

Separatoren in planaren Graphen

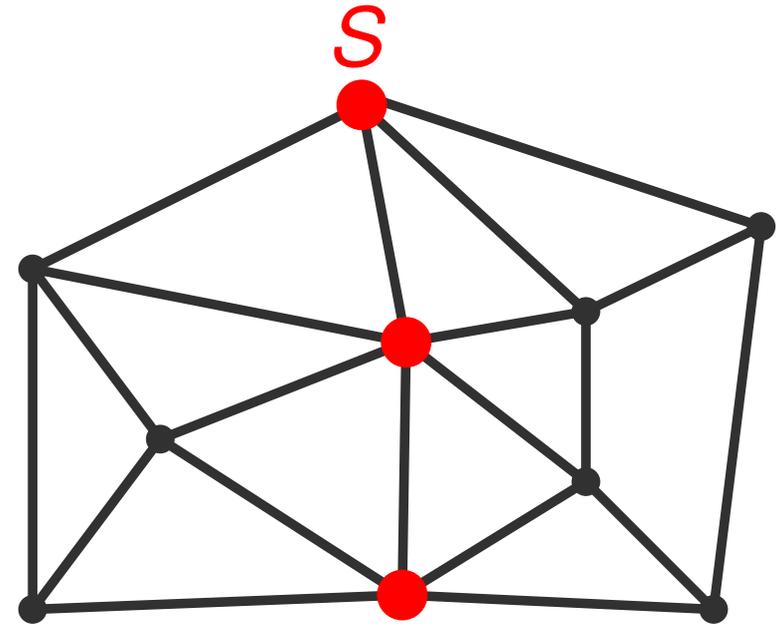
Tamara Mchedlidze

SOMMERSEMESTER 2015

Dorothea Wagner - Thomas Bläsius

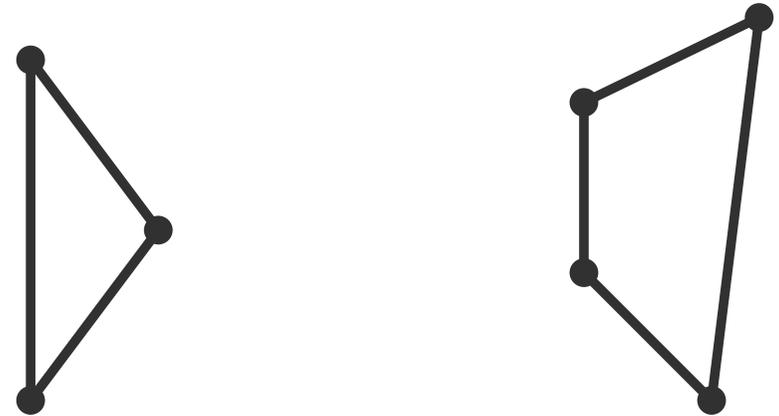
Einführung

Separator $S \subset V$ von $G = (V, E)$



Einführung

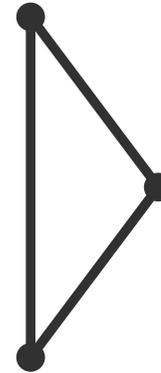
Separator $S \subset V$ von $G = (V, E)$



