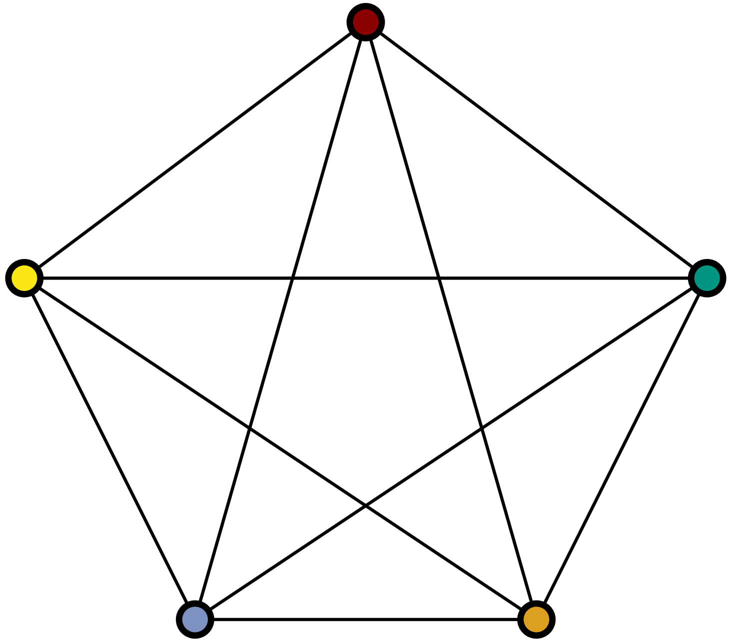
Graphen-Färben
Vorlesung am 03.05/10.05

INSTITUT FÜR THEORETISCHE INFORMATIK · PROF. DR. DOROTHEA WAGNER



Gesehen:

- Planare Graphen sind 5-färbbar.

Jetzt:

- Planare Graphen sind 5-listen-färbbar.

Instanz von Listenfärbung:

- Graph $G = (V, E)$
- Liste S_v von Farben für jedes $v \in V$

Lässt sich jedem Knoten v eine Farbe aus S_v zuordnen, sodass G korrekt gefärbt ist?

Ein Graph ist *k-listen-färbbar*, wenn das obige Probleme für jede Familie $(S_v)_{v \in V}$ mit $|S_v| = k$ für all $v \in V$ lösbar ist.

Satz

Jeder planare Graph ist 5-listen-färbbar.

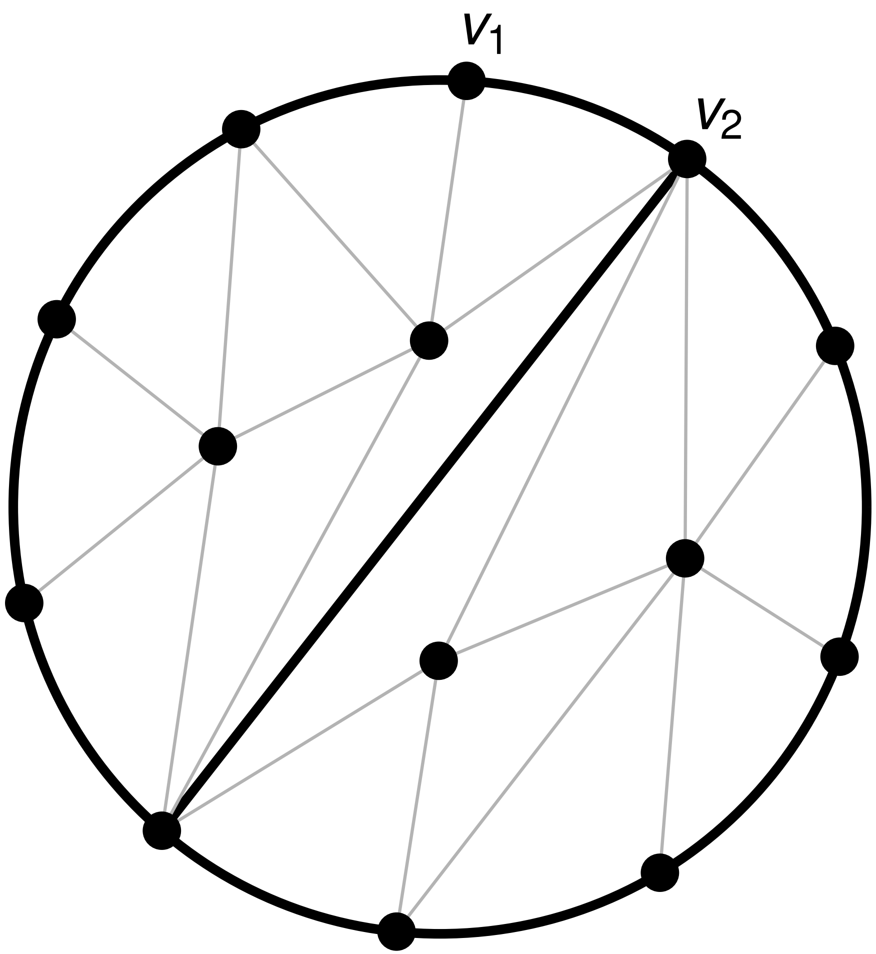
Beweis: Beweise Induktionsinvariante für alle Graphen mit mindestens drei Knoten.

