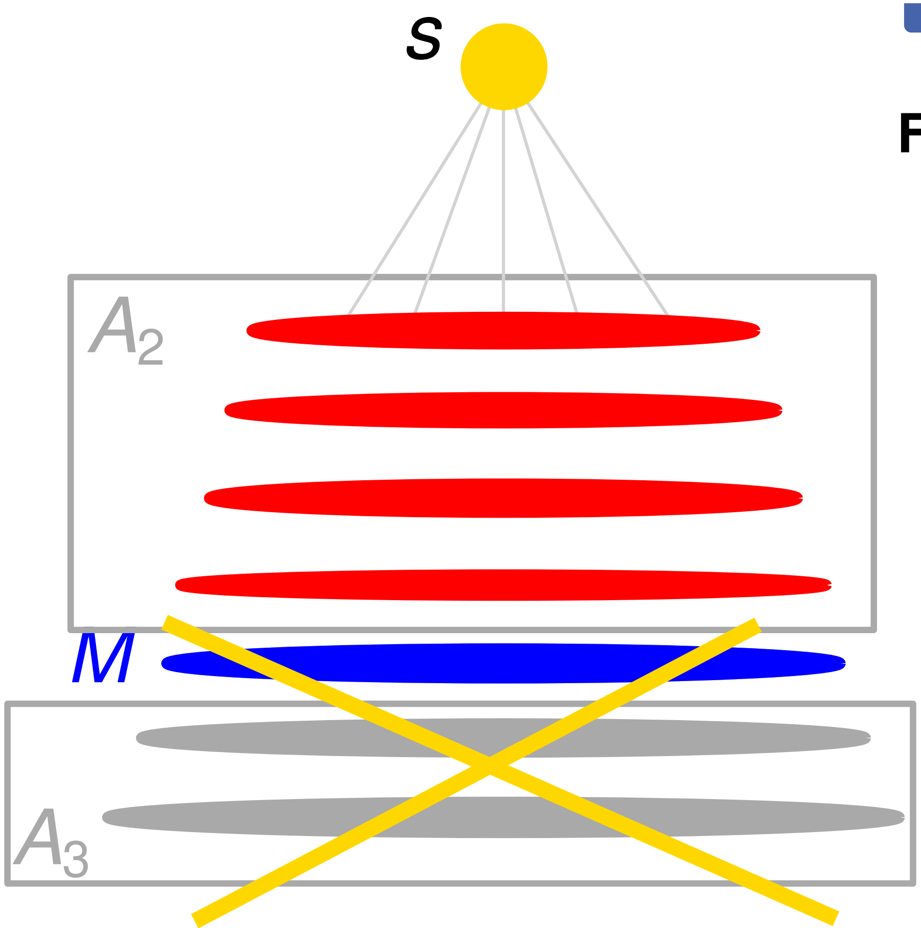
Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

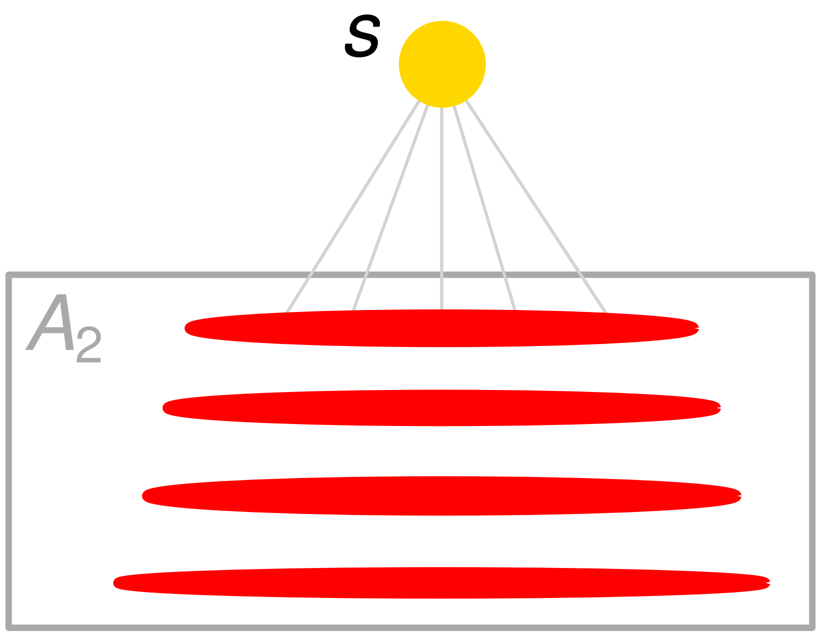
Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