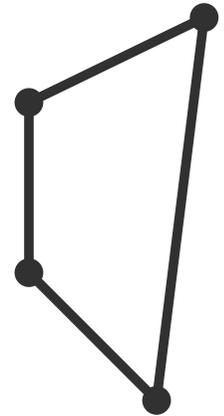
Einführung

Separator $S \subset V$ von $G = (V, E)$

V_1



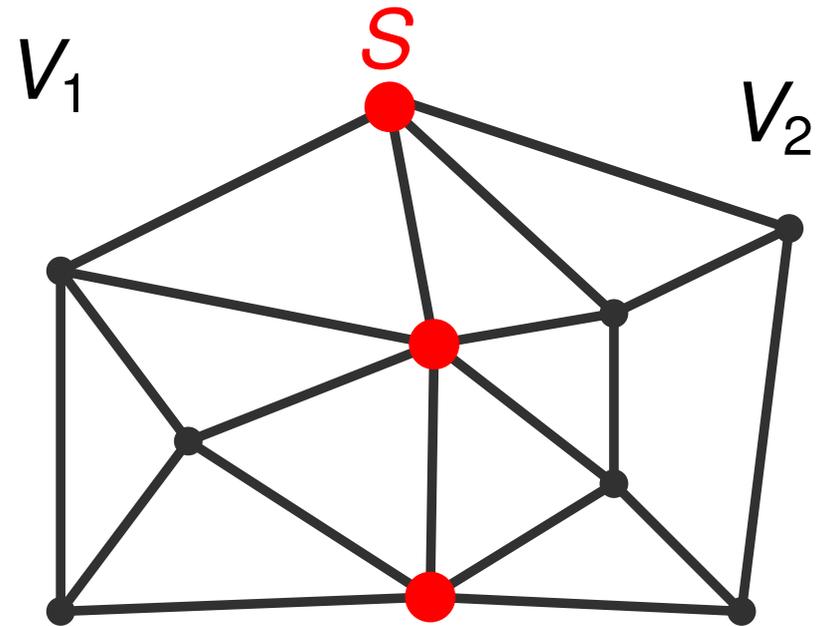
V_2



Einführung

Separator $S \subset V$ von $G = (V, E)$

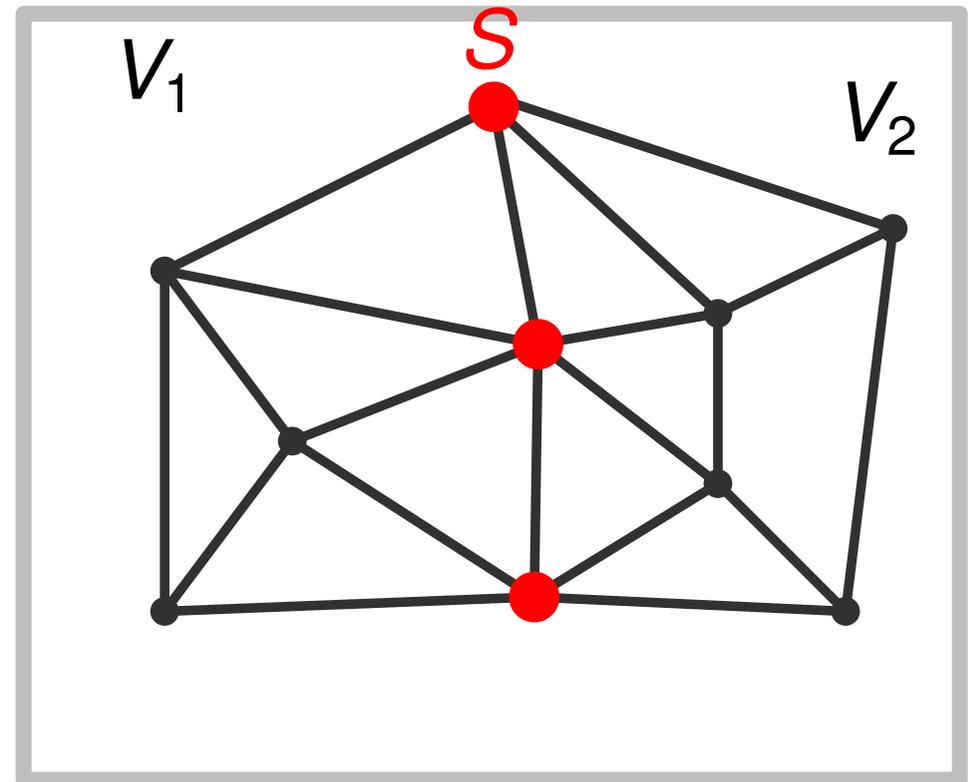
Warum Separatoren?



Separator $S \subset V$ von $G = (V, E)$

Warum Separatoren?