- G planarer Graph
- innere Facetten Dreiecke
- Äußere Facette durch Kreis $C = v_1 \cdots v_k v_1$ begrenzt
- v_1 mit Farbe 1 gefärbt
- v_2 mit Farbe 2 gefärbt
- Jeder Knoten auf C ist mit Liste assoziiert, die mindestens drei Farben enthält.
- Knoten aus $G - C$ haben mindestens fünf mögliche Farben.

Dann lässt sich die Färbung von v_1 und v_2 zu einer Färbung von G aus den gegebenen Listen erweitern.

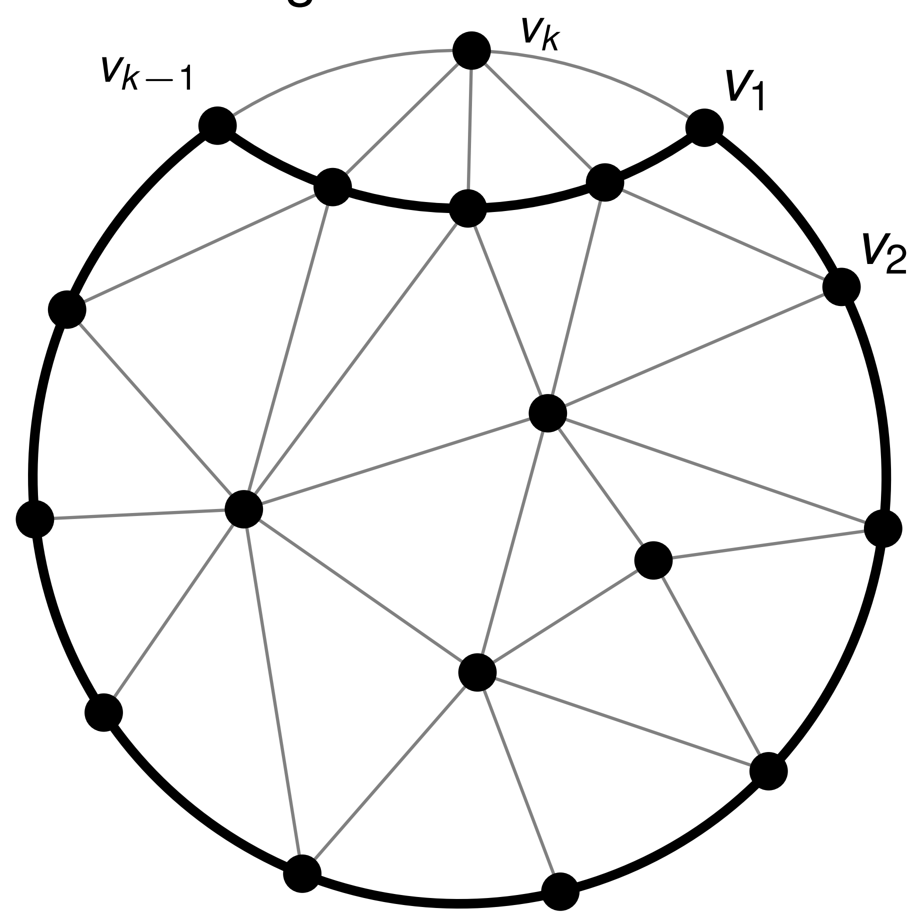
Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