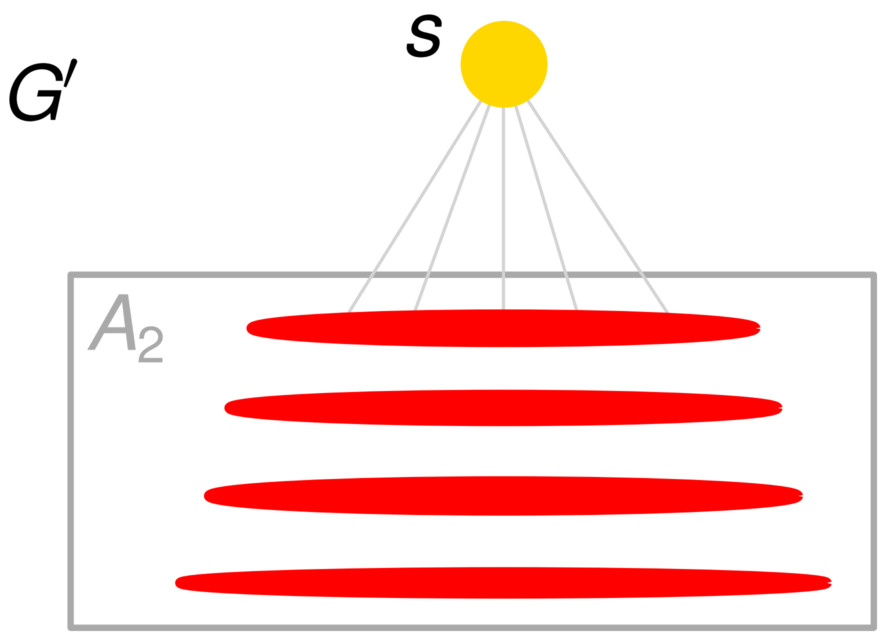
Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

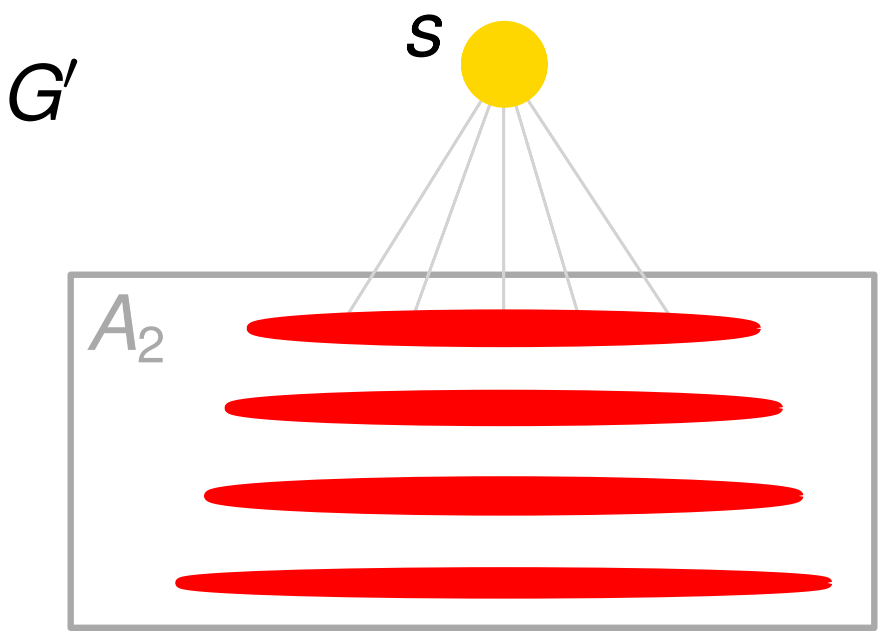
Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

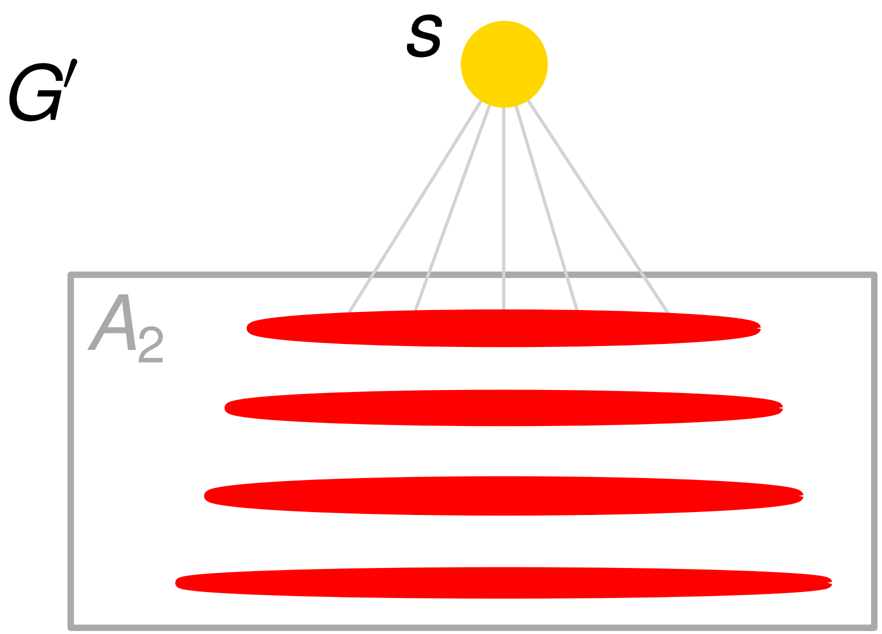


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'

