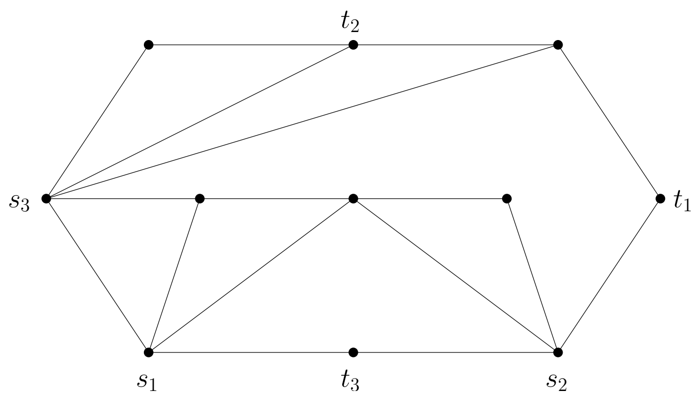
Siebtes (und letztes) Übungsblatt

Ausgabe: 23. Juni 2015
Besprechung: 01. Juli 2015

1 Kantendisjunkte Wegpackung



Betrachten Sie obenstehenden Graphen mit der angegebenen Menge an Terminalpaaren, und überprüfen Sie die *Geradheitsbedingung*. Ist das induzierte *kantendisjunkte* Wegpackungsproblem lösbar?

2 Knotendisjunkte Wegpackung

Definition (knotendisjunktes Wegpackungsproblem): Gegeben ein zusammenhängender, planarer Graph G mit fester Einbettung und paarweise verschiedenen Terminalen $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_k, t_k$ an der äußeren Facette. Gesucht sind paarweise knotendisjunkte s_i-t_i-Wege in G $(1 \leq i \leq k)$.
Das Problem heißt *topologisch lösbar*, falls die Reihenfolge der Terminale „um die äußere Facette herum" die Lösbarkeit nicht ausschließt.

(a) Geben Sie für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ einen zusammenhängenden, planaren Graphen G mit k Terminalpaaren (s_i, t_i) an der äußeren Facette an, sodass das knotendisjunkte Wegpackungsproblem

- nicht topologisch lösbar ist
- zwar topologisch lösbar ist, aber dennoch keine paarweise knotendisjunkten s_i-t_i-Wege in G existieren.

Bitte wenden

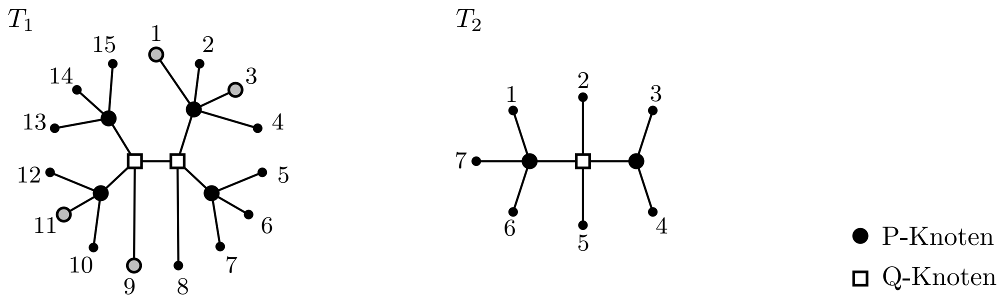
(b) Sei o die Anzahl der Knoten von G, die zur äußeren Facette der Einbettung inzident sind (es gilt also $o \geq 2k$). Geben Sie einen Algorithmus an, der in Zeit $\mathcal{O}(o)$ feststellt, ob das knotendisjunkte Wegpackungsproblem topologisch lösbar ist.

(c) Angenommen, das Problem sei topologisch lösbar. Geben Sie einen Linearzeitalgorithmus an, der entweder k knotendisjunkte s_i-t_i-Wege findet oder feststellt, dass das Problem nicht lösbar ist.

(d) Zeigen Sie: Für einen planaren Graphen G mit Terminalpaaren an der äußeren Facette ist das knotendisjunkte Wegpackungsproblem genau dann *nicht lösbar*, wenn es nicht topologisch lösbar ist oder eine einfache geschlossene Kurve K in der Ebene existiert, die G nur in Knoten berührt, sodass die Anzahl der Terminalpaare mit genau einem Terminal innerhalb K größer als die Anzahl der ‚Berührknoten' ist.

3 PQ-Bäume

Gegeben seien unten stehende PQ-Bäume T_1 und T_2.



(a) Reduzieren Sie den PQ-Baum T_1 mit der Blattmenge $\{1, 3, 9, 11\}$. Wenden Sie dazu den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus an.

(b) Sei P der PQ-Baum bestehend aus einem einzelnen P-Knoten mit den Blättern $\{1, \ldots, 7\}$. Geben Sie eine Folge von Reduktionen an, die aus P den PQ-Baum T_2 machen.

(c) Seien A und B zwei beliebige PQ-Bäume auf der gleichen Blattmenge M. Zeigen Sie: Es gibt einen PQ-Baum mit Blattmenge M, der genau die (zyklischen) Ordnungen repräsentiert, die sowohl von A als auch von B repräsentiert werden.