Es gibt eine Sehne:



- Färbe erst den Teil der $v_1 v_2$ enthält.
- Färbe dann den anderen Teil, gib dabei Farben der Sehnenknoten vor.

Es gibt keine Sehne:



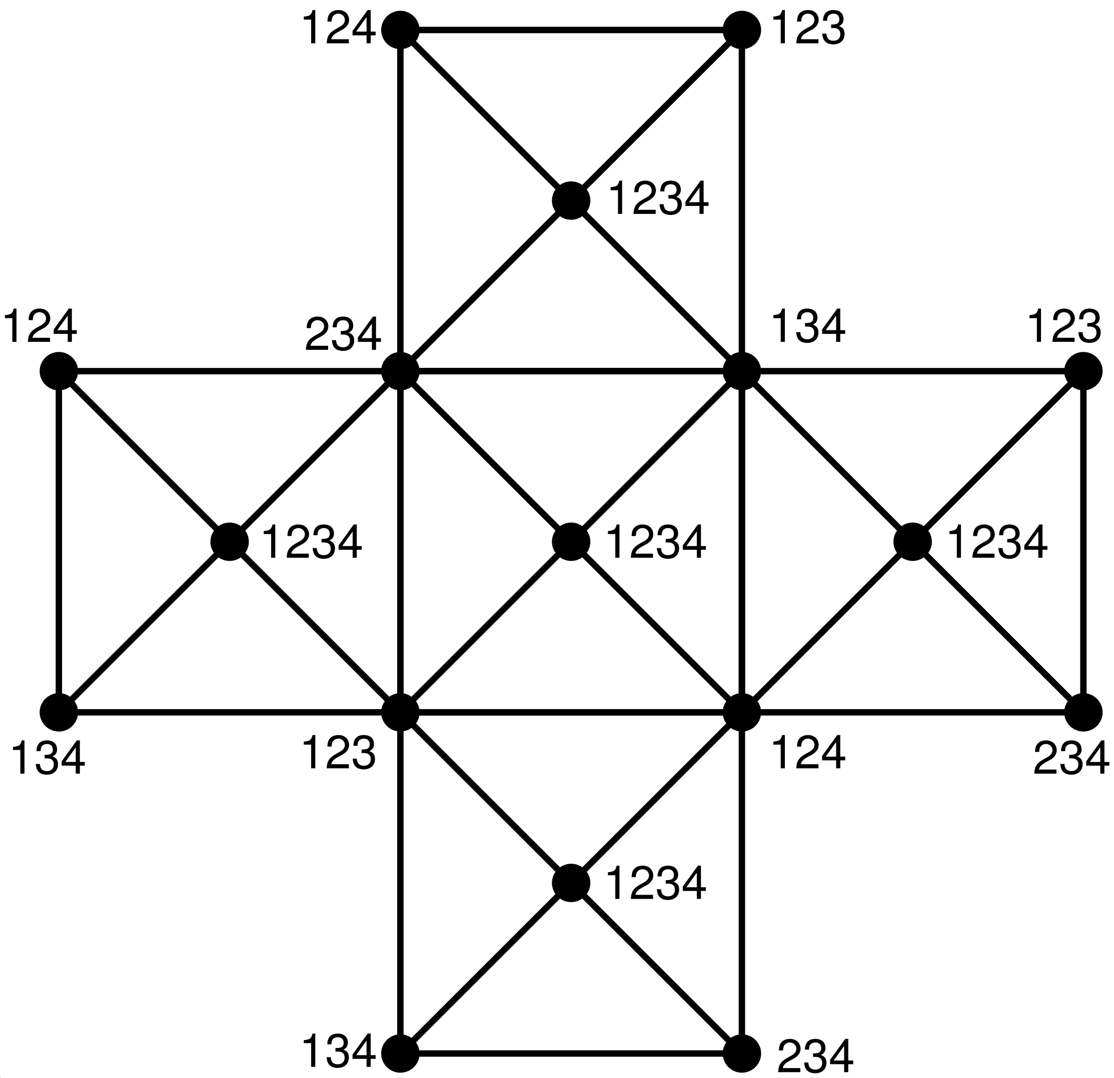
- Reserviere zwei Farben von v_k aus den Listen seiner Inneren Nachbarn.
- Färbe Rest induktiv, v_{k-1} kann nicht beide reservierten Farben verbrauchen.