Beweis des Planar-Separator-Theorem

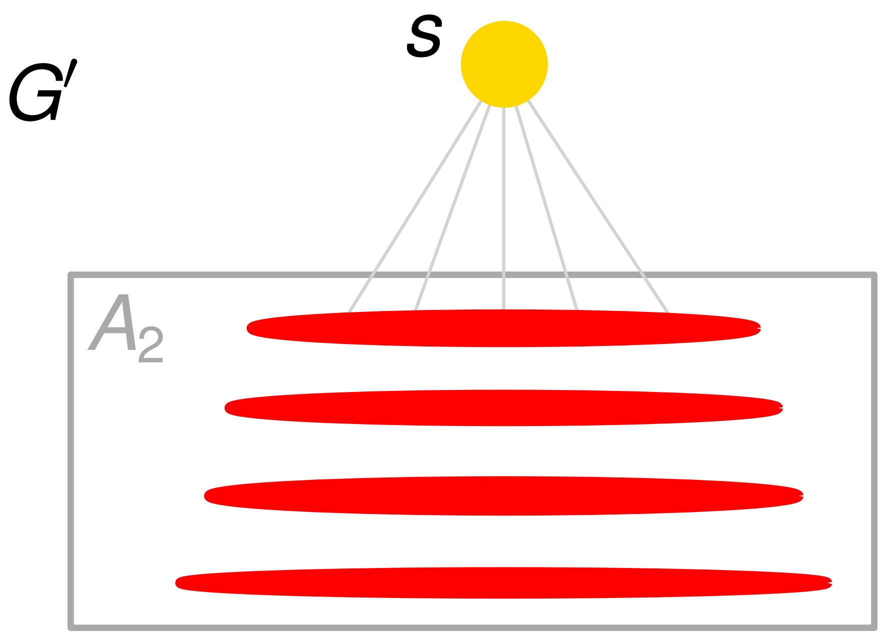


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels

Beweis des Planar-Separator-Theorem



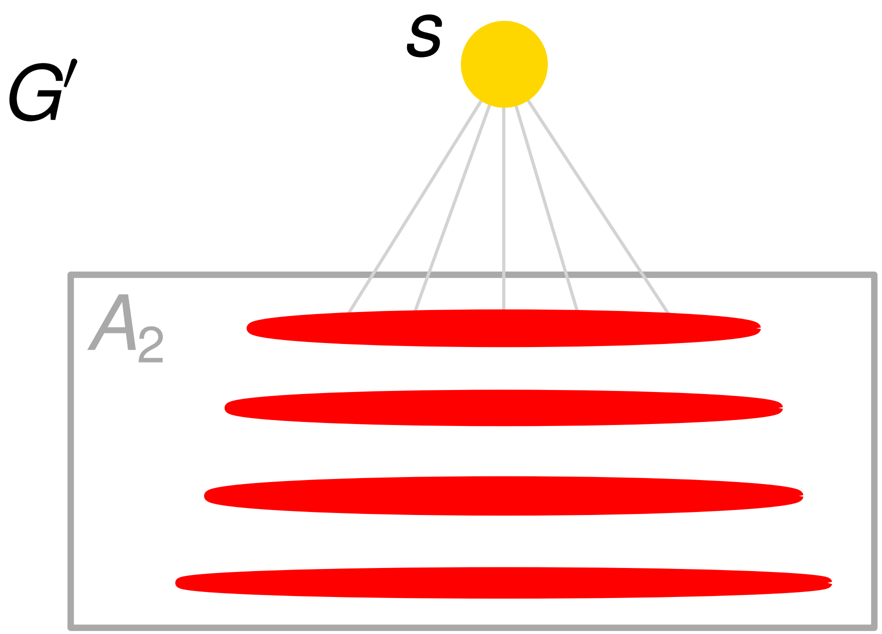
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S', U_1, U_2

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beweis des Planar-Separator-Theorem

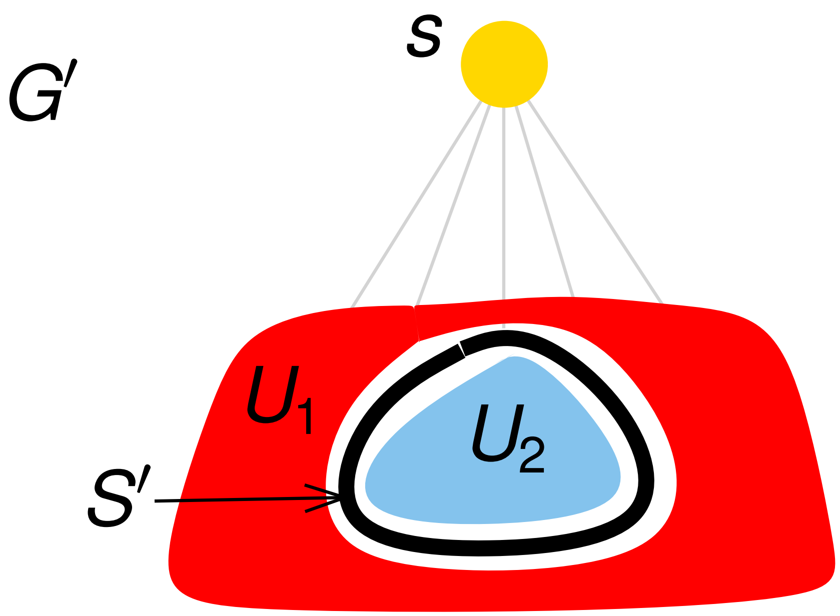
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,

Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h. Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1, V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$

- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S', U_1, U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

