Karlsruher Institut für Technologie

Algorithmen für Planare Graphen
Übung am 25.04.2016

Institut für Theoretische Informatik · Prof. Dr. Dorothea Wagner

Übung für Algorithmen für Planare Graphen

Übungsleiter

- Benjamin Niedermann
- `niedermann@kit.edu`
- Raum 316
- Sprechzeiten: individuell per Mail vereinbaren

Vorlesungen und Übungen:

- Montag, 15:45-17:15, Hörsaal -102 - Gebäude 50.34 - Informatik-Hauptgebäude
- Dienstag, 14:00–15:30, Hörsaal II - Gebäude 30.41 - Chemie Flachbau

Für Abweichungen siehe Homepage:

i11www.iti.uni-karlsruhe.de/teaching/sommer2016/planargraphs/index

Übung für Algorithmen für Planare Graphen

Übungsleiter

- Benjamin Niedermann
- `niedermann@kit.edu`
- Raum 316
- Sprechzeiten: individuell per Mail vereinbaren

Vorlesungen und Übungen:

- Montag, 15:45-17:15, Hörsaal -102 - Gebäude 50.34 - Informatik-Hauptgebäude
- Dienstag, 14:00–15:30, Hörsaal II - Gebäude 30.41 - Chemie Flachbau

Für Abweichungen siehe Homepage:

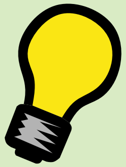
i11www.iti.uni-karlsruhe.de/teaching/sommer2016/planargraphs/index

Morgen (26.04.16): Keine Veranstaltung.

Ablauf des Übungsbetrieb

- Es wird voraussichtlich 7 Übungsblätter geben.
- Bearbeitung ist freiwillig, **aber** wird sehr **empfohlen**!!!
- Lösungen werden in den Übungen besprochen/**diskutiert**.

Tag der Besprechung des aktuellen ÜB
=
Tag der Ausgabe für nächstes ÜB.



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

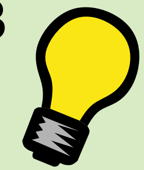
Ablauf des Übungsbetrieb

- Es wird voraussichtlich 7 Übungsblätter geben.
- Bearbeitung ist freiwillig, **aber** wird sehr **empfohlen**!!!
- Lösungen werden in den Übungen besprochen/**diskutiert**.

Tag der Besprechung des aktuellen ÜB

=

Tag der Ausgabe für nächstes ÜB.



Aufgaben werden an der Tafel besprochen

Es wird keine Musterlösung geben.

→ Anwesenheit lohnt sich!

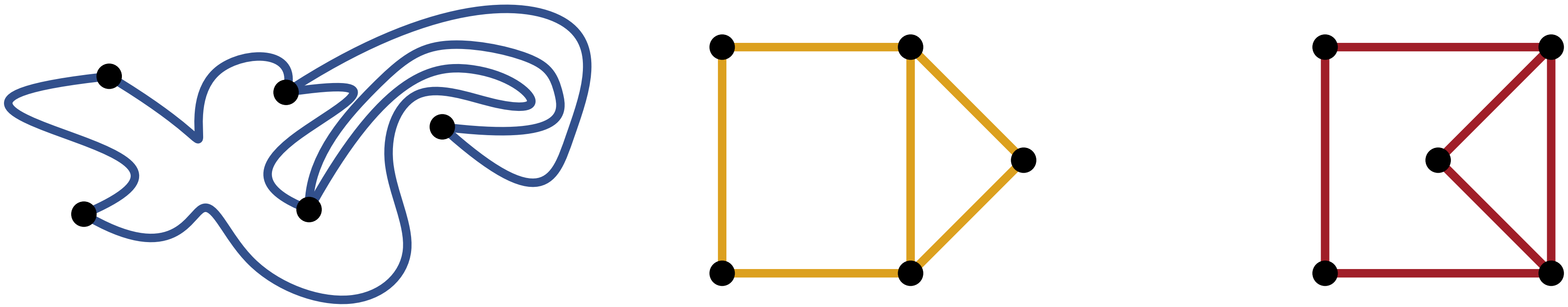
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Repräsentation und Eigenschaften von Planaren Graphen

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Planare Graphen

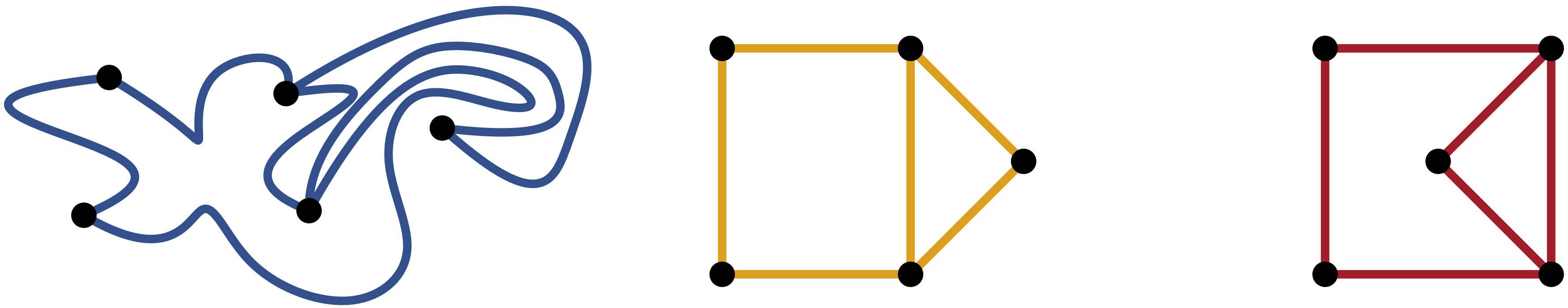
Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, falls er eine planare Einbettung in der Ebene besitzt, d.h., er kann so in der Ebene *gezeichnet* werden, dass sich keine Kanten kreuzen.



→ Planare Graphen sind also *geometrisch* definiert.

Planare Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, falls er eine planare Einbettung in der Ebene besitzt, d.h., er kann so in der Ebene *gezeichnet* werden, dass sich keine Kanten kreuzen.



$\longrightarrow$ Planare Graphen sind also *geometrisch* definiert.

Welche geometrischen Eigenschaften besitzt ein planarer Graph?

