

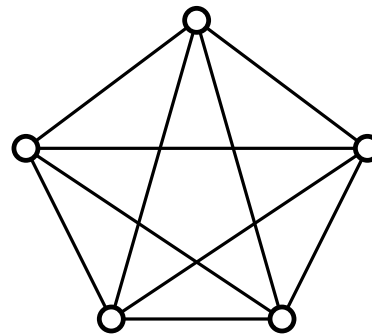
# Der Satz von Kuratowski

## Vorlesung am 19.04./02.05.2016

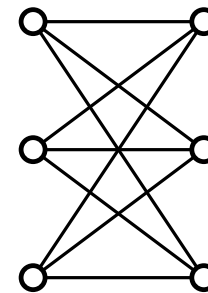
INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



**Satz von Kuratowski (1930):**  
Jeder nicht planare Graph enthält  
 $K_5$  oder  $K_{3,3}$  als Minor.



$K_5$

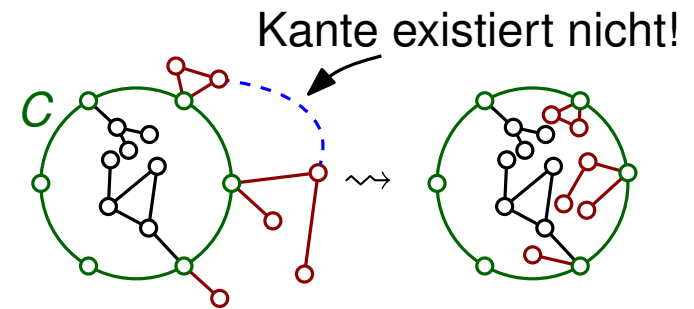


$K_{3,3}$

## Bäume und Wälder besitzen nur eine Facette

### Kreise als Facetten:

- $G$  planarer Graph,  $C$  einfacher Kreis in  $G$
  - kein paar von Knoten in  $C$  ist in  $G - E(C)$  verbunden
- $\Rightarrow G$  besitzt planare Einbettung, bei der  $C$  eine Facette begrenzt



$\theta$ -Graph: beliebige Unterteilung des Graphen 

### Facettenränder enthalten keinen $\theta$ -Graphen:

- $G$  ein planarer Graph mit fester Einbettung,  $f$  Facette von  $G$ ,
  - $F$  Teilgraph von  $G$  aus allen zu  $f$  inzidenten Knoten und Kanten
- $\Rightarrow F$  enthält keinen  $\theta$ -Graphen

Graph  $G$  ist **minor-minimal nicht-planar** wenn

- $G$  nicht planar ist, aber
- jeder Minor von  $G$  planar ist.

**Es gelten folgende Eigenschaften:** (warum?)

$G$  nicht planar  $\Rightarrow G$  enthält minor-minimalen nicht-planaren Graphen als Minor

Minor-minimale nicht-planare Graphen haben Minimalgrad 3

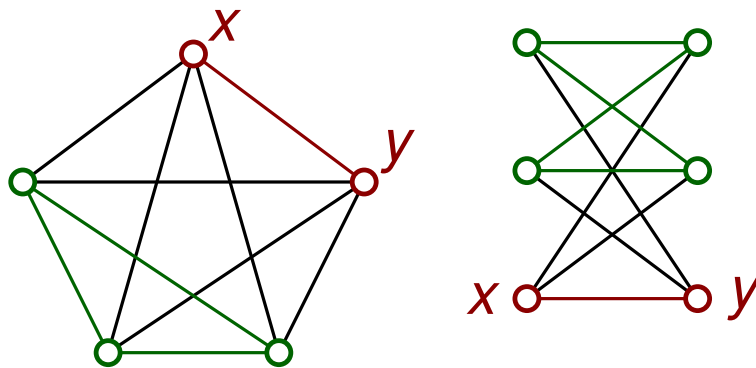
# Beweis-Strategie

$G$  nicht-planarer Graph,  $x, y$  zwei benachbarte Knoten von  $G$

Zeige:

1.  $G - x - y$  enthält keinen  $\theta$ -Graphen
2.  $G - x - y$  enthält höchstens einen Knoten mit Grad 1
3.  $G - x - y$  ist ein Kreis