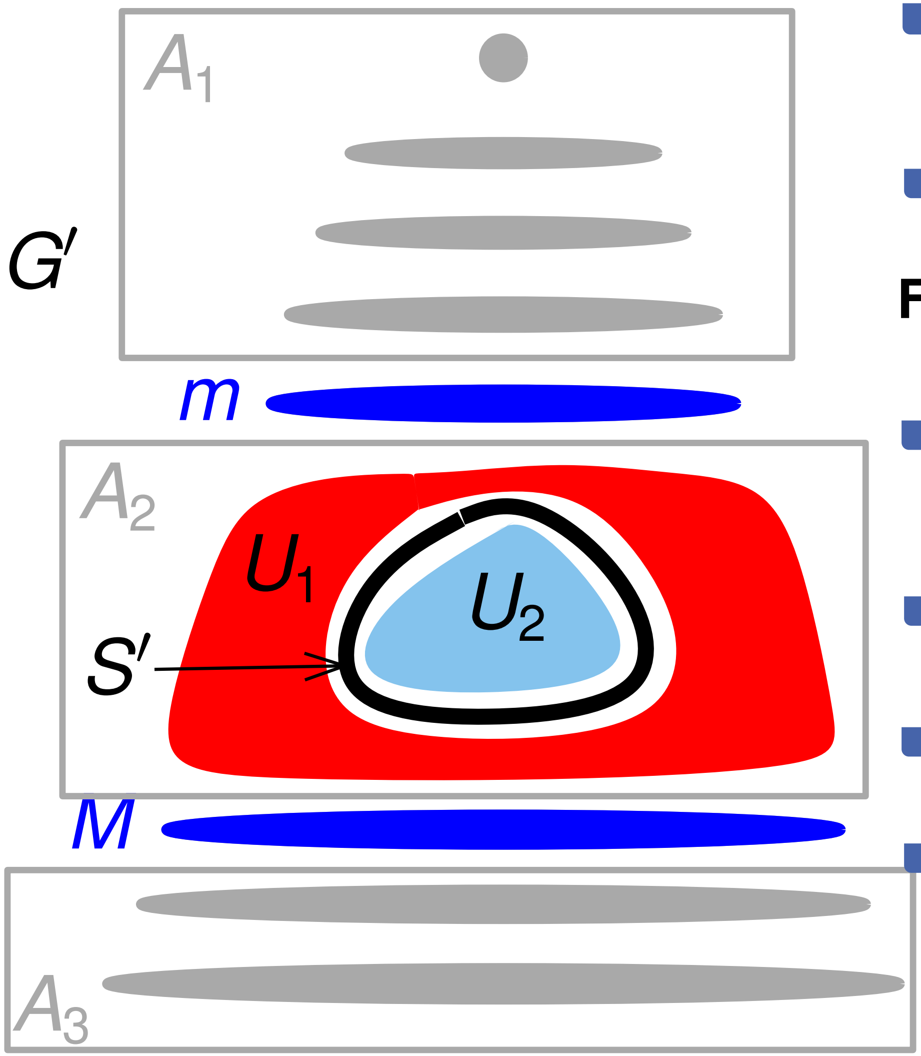


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S', U_1, U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

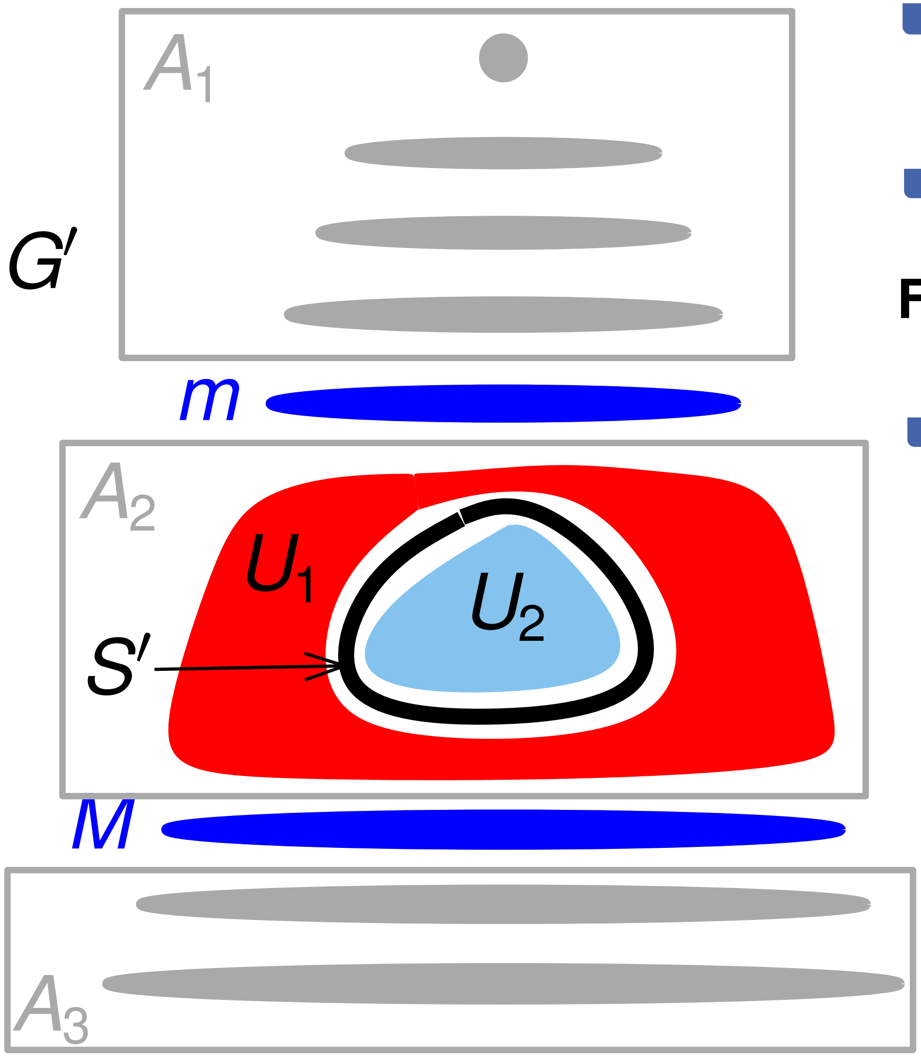


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$, $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S', U_1, U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem

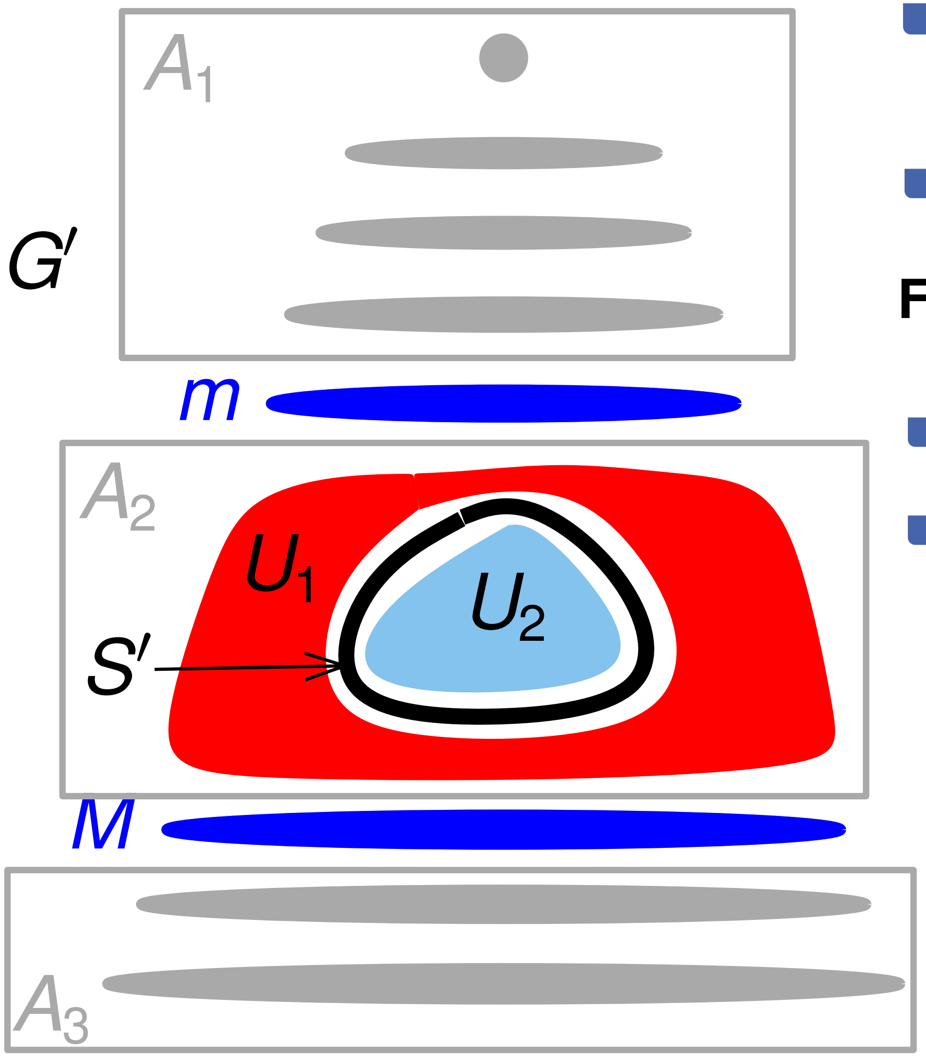


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$, $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$

Beweis des Planar-Separator-Theorem



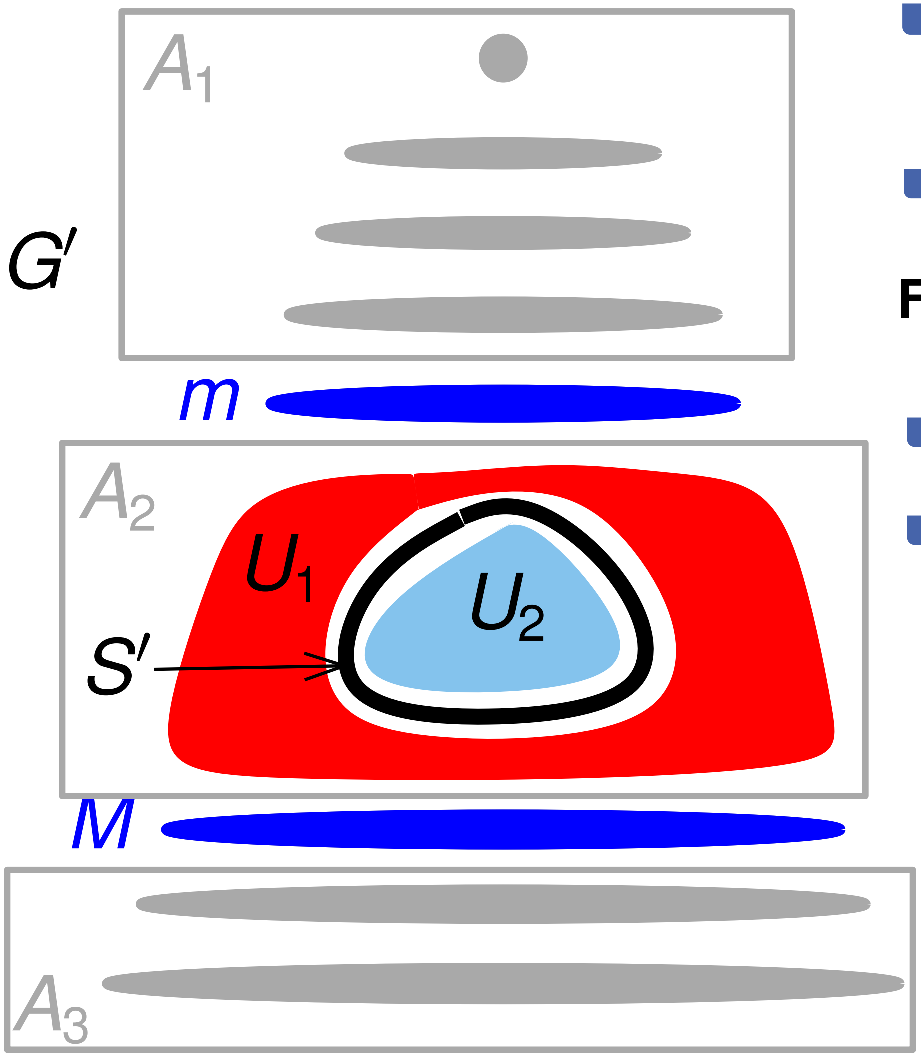
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
  $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beweis des Planar-Separator-Theorem