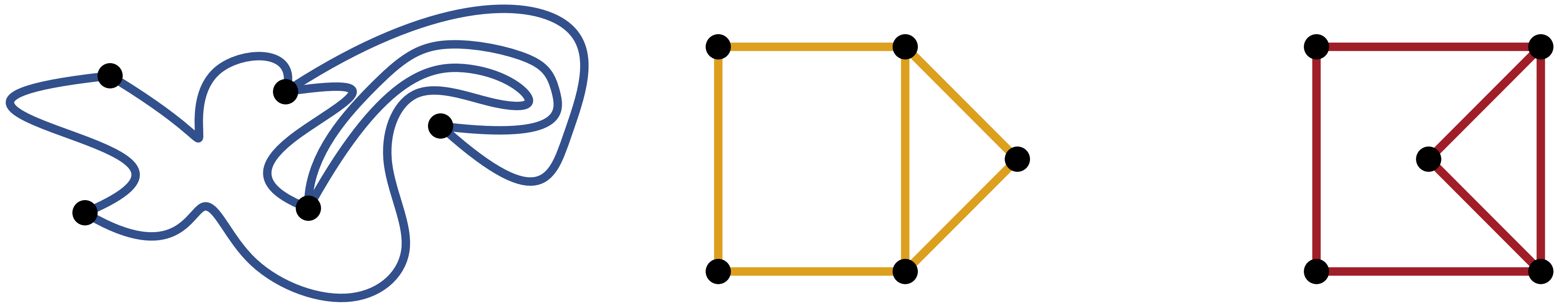
- Wie kann man planaren Graphen zeichnen?
- Kann man immer eine geradlinige Zeichnung finden?
- Wie groß muss die Zeichenfläche sein?
- ...

$\longrightarrow$ Vorlesung *Graphenvisualisierung*

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Planare Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, falls er eine planare Einbettung in der Ebene besitzt, d.h., er kann so in der Ebene *gezeichnet* werden, dass sich keine Kanten kreuzen.



→ Planare Graphen sind also *geometrisch* definiert.

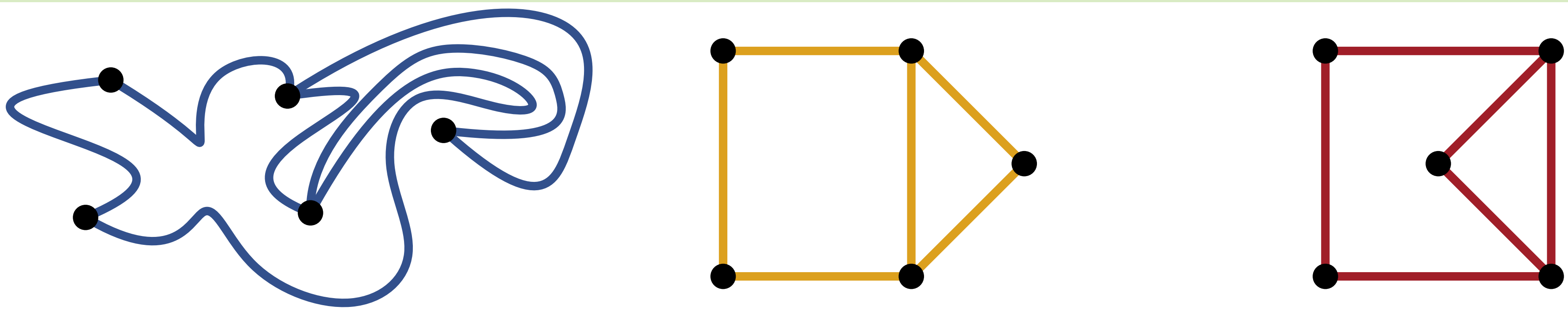
Welche **kombinatorischen** Eigenschaften besitzt ein planarer Graph?

- Verhältnis Kanten-, Knoten-, Facettenzahl?
- Färbarkeit?
- Gibt es Dinge (z.B. Schnitte, Flüsse) die man schneller berechnen kann?
- ... → Vorlesung ***Algorithmen für planare Graphen***

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Planare Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *planar*, falls er eine planare Einbettung in der Ebene besitzt, d.h., er kann so in der Ebene *gezeichnet* werden, dass sich keine Kanten kreuzen.



→ Planare Graphen sind also *geometrisch* definiert.

Welche **kombinatorischen** Eigenschaften besitzt ein planarer Graph?

- Verhältnis Kanten-, Knoten-, Facettenzahl?
- . . . → Vorlesung ***Algorithmen für planare Graphen***

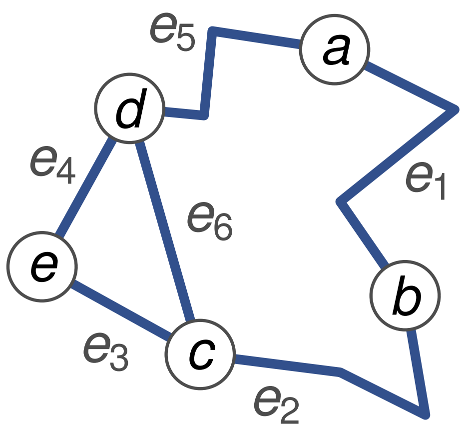
Nicht an der Geometrie einer Einbettung interessiert, sondern an ihrer Kombinatorik!

→ Finde Beschreibung der Einbettung, die möglichst von Geometrie abstrahiert.

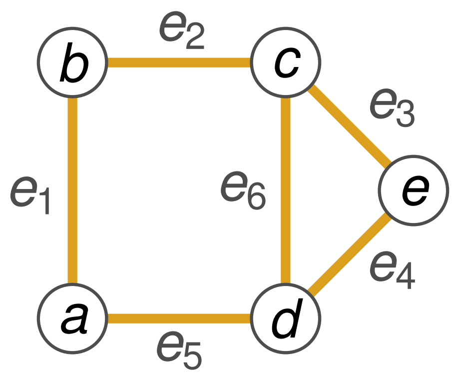
Repräsentation

Was unterscheidet die Einbettungen E_1, E_2 von E_3?