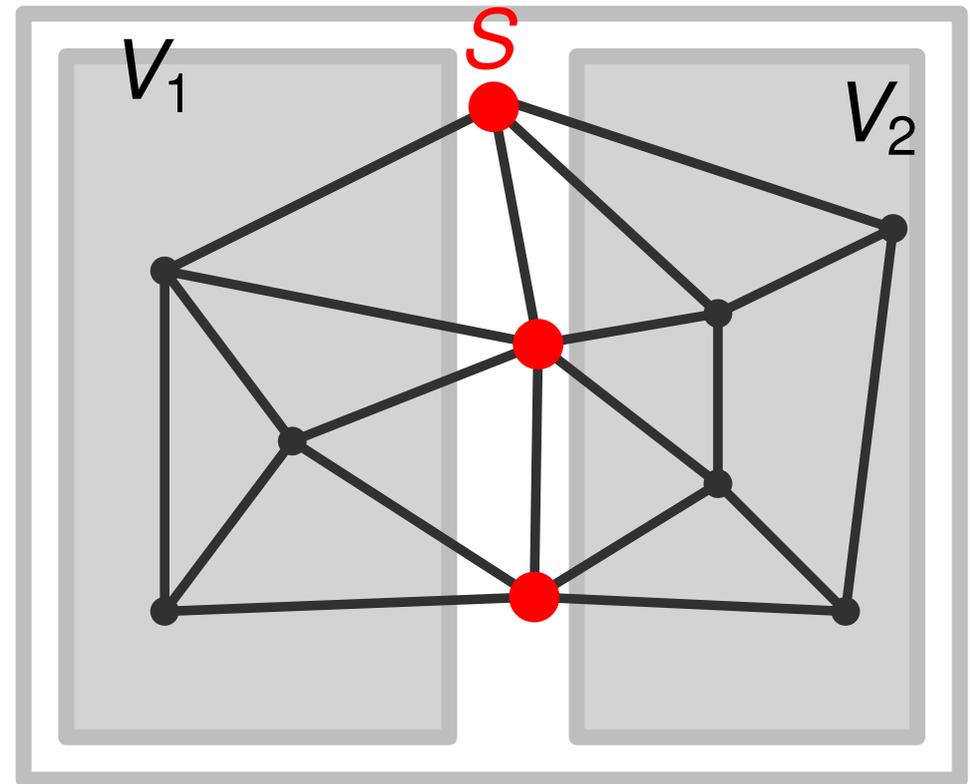
- **Divide-and-Conquer Algorithmen**
- Approximation in polynomieller Zeit für NP-schwere Probleme
- Datenkompressions-Algorithmen
- Graphlayout-Algorithmen . . .



Separator $S \subset V$ von $G = (V, E)$

Warum Separatoren?

- **Divide-and-Conquer Algorithmen**
- Approximation in polynomieller Zeit für NP-schwere Probleme
- Datenkompressions-Algorithmen
- Graphlayout-Algorithmen . . .



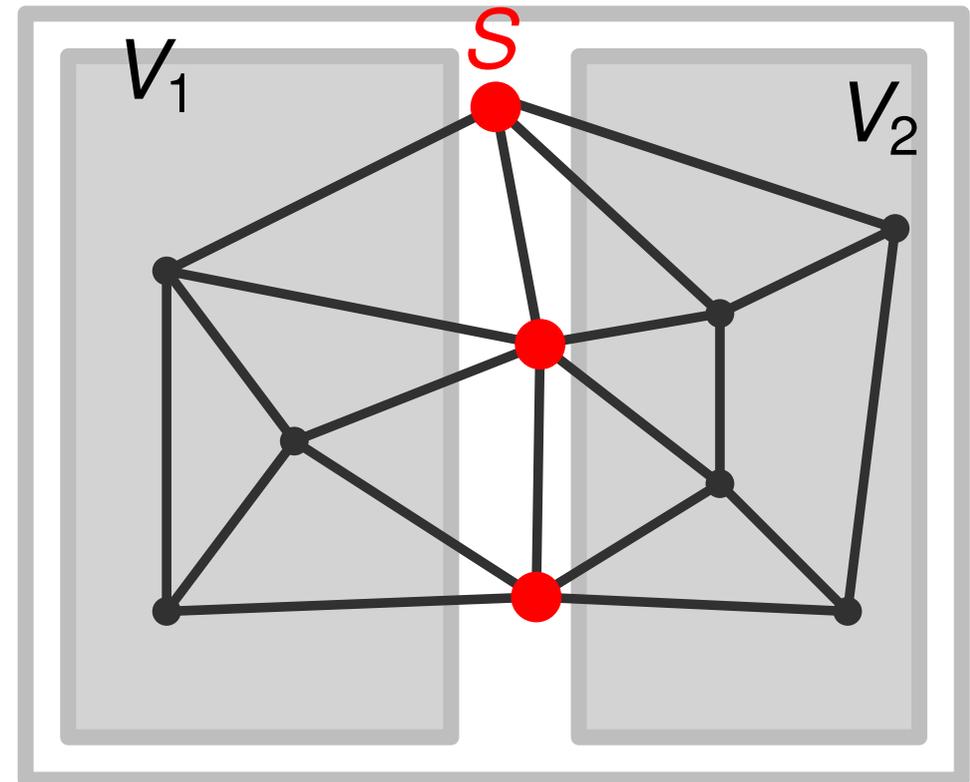
Separator $S \subset V$ von $G = (V, E)$

Warum Separatoren?

