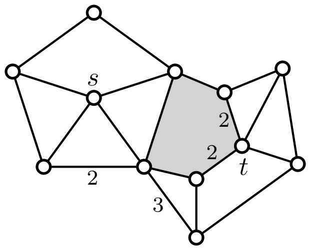
Fünftes Übungsblatt

Ausgabe: 02. Juni 2015
Besprechung: 10. Juni 2015

1 Flüsse

Gegeben sei folgendes Flussnetzwerk $G = (V, E)$ mit Quelle s und Senke t. Jede ungerichtete Kante repräsentiert die beiden zugehörigen gerichteten Kanten. Die Kapazitäten $c\colon E \to \mathbb{N}$ stehen an den Kanten. Steht an einer Kante e kein Wert, so gilt $c(e) = 1$.



Wählen Sie einen gerichteten Pfad P von s nach t und betrachten Sie im Folgenden den dazugehörigen Fluss $\lambda\pi$ für $\lambda = 5$ bzw. $\lambda = 4$.

a) Zeigen Sie, dass es keinen gültigen st-Fluss mit Wert 5 gibt. Zeigen Sie dazu, dass $G^\star_\lambda$ für $\lambda = 5$ einen negativen Kreis enthält.

b) Betrachten Sie $\lambda = 4$. Berechnen Sie für jeden Knoten in $G^\star_4$ den Abstand zum Ursprung (wählen sie die grau markierte Facette als Ursprung). Benutzen Sie die Konstruktion aus der Vorlesung, um daraus einen Fluss mit Wert 4 zu erhalten.

2 Mixed-Max-Cut

Im Folgenden sei der Algorithmus aus Lemma 6.6 noch einmal präzisiert: In einem 3-regulären planaren Graphen G, der keinen positiven Kreis enthält, kann ein negativer einfacher Kreis maximalen Gewichts in $\mathcal{O}(n^{3/2} \log n)$ bestimmt werden.

Schritt 1: Berechne eine Partition S, V_1, V_2 in G, die die Bedingungen des Planar-Separator-Theorems erfüllt.

Schritt 2: Berechne rekursiv negative einfache Kreise maximalen Gewichts in den durch V_1 und V_2 induzierten Subgraphen von G. Hierzu muss zunächst durch iteratives Entfernen von Grad-1-Knoten und Kompression von Grad-2-Knoten 3-Regularität hergestellt werden.

Schritt 3: Für jedes $v_i \in S$ berechne den negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts *in G, der v_i enthält, wie folgt:*
Konstruiere zu G den Graphen G' gemäß Schritt 3 des Mixed-Max-Cut-Algorithmus. Für jeden Knoten $v_i \in S$ erweitere G' zu G'_{v_i}, indem v_i durch den durch $\{u', u'', v', v'', w', w''\}$ induzierten Subgraphen (vgl. Abb. 6.4, rechts) ersetzt wird (jeder dieser Graphen enthält also die Knoten w' und w'' genau einmal), und bestimme in $\mathcal{O}(n \log n)$ ein perfektes Matching minimalen Gewichts von G'_{v_i}; berechne den dazu korrespondierenden negativen einfachen Kreis maximalen Gewichts in G.

Schritt 4: Gib den Kreis maximalen Gewichts unter allen konstruierten Kreisen aus. Dieser ist der gewünschte Kreis in G, da jeder einfache Kreis in G entweder ganz in G_1 oder ganz in G_2 liegt *oder (mindestens) ein $v_i \in S$ enthält.*

Aufgabe: Wenden Sie diesen Algorithmus schrittweise auf den nachfolgenden Graphen an.

Hinweise: Wählen Sie dabei für die Separatormenge S in Schritt 2 die durch fettere Quadrate bezeichneten Knoten. Subroutinen wie das Finden eines Matchings brauchen nicht detailliert nachvollzogen, sondern können ‚einfach angegeben' werden.