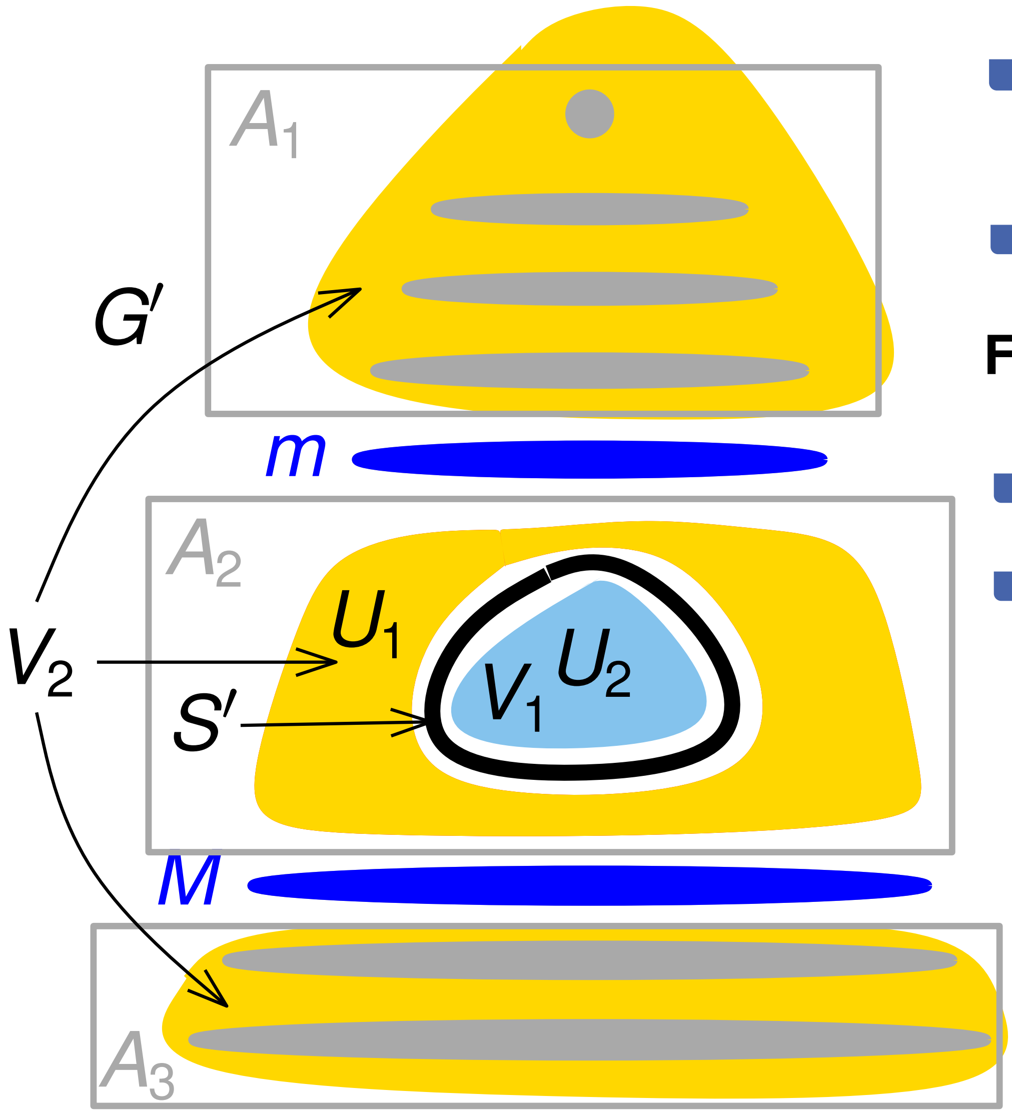
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
  $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
  - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beweis des Planar-Separator-Theorem