- **Divide-and-Conquer Algorithmen**
- Approximation in polynomieller Zeit für NP-schwere Probleme
- Datenkompressions-Algorithmen
- Graphlayout-Algorithmen . . .

Welcher Separator?

- "Klein"



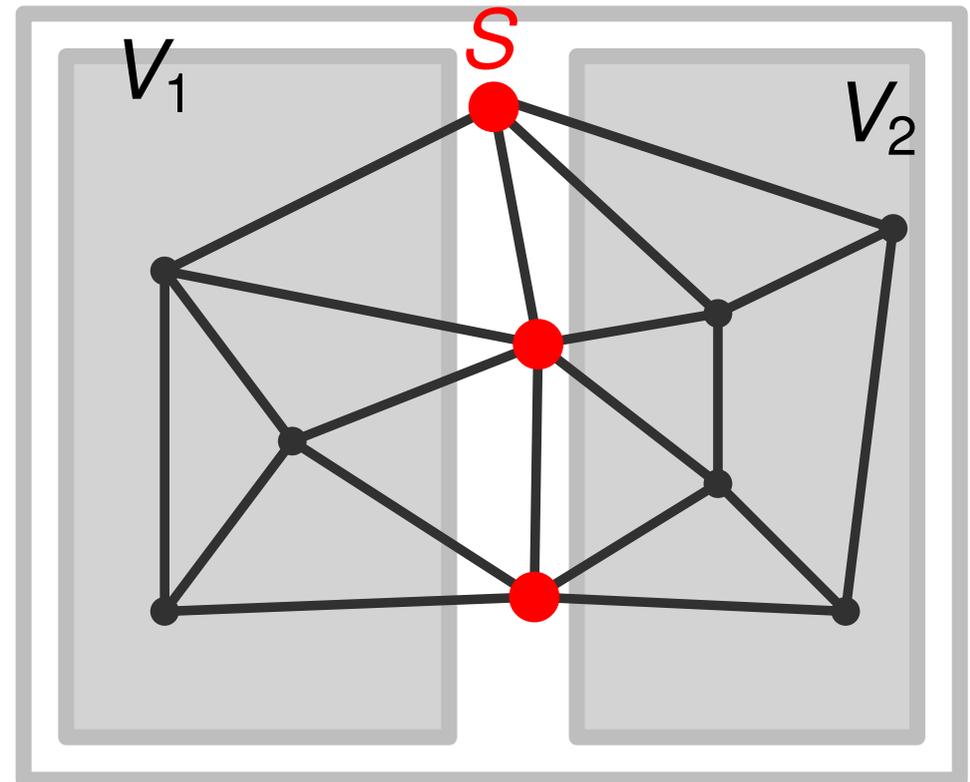
Separator $S \subset V$ von $G = (V, E)$

Warum Separatoren?

- **Divide-and-Conquer Algorithmen**
- Approximation in polynomieller Zeit für NP-schwere Probleme
- Datenkompressions-Algorithmen
- Graphlayout-Algorithmen . . .

Welcher Separator?