Beachte:  $K_5$  bzw.  $K_{3,3}$  ist Kreis + zwei benachbarte Knoten



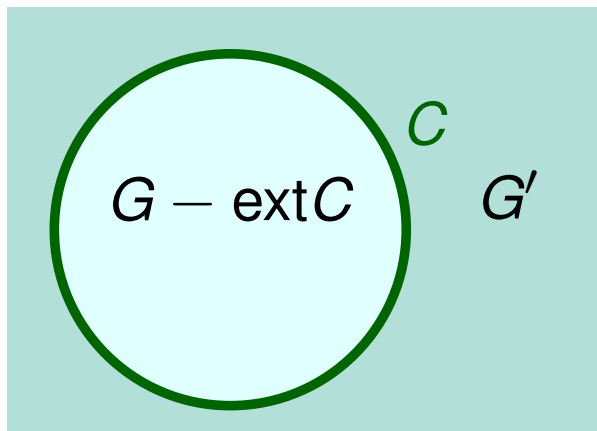
# Schritt 1: $G - x - y$ enthält keinen $\theta$ -Graph

Betrachte (planaren!) Graph  $G' := (G/xy) - (xy)$

$f$  Facette von  $G'$  in der  $(xy)$  lag

- $F \subseteq G'$  sei Graph aus zu  $f$  inzidenten Knoten/Kanten.
- $F$  enthält Kreis  $C$ , aber keinen  $\theta$ -Graph

Strategie: Bette  $G$  wie folgt planar ein.



dafür nötig:

- $G - \text{ext}C$  planar und
- besitzt Einbettung bei der  $C$  Facette begrenzt.

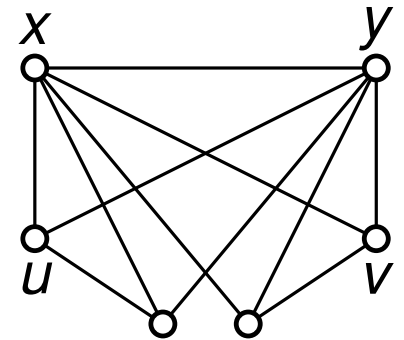
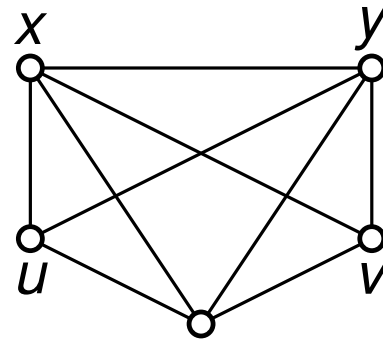
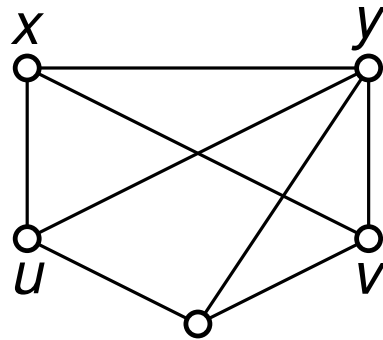
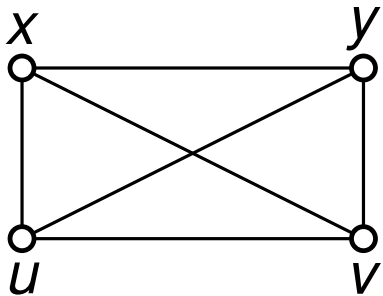
# Schritt 2: $G - x - y$ hat max. einen Grad-1-Knoten

Annahme:  $u, v$  zwei Grad-1-Knoten

- Alle Knoten haben in  $G$  Grad 3
- Schritt 1  $\Rightarrow$  Jede Kante hat  $x, y, u$  oder  $v$  als Endpunkt

Mögliche Fälle für  $G$ :

- $u, v$  sind (nicht) benachbart
- $u, v$  besitzen (keinen) gemeinsamen Nachbarn