$\square$

Institut für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Dorothea Wagner

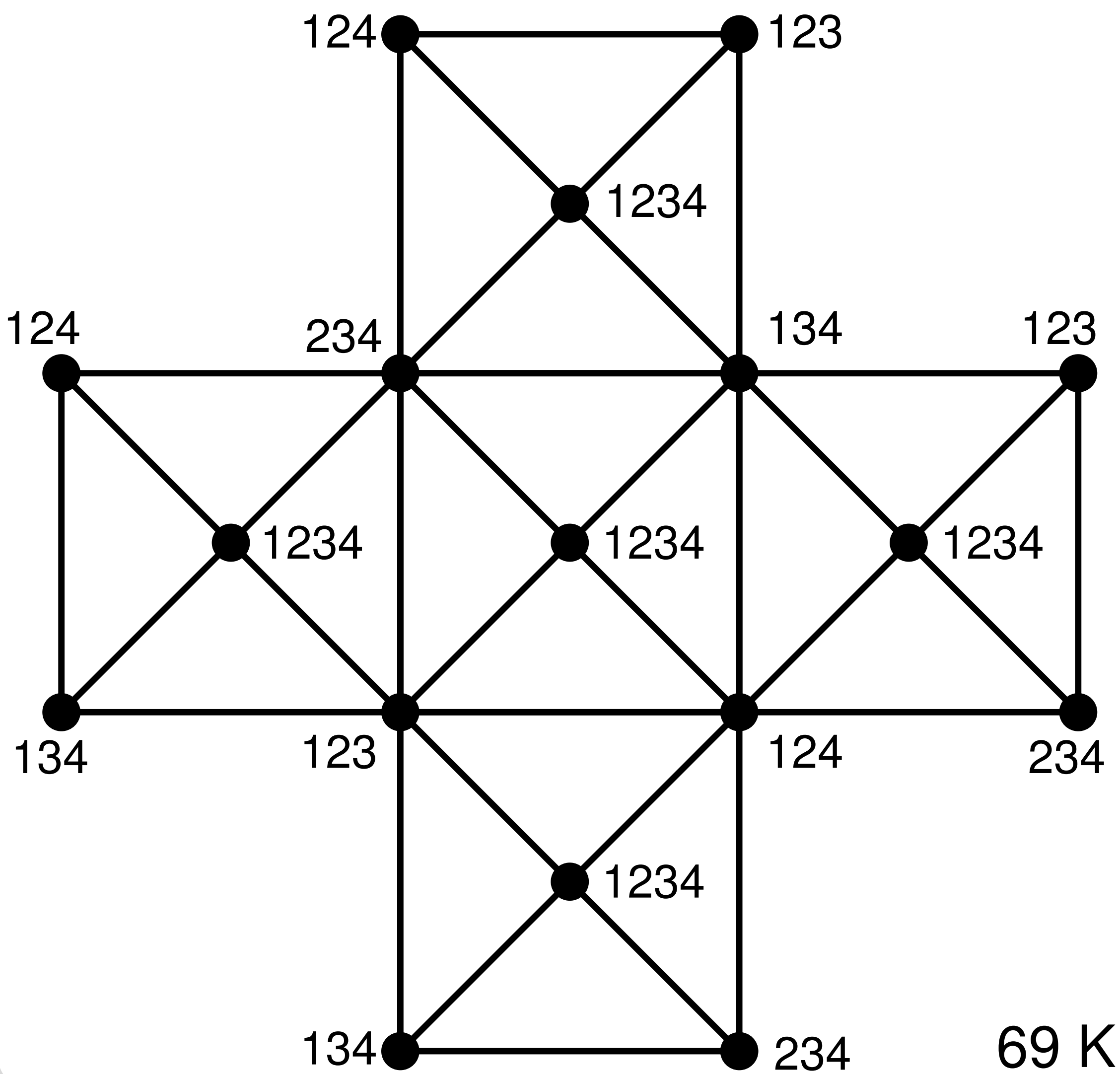
Satz

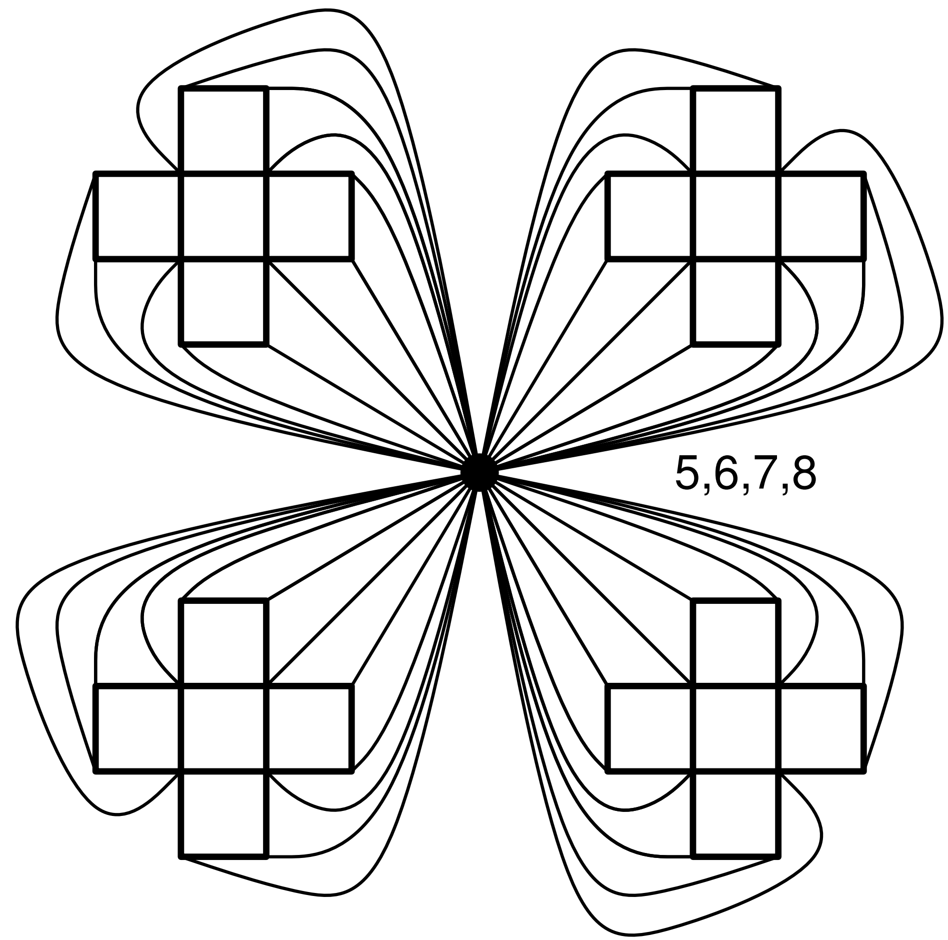
Es gibt planare Graphen, die nicht 4-listen-färbbar sind.



Satz

Es gibt planare Graphen, die nicht 4-listen-färbbar sind.





69 Knoten, lässt sich verbessern zu 63