- "Klein"
- Etwa gleich große Teilgraphen



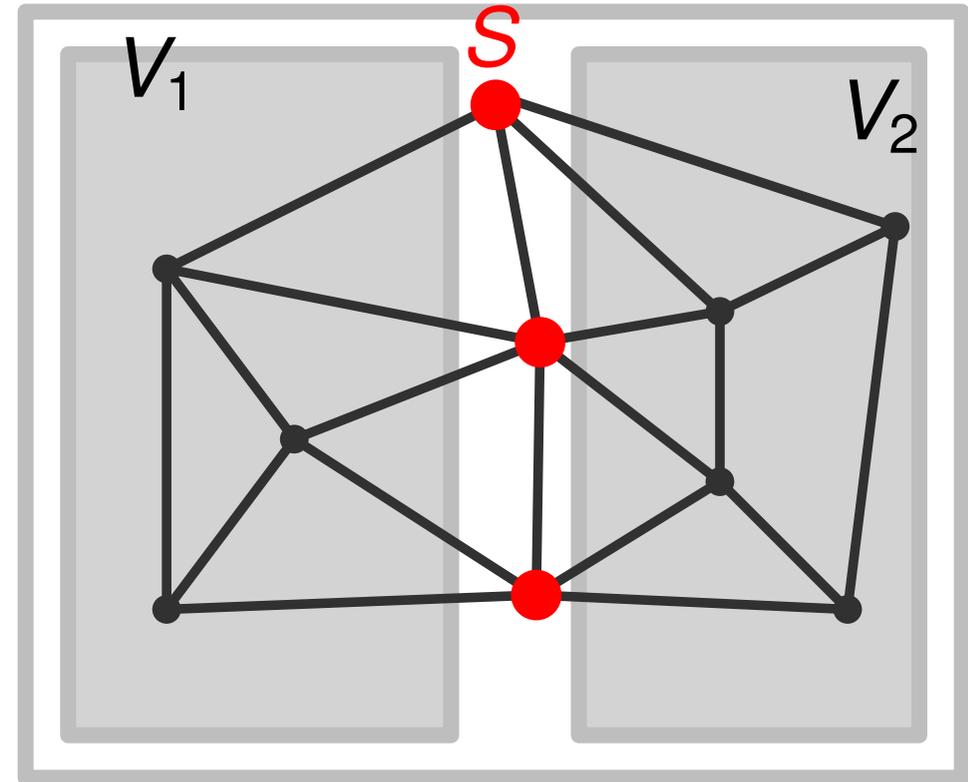
Separator $S \subset V$ von $G = (V, E)$

Warum Separatoren?

- **Divide-and-Conquer Algorithmen**
- Approximation in polynomieller Zeit für NP-schwere Probleme
- Datenkompressions-Algorithmen
- Graphlayout-Algorithmen . . .

Welcher Separator?

- "Klein"
- Etwa gleich große Teilgraphen



Minimum-Balanced-Separator-Problem

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Finde eine Partition von V in drei Mengen V_1 , V_2 und S , wobei der Separator S minimale Kardinalität hat und V_1 von V_2 trennt mit $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot |V|$ und $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ konstant.

Minimum-Balanced-Separator-Problem

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Finde eine Partition von V in drei Mengen V_1 , V_2 und S , wobei der Separator S minimale Kardinalität hat und V_1 von V_2 trennt mit $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot |V|$ und $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ konstant.

Minimum-Balanced-Separator-Problem

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Finde eine Partition von V in drei Mengen V_1 , V_2 und S , wobei der Separator S minimale Kardinalität hat und V_1 von V_2 trennt mit $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot |V|$ und $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ konstant.

- **Das Problem ist NP -schwer**

Minimum-Balanced-Separator-Problem

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Finde eine Partition von V in drei Mengen V_1 , V_2 und S , wobei der Separator S minimale Kardinalität hat und V_1 von V_2 trennt mit $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot |V|$ und $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ konstant.

- **Das Problem is NP -schwer**
- **Ist $\alpha = \frac{1}{2}$ - MINIMUM-BISECTION-PROBLEM
 \mathcal{NP} - schwer auch für planare Graphen**

Minimum-Balanced-Separator-Problem

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Finde eine Partition von V in drei Mengen V_1 , V_2 und S , wobei der Separator S minimale Kardinalität hat und V_1 von V_2 trennt mit $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot |V|$ und $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ konstant.

- **Das Problem ist NP -schwer**
- **Ist $\alpha = \frac{1}{2}$ - MINIMUM-BISECTION-PROBLEM
 \mathcal{NP} - schwer auch für planare Graphen**
- **In linearer Laufzeit ein Separator mit Garantie**

Minimum-Balanced-Separator-Problem

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$. Finde eine Partition von V in drei Mengen V_1 , V_2 und S , wobei der Separator S minimale Kardinalität hat und V_1 von V_2 trennt mit $|V_1|, |V_2| \leq \alpha \cdot |V|$ und $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ konstant.