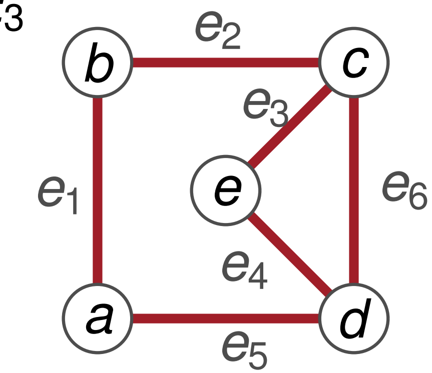
E_1



E_2



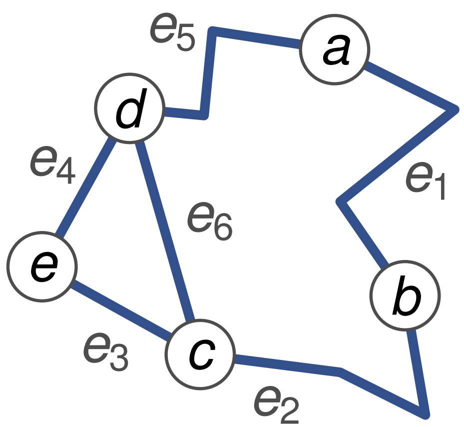
E_3



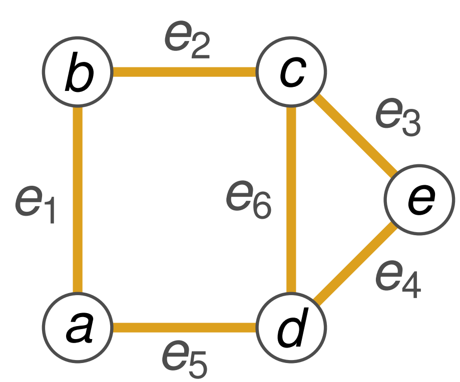
Repräsentation

Was unterscheidet die Einbettungen E_1, E_2 von E_3?

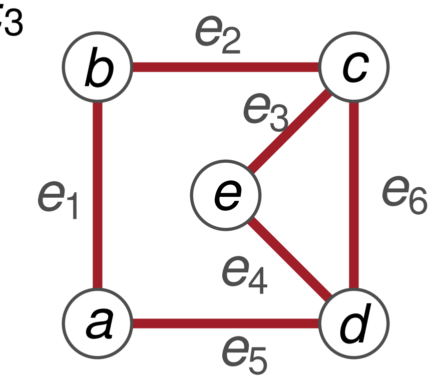
E_1



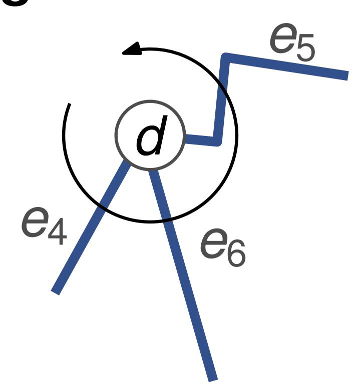
E_2



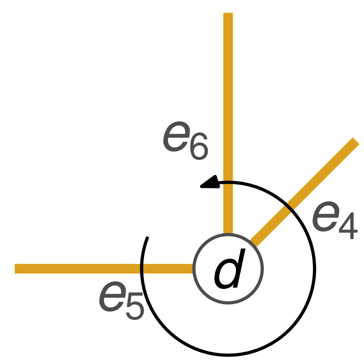
E_3



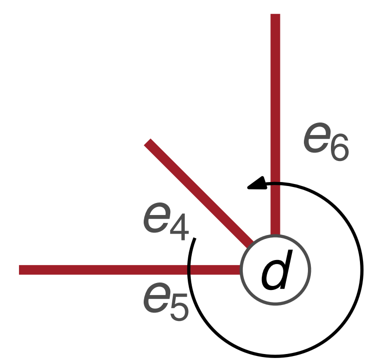
Für E_1 und E_2 ist für **jeden** Knoten die **zyklische Ordnung** der inzidenten Kanten gleich:



e_4 e_6 e_5 e_4



e_4 e_6 e_5 e_4

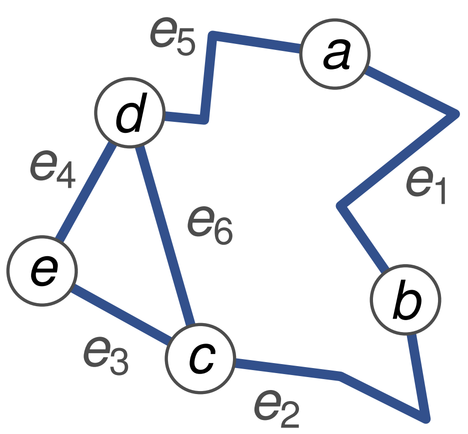


e_4 e_5 e_6 e_4

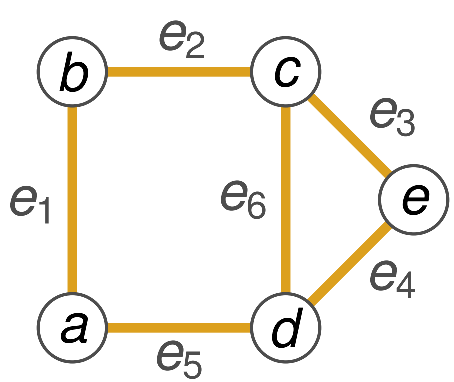
Repräsentation

Was unterscheidet die Einbettungen E_1, E_2 von E_3?

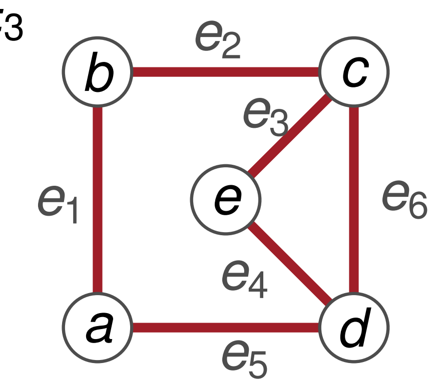
E_1



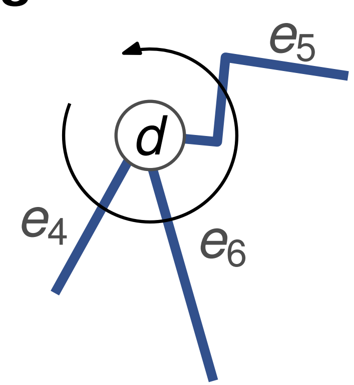
E_2



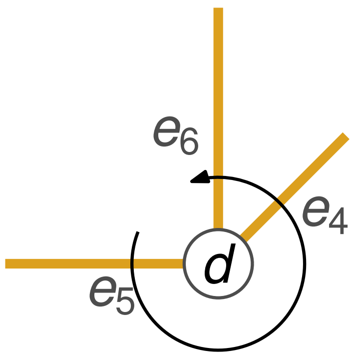
E_3



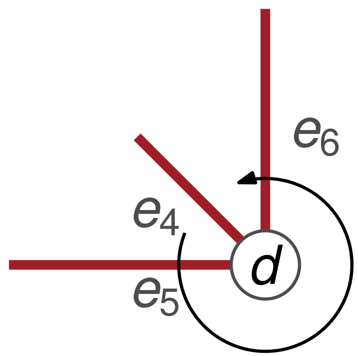
Für E_1 und E_2 ist für **jeden** Knoten die **zyklische Ordnung** der inzidenten Kanten gleich:



e_4 e_6 e_5 e_4



e_4 e_6 e_5 e_4



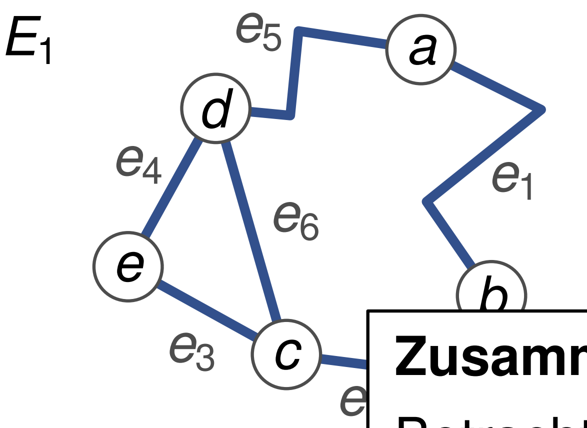
e_4 e_5 e_6 e_4

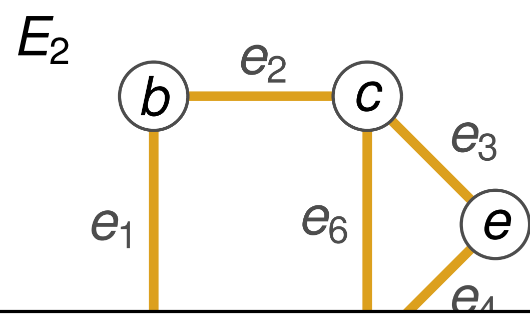
E_1 und E_2 haben dasselbe *Rotationssystem*

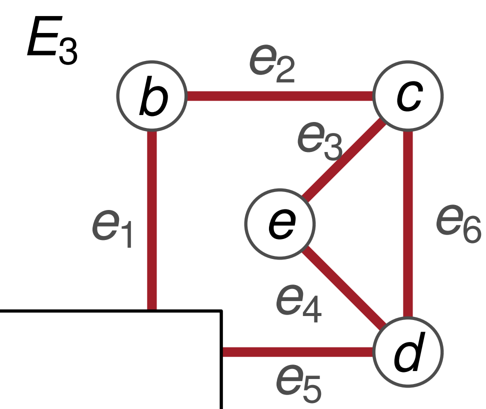
→ E_1 und E_2 sind *Repräsentanten* derselben *kombinatorischen Einbettung*.

Repräsentation

Was unterscheidet die Einbettungen E_1, E_2 von E_3?



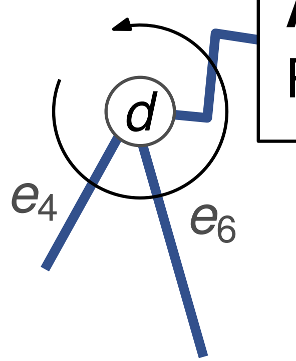




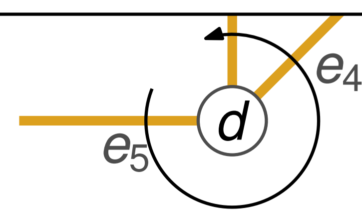
Zusammenfassung:
Betrachte vor allem kombinatorische Einbettung, und nicht geometrische Einbettung.

Aber: Gebe diese üblicherweise mithilfe eines Repräsentanten an.

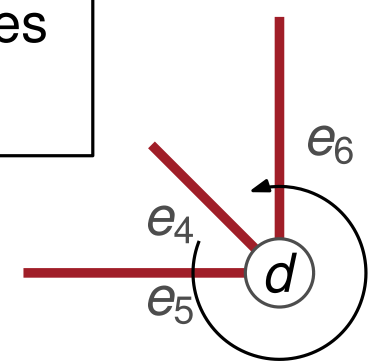
Für E_1 und E_2 i
nung der inzide



e_4 e_6 e_5 e_4



e_4 e_6 e_5 e_4



e_4 e_5 e_6 e_4

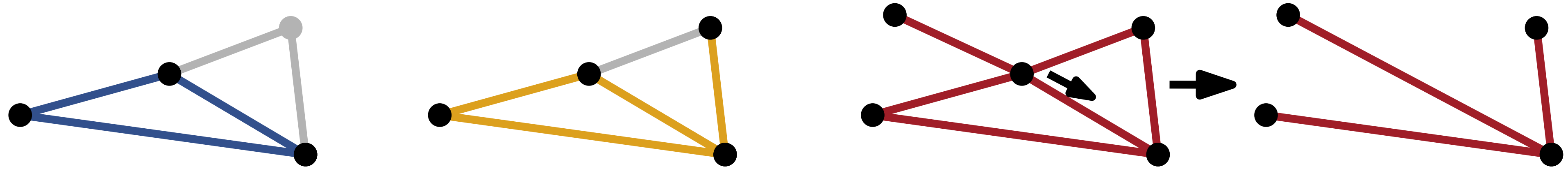
E_1 und E_2 haben dasselbe *Rotationssystem*

→ E_1 und E_2 sind *Repräsentanten* derselben *kombinatorischen Einbettung*.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Minorenbildung

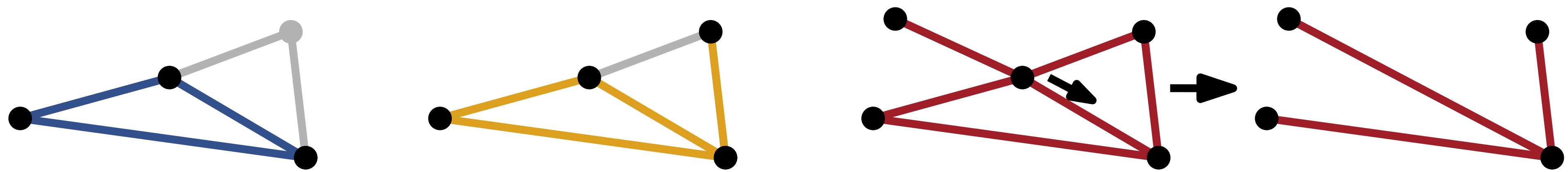
Ein ungerichteter Graph H ist ein **Minor** von $G = (V, E)$, falls man H aus G erhalten kann, indem man:



1) Knoten löscht 2) Kanten löscht 3) Kanten kontrahiert.