In allen Fällen ist  $G$  planar. **Widerspruch!**

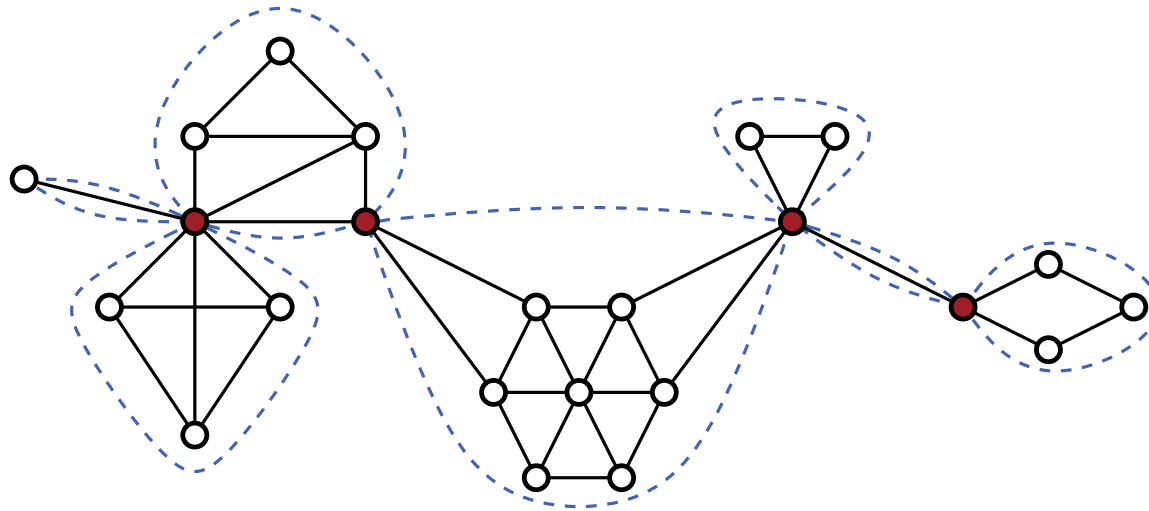
# Zwischenschritt: Blockzerlegung

$G$  beliebiger Graph

Äquivalenz-Relation auf Kanten:

$e_1 \sim e_2 \iff e_1 = e_2$  oder es gibt einfachen Kreis, der  $e_1$  und  $e_2$  enthält.

- Subgraph von  $G$  bestehend aus Äquivalenzklassen mit allen zugehörigen Knoten heißt **Block**.
- Jede Kante ist in genau einem Block.
- In mehreren Blöcken enthaltener Knoten ist **Separatorknoten**.