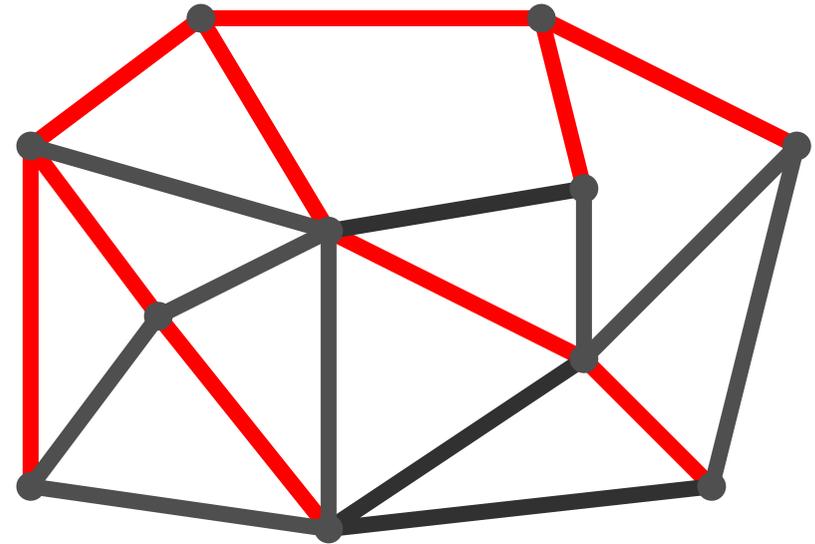
- **Das Problem is NP -schwer**
- **Ist $\alpha = \frac{1}{2}$ - MINIMUM-BISECTION-PROBLEM \mathcal{NP} - schwer auch für planare Graphen**
- **In linearer Laufzeit ein Separator mit Garantie**

Satz (Planar-Separator-Theorem) Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S ist ein Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