Minorenbildung

Ein ungerichteter Graph H ist ein **Minor** von $G = (V, E)$, falls man H aus G erhalten kann, indem man:



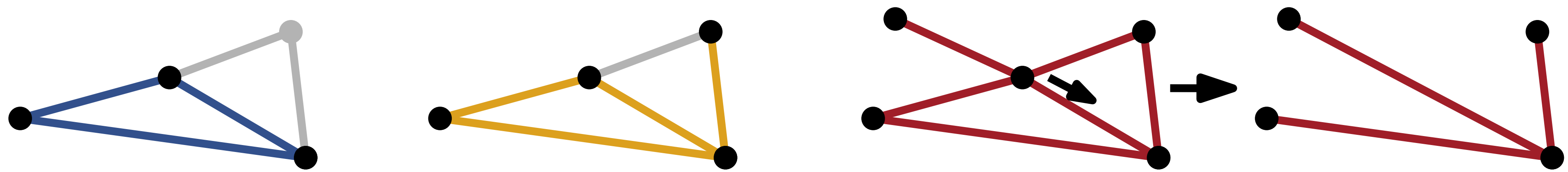
1) Knoten löscht 2) Kanten löscht 3) Kanten kontrahiert.

Planare Graphen sind unter Minorenbildung abgeschlossen!

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Minorenbildung

Ein ungerichteter Graph H ist ein **Minor** von $G = (V, E)$, falls man H aus G erhalten kann, indem man:



1) Knoten löscht

2) Kanten löscht

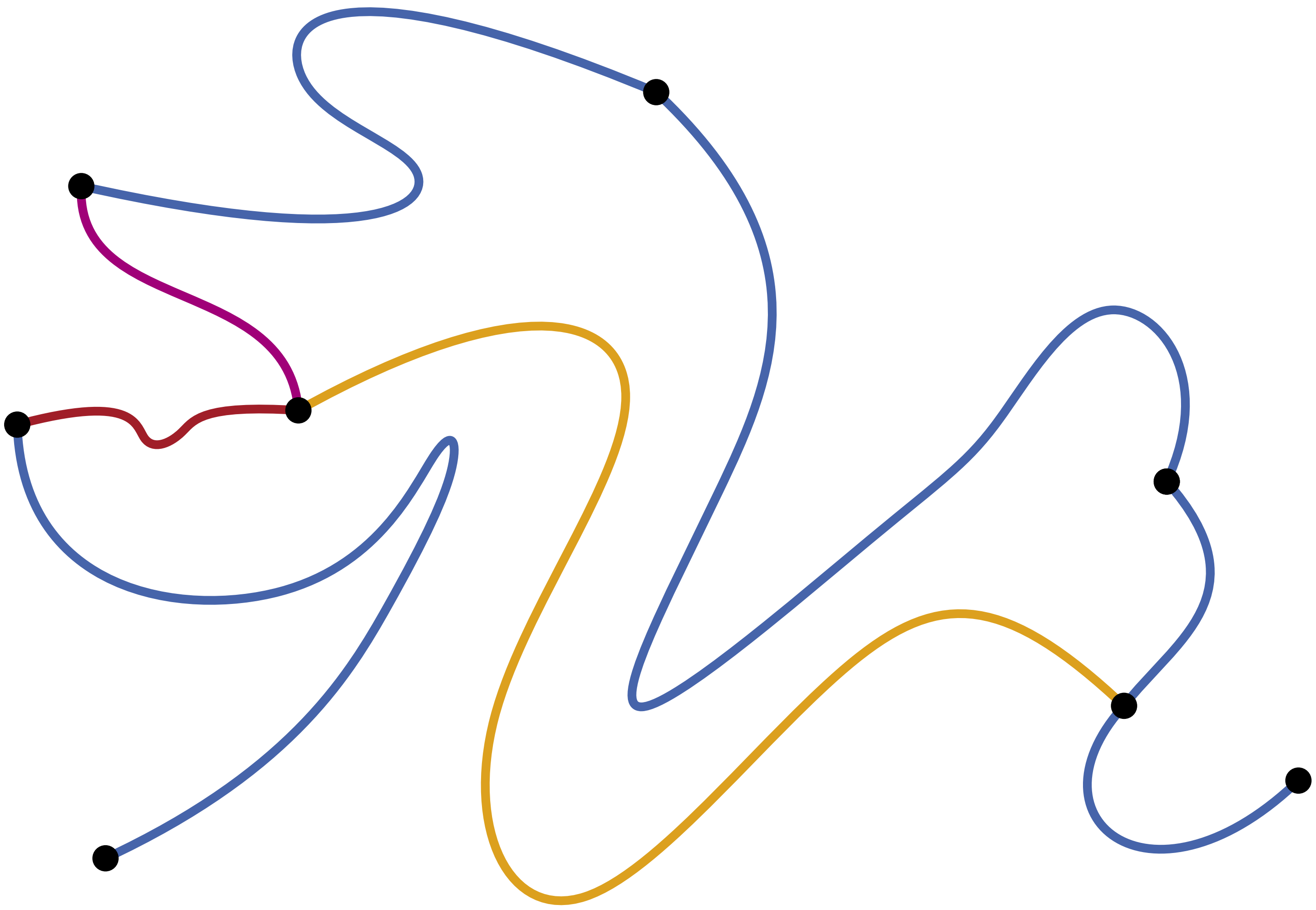
3) Kanten kontrahiert.

Planare Graphen sind unter Minorenbildung abgeschlossen!

Kanten kontrahieren (Kein formaler Beweis)

Karlsruher Institut für Technologie

Betrachte beliebigen planaren Graphen $G = (V, E)$ und Kante $\{u, v\} \in E$, die kontrahiert werden soll.



Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

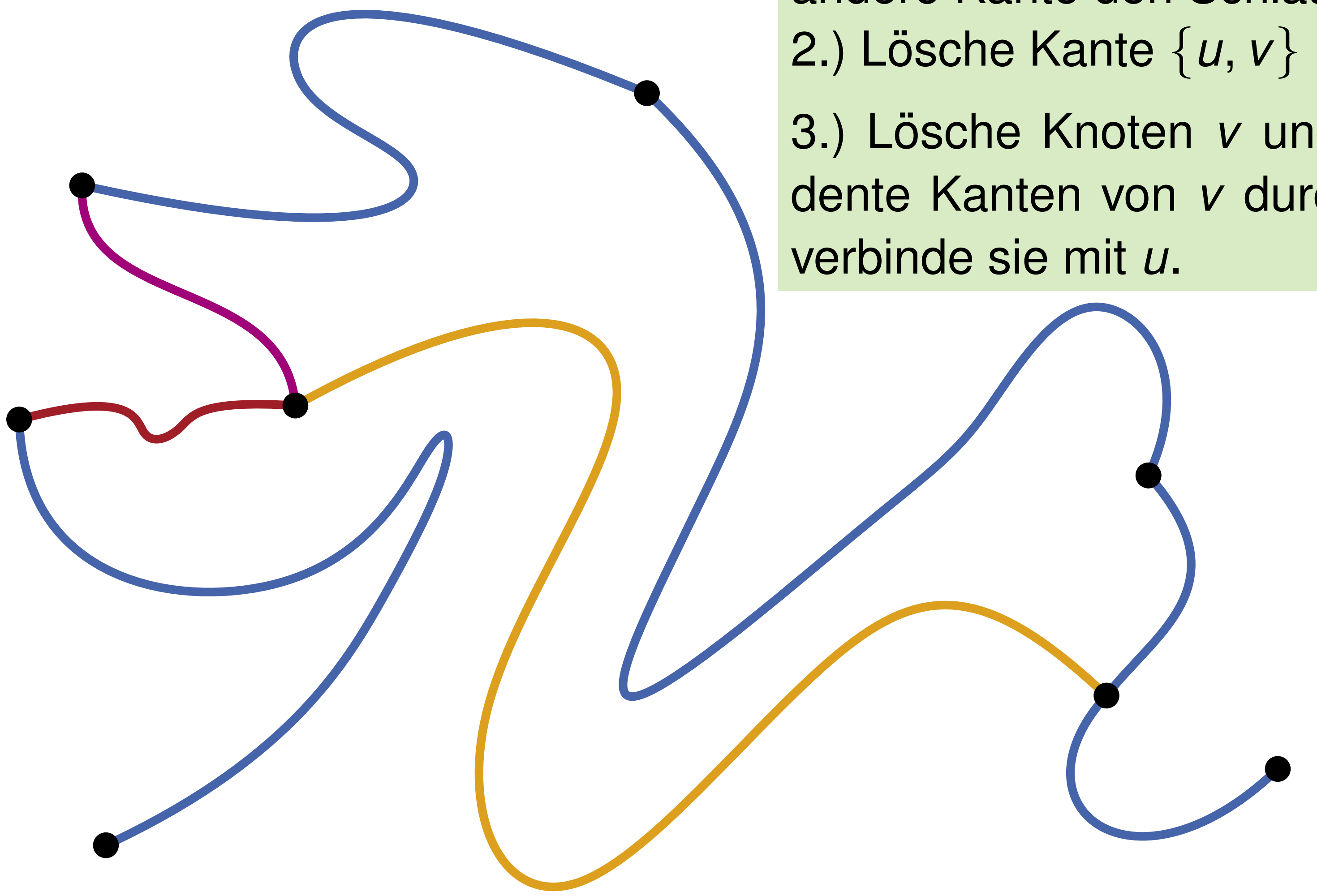
Kanten kontrahieren (Kein formaler Beweis)

Betrachte beliebigen planaren Graphen $G = (V, E)$ und Kante $\{u, v\} \in E$, die kontrahiert werden soll.

1.) Lege ϵ-Schlauch um $\{u, v\}$, sodass keine andere Kante den Schlauch schneidet.

2.) Lösche Kante $\{u, v\}$

3.) Lösche Knoten v und führe restliche inzidente Kanten von v durch den Schlauch und verbinde sie mit u.

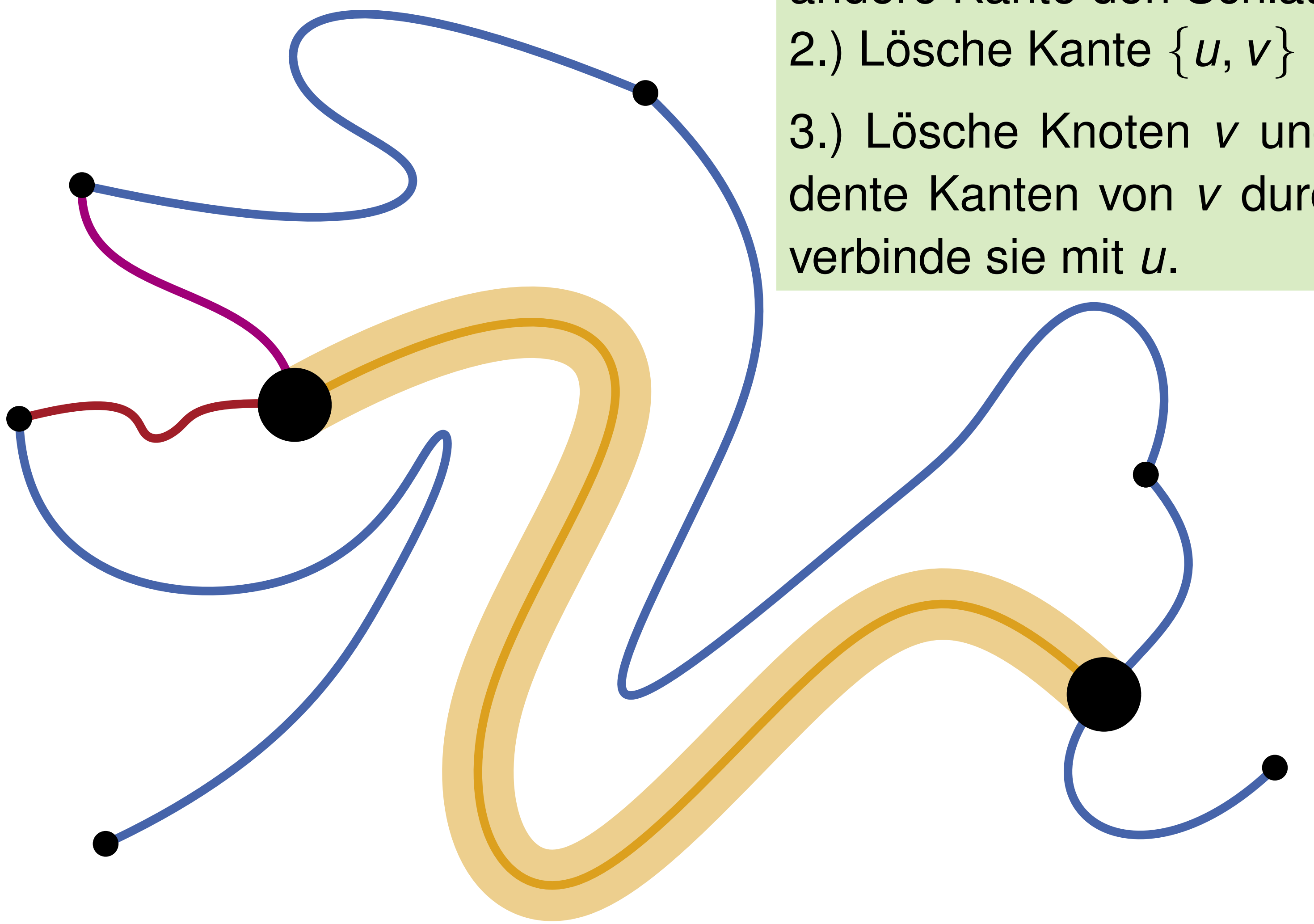


Kanten kontrahieren (Kein formaler Beweis)

Betrachte beliebigen planaren Graphen $G = (V, E)$ und Kante $\{u, v\} \in E$, die kontrahiert werden soll.