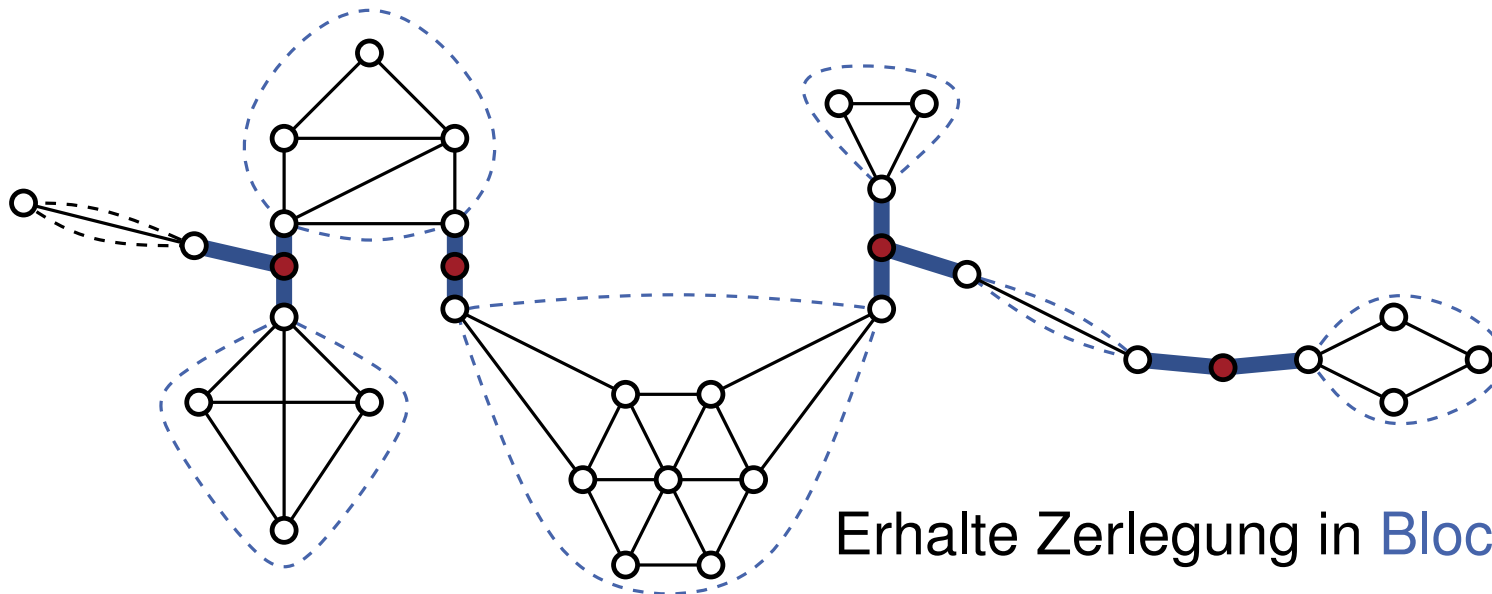
# Zwischenschritt: Blockzerlegung

$G$  beliebiger Graph

Äquivalenz-Relation auf Kanten:

$e_1 \sim e_2 \iff e_1 = e_2$  oder es gibt einfachen Kreis, der  $e_1$  und  $e_2$  enthält.

- Subgraph von  $G$  bestehend aus Äquivalenzklassen mit allen zugehörigen Knoten heißt **Block**.
- Jede Kante ist in genau einem Block.
- In mehreren Blöcken enthaltener Knoten ist **Separatorknoten**.



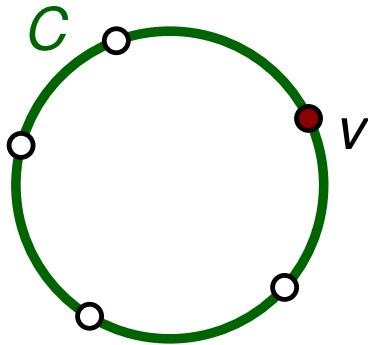
Erhalte Zerlegung in **Block–Cutvertex-Baum**



# Schritt 3: $G - x - y$ ist Kreis

Jeder Block von  $G' := G - x - y$  ist Kreis oder Kante

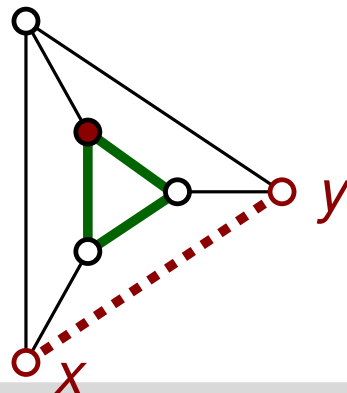
- Ein Block  $\Rightarrow$  fertig!
- Mehrere Blöcke  $\Rightarrow$  betrachte Blätter im BCT
- Einer der Blöcke ist ein Kreis  $C$  mit Separatorknoten  $v$



Zeige:

- Alle restlichen Kanten inzident zu  $v$  (Schritt 1)
- Höchstens eine Kante inzident zu  $v$  (Schritt 2)

Gibt es eine solche Kante, so ist  $G$  ein 3-Prisma:



## Satz von Kuratowski:

Jeder nicht planare Graph enthält  $K_5$  oder  $K_{3,3}$  als Minor.

- $H$  nicht planar  $\Rightarrow H$  enthält minor-minimalen nicht-planaren Graphen  $G$
- $x, y$  zwei benachbarte Knoten von  $G \Rightarrow G - x - y$  ist Kreis  $C$  (Schritt 3)
- Jeder Knoten auf  $C$  ist zu einem der Knoten  $x, y$  benachbart.
- $u, v$  benachbarte Knoten auf  $C \Rightarrow u, v$  beide zu  $x, y$  benachbart oder kein gemeinsamer Nachbar in  $\{x, y\}$
- Knoten auf  $C$  sind entweder alle zu beiden Knoten  $x, y$  verbunden, oder abwechselnd zu  $x, y$  verbunden

Im ersteren Fall ergibt sich  $K_5$ , im Letzteren  $K_{3,3}$ .