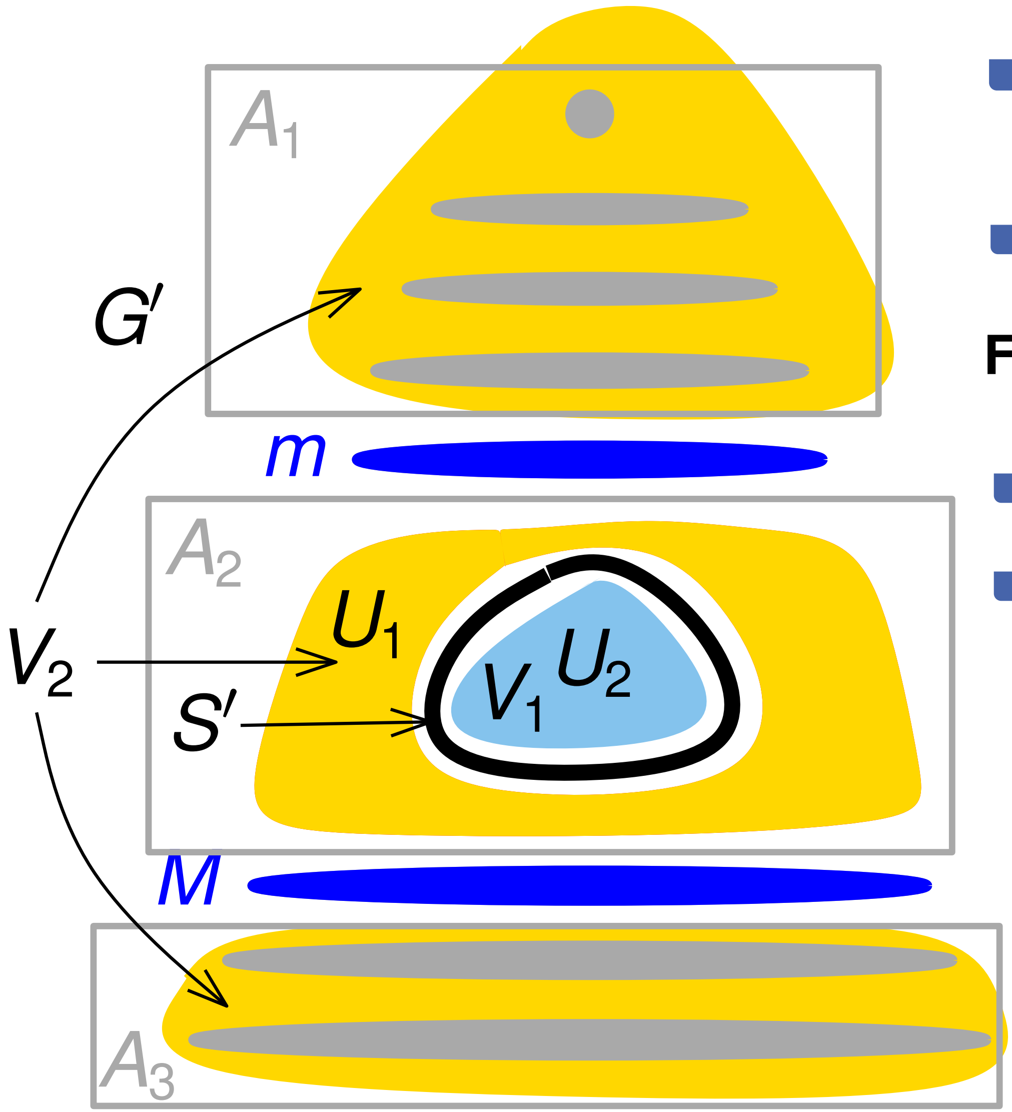


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
  $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
  - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem



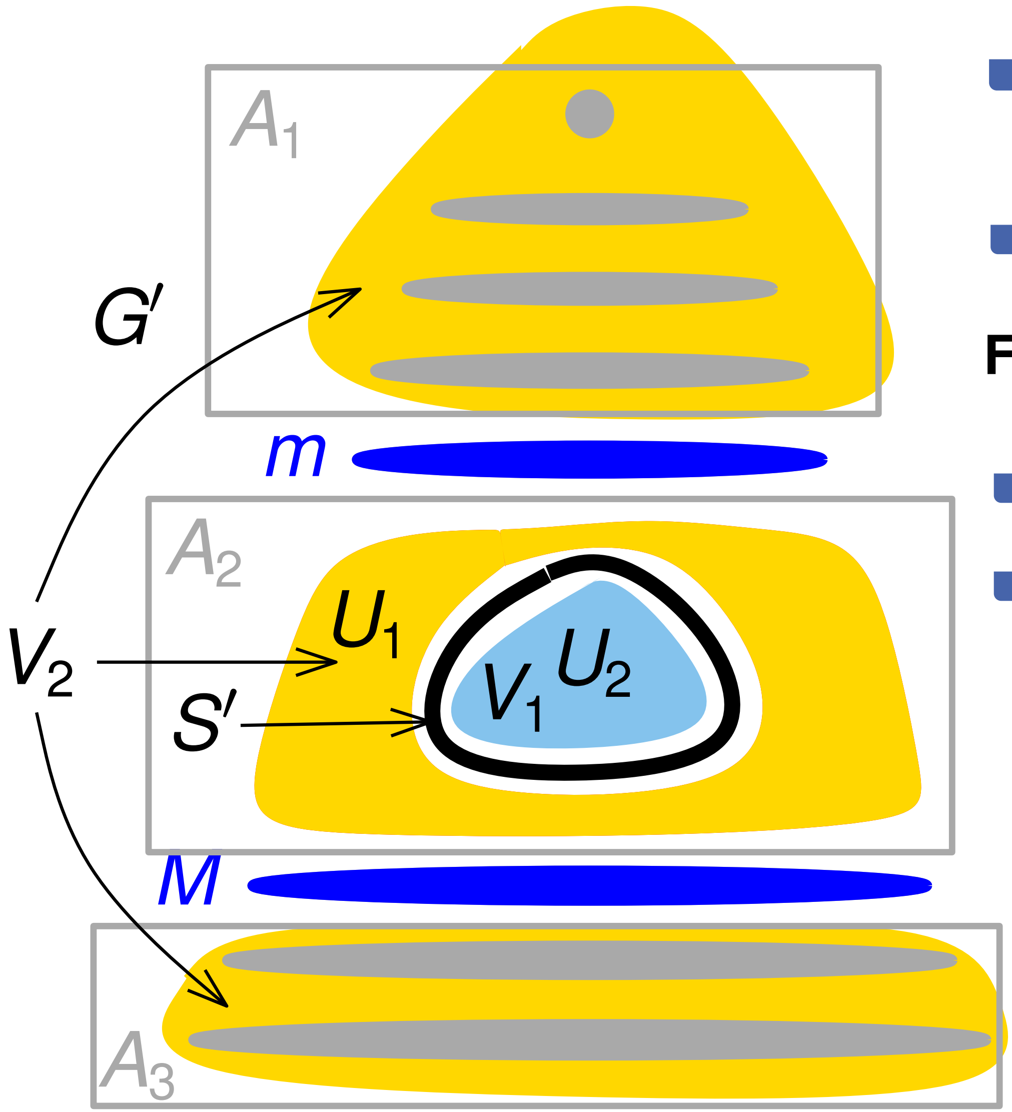
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
  $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
  - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.
  - $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2}|A_2|$.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
  $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
- Nach wichtigem Lemma,
  $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
  - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.
  - $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2}|A_2|$.
  - $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$,
    $|V_2| = n - |V_1| - |S| < n - \frac{1}{2}|A_2| < \frac{2}{3}n$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 4

Gegeben:

- Zusammenhängender, planarer Graph $G = (V, E)$ mit $n \geq 5$ Knoten und maximalem Knotengrad Δ

Aussage: Es gibt einen Schnitt $S \subseteq E$ von G mit $|S| \leq 4\Delta\sqrt{n}$, so dass $G - S = (V, E \setminus S)$ aus zwei disjunkten Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ besteht mit

- $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$, $|V_2| \leq \frac{2}{3}n$,
- $V_1 \cup V_2 = V$ und
- $E_1 \cup E_2 = E \setminus S$.

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G. Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G. Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegeben Knoten v von G entweder

- die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
- entscheidet, dass v nicht auf einem kürzesten Kreis in G liegt.

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G. Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegeben Knoten v von G entweder
   - die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
   - entscheidet, dass v nicht auf einem kürzesten Kreis in G liegt.

b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 5

Der *Umfang* (engl. girth) eines Graphen G ist die Länge eines kürzesten Kreises in G. Enthält G keinen Kreis, so ist der Umfang ∞.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der für einen gegeben Knoten v von G entweder
   - die Länge des kürzesten Kreises berechnet auf dem v liegt, oder
   - entscheidet, dass v nicht auf einem kürzesten Kreis in G liegt.

b) Verwenden Sie das Verfahren aus Aufgabenteil a), um für einen beliebigen Graphen den Umfang zu berechnen. Welche Laufzeit erhalten Sie?

c) Beschleunigen Sie Ihren Algorithmus für den Fall, dass der Eingabegraph planar ist.

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zeigen Sie:

1. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star$. Für eine Teilmenge $E' \subseteq E$ gilt, dass der Teilgraph (V, E') von G genau dann einen Kreis enthält, wenn der Teilgraph $(V^\star, (E \setminus E')^\star)$ von $G^\star$ unzusammenhängend ist.
2. Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit Dualgraph $G^\star = (V^\star, E^\star)$, und $E' \subseteq E$. Dann ist (V, E') ein aufspannender Baum von G genau dann, wenn $(V^\star, (E \setminus E')^\star)$ ein aufspannender Baum von $G^\star$ ist.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2

Geben Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen zusammenhängenden Graphen mit n Knoten an, für den ein Matching maximaler Kardinalität genau

1. $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ Kanten
2. eine Kante

enthält. Geben Sie jeweils an, wie ein solches kardinalitätsmaximales Matching aussieht.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 3

Ein Matching M zu einem Graphen G heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G zu einer Kante aus M inzident ist. Für welche $n \geq 1$ und $m \geq 1$ besitzen die folgenden Graphen jeweils ein perfektes Matching?

1. P_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Weg mit n Knoten)
2. C_n (der Graph bestehend aus einem einfachen Kreis mit n Knoten)
3. Q_n
4. K_n
5. $K_{n,m}$

Aufgabe 4

Sei G ein planarer Graph mit n Knoten. Geben Sie eine Datenstruktur mit linearer Größe an, mit deren Hilfe nach linearer Vorberechnung Adjazenzen von Knoten in konstanter Zeit abgefragt werden können.
Das heißt, gegeben zwei Knoten u und v von G, kann die Frage ob die Kante $\{u, v\}$ in G ist, in konstanter Zeit beantwortet werden.

Hinweis: Richten Sie die Kanten so, dass jeder Knoten höchstens fünf ausgehende Kanten hat.