1.) Lege ϵ-Schlauch um $\{u, v\}$, sodass keine andere Kante den Schlauch schneidet.
2.) Lösche Kante $\{u, v\}$

3.) Lösche Knoten v und führe restliche inzidente Kanten von v durch den Schlauch und verbinde sie mit u.

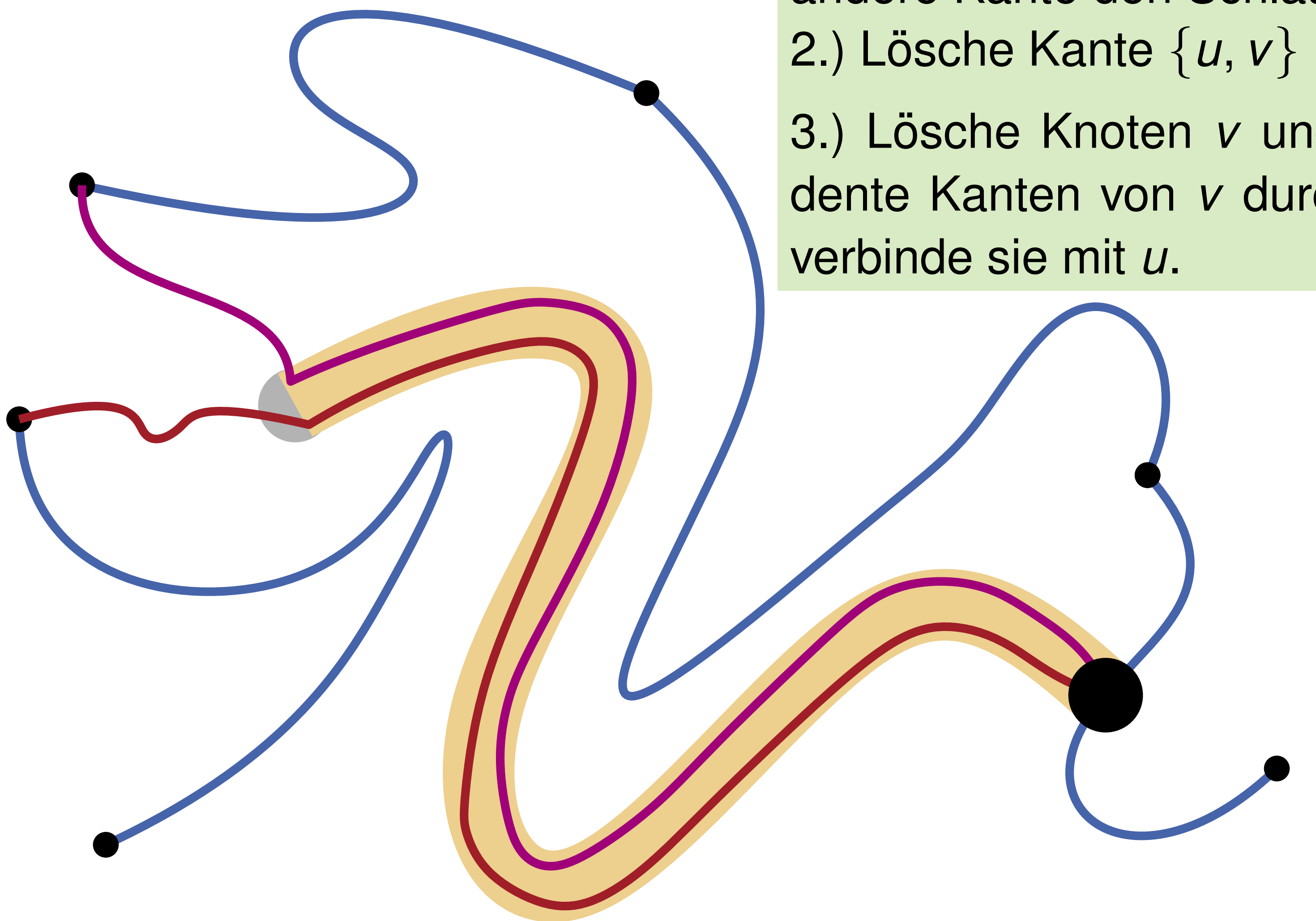


Kanten kontrahieren (Kein formaler Beweis)

Betrachte beliebigen planaren Graphen $G = (V, E)$ und Kante $\{u, v\} \in E$, die kontrahiert werden soll.

1.) Lege ϵ-Schlauch um $\{u, v\}$, sodass keine andere Kante den Schlauch schneidet.
2.) Lösche Kante $\{u, v\}$

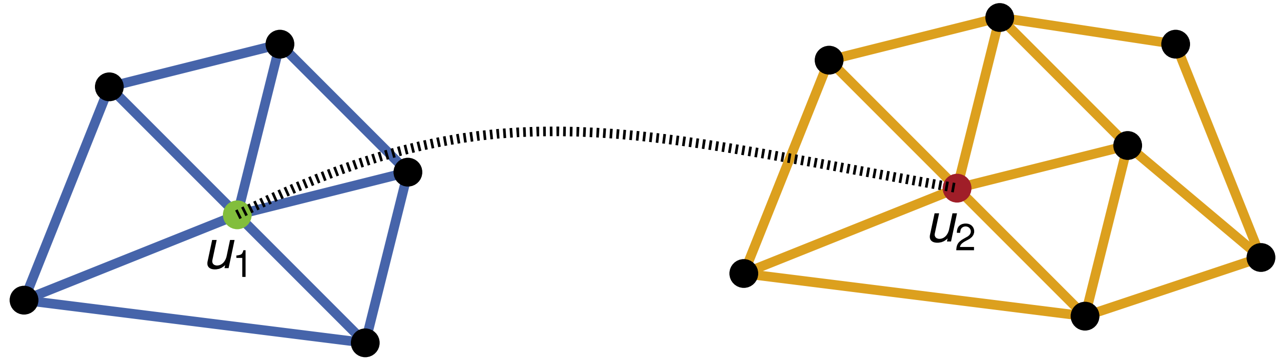
3.) Lösche Knoten v und führe restliche inzidente Kanten von v durch den Schlauch und verbinde sie mit u.



Äußere Facette

Gegeben planare Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$, sowie zwei Knoten $u_1 \in V_1$ und $u_2 \in V_2$:

Ist $G_{1,2} = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{u_1, u_2\}\})$ ebenfalls planar?

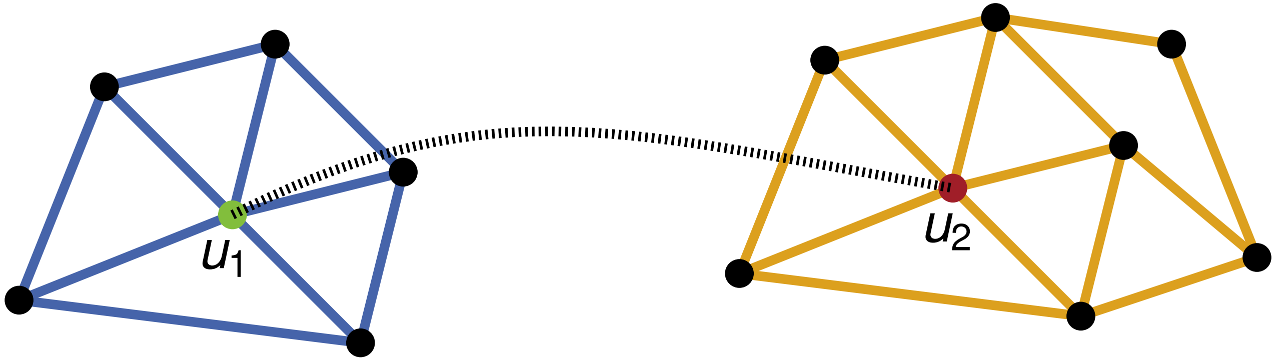


Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Äußere Facette

Gegeben planare Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$, sowie zwei Knoten $u_1 \in V_1$ und $u_2 \in V_2$:

Ist $G_{1,2} = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{u_1, u_2\}\})$ ebenfalls planar?

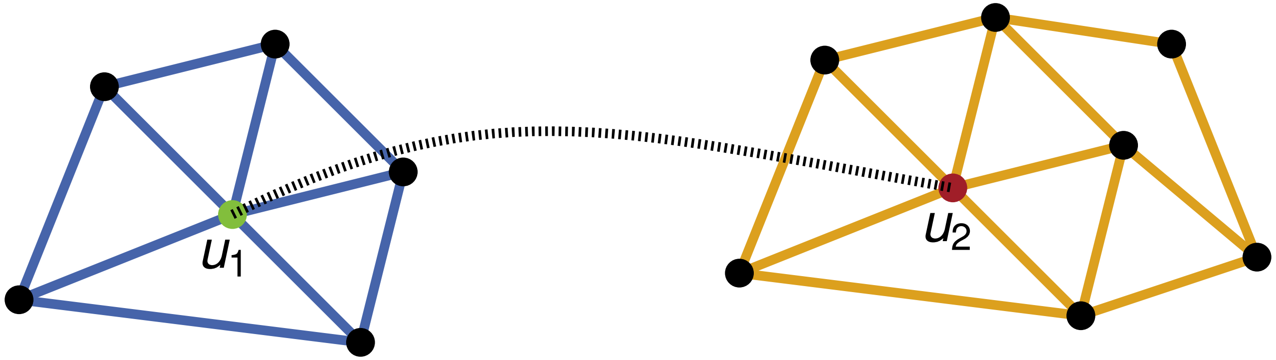


Idee: Finde planare Einbettungen von G_1 und G_2, für welche die Knoten u_1 bzw. u_2 auf der äußeren Facette liegen.

Äußere Facette

Gegeben planare Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$, sowie zwei Knoten $u_1 \in V_1$ und $u_2 \in V_2$:

Ist $G_{1,2} = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{\{u_1, u_2\}\})$ ebenfalls planar?



Idee: Finde planare Einbettungen von G_1 und G_2, für welche die Knoten u_1 bzw. u_2 auf der äußeren Facette liegen.

Lemma: Sei G ein planarer Graph und f eine beliebige Facette von G. Es gibt eine planare Einbettung von G, sodass f äußere Facette ist.

Übungsaufgaben

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 1

Definition: Der *n-dimensionale Würfel* Q_n ist ein Graph mit folgenden Knoten und Kanten: Die Knotenmenge besteht aus den Wörtern der Länge n über dem Alphabet $\{0, 1\}$. D.h. $V(Q_n) = \{0, 1\}^n$. Zwei Knoten sind genau dann adjazent, wenn die zugehörigen Wörter sich in genau einer Stelle unterscheiden.

1. Wieviele Knoten hat Q_n? Wieviele Kanten hat Q_n?
2. Beschreiben Sie die Knotengrade der Knoten im Q_n.
3. Betten Sie Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 (wenn möglich kreuzungsfrei) in die Ebene ein.
4. Betten Sie Q_4 kreuzungsfrei auf der Oberfläche eines Torus ein.

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Aufgabe 2

Gegeben ein planarer Graph G mit einer kreuzungsfreien Einbettung in die Ebene, die f Facetten enthält. Sei a_i, $1 \leq i \leq f$, die Anzahl der zur Facette i inzidenten Kanten von G. Numeriere die Facetten so, dass die Folge $(a_1, a_2, \ldots, a_f)$ nichtabsteigend sortiert ist.

Kann es zu einem planaren Graph G zwei Einbettungen in die Ebene geben, sodass die zugehörigen Zahlenfolgen unterschiedlich sind?

Aufgabe 3

Die *Skewness* eines Graphen G ist die minimale Anzahl von Kanten, die aus G gelöscht werden müssen, damit der resultierende Graph planar ist. D.h. die Skewness eines Graphen ist Null genau dann, wenn der Graph planar ist.

1. Zeigen Sie, dass für einen einfachen Graphen G mit $n \geq 3$ Knoten und m Kanten gilt:
$$\mathit{skewness}(G) \geq m - 3n + 6.$$
2. Berechnen Sie die *Skewness* von K_3, K_5, $K_{3,3}$ und K_6.

Aufgabe 4

Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen für einen Graphen G mit n Knoten:

1. G ist ein Baum, d.h. G ist zusammenhängend und kreisfrei.
2. G ist zusammenhängend und hat $n - 1$ Kanten.
3. G ist kreisfrei und hat $n - 1$ Kanten.