Lipton & Tarjan
1977

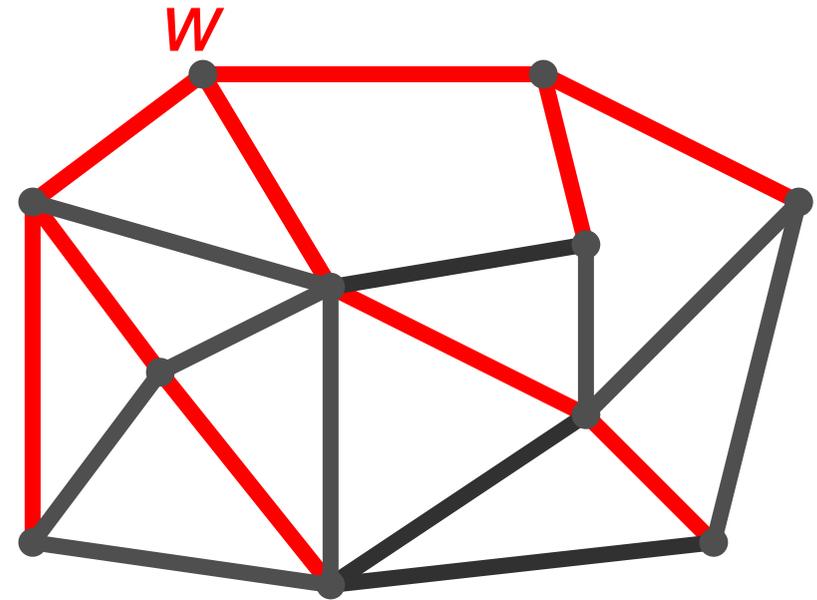
Aufspannender Baum T von G



Einführung

Aufspannender Baum T von G

Wurzel w von T

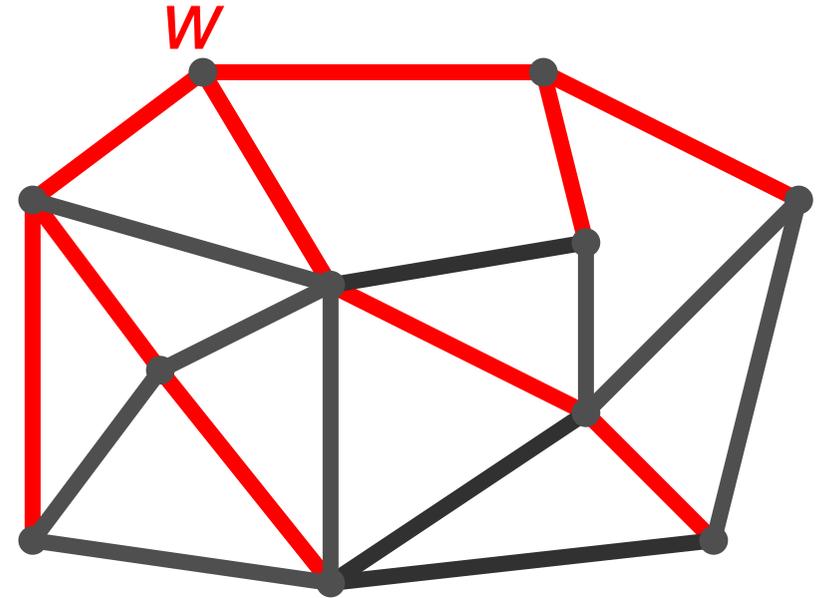


Einführung

Aufspannender Baum T von G

Wurzel w von T

Level oder Höhe eines
Knotens v , $\text{level}(v)$



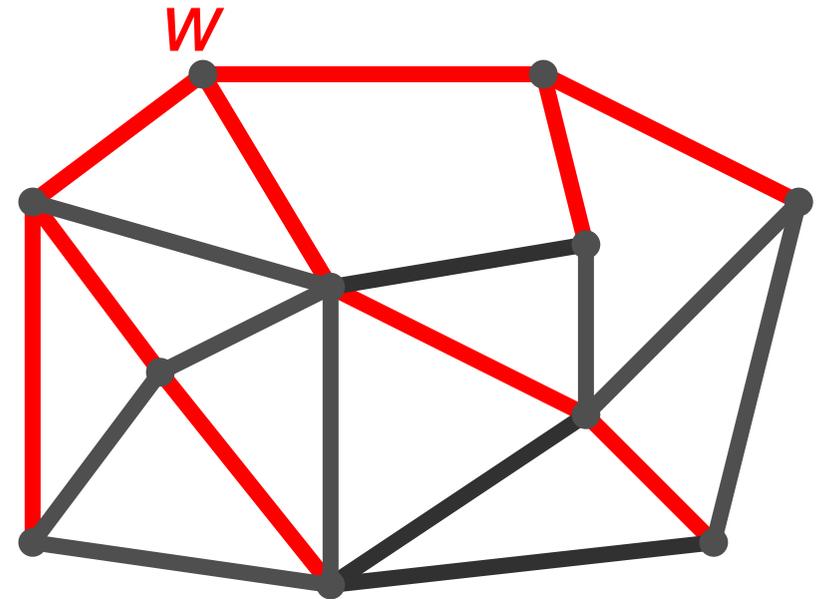
Einführung

Aufspannender Baum T von G

Wurzel w von T

Level oder Höhe eines
Knotens v , $\text{level}(v)$

Höhe des Baumes



Einführung

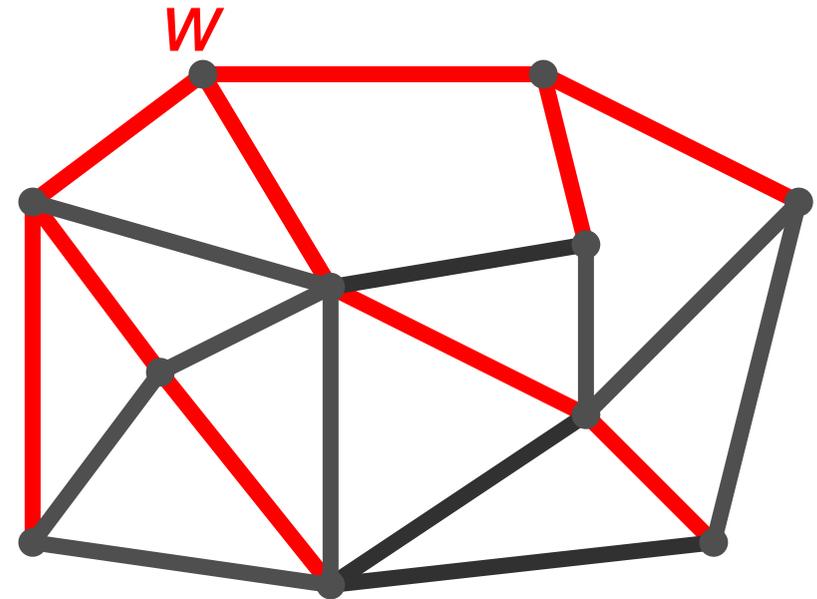
Aufspannender Baum T von G

Wurzel w von T

Level oder Höhe eines
Knotens v , $\text{level}(v)$

Höhe des Baumes

Triangulierung von planare Graph G :
alle Facetten sind Dreiecke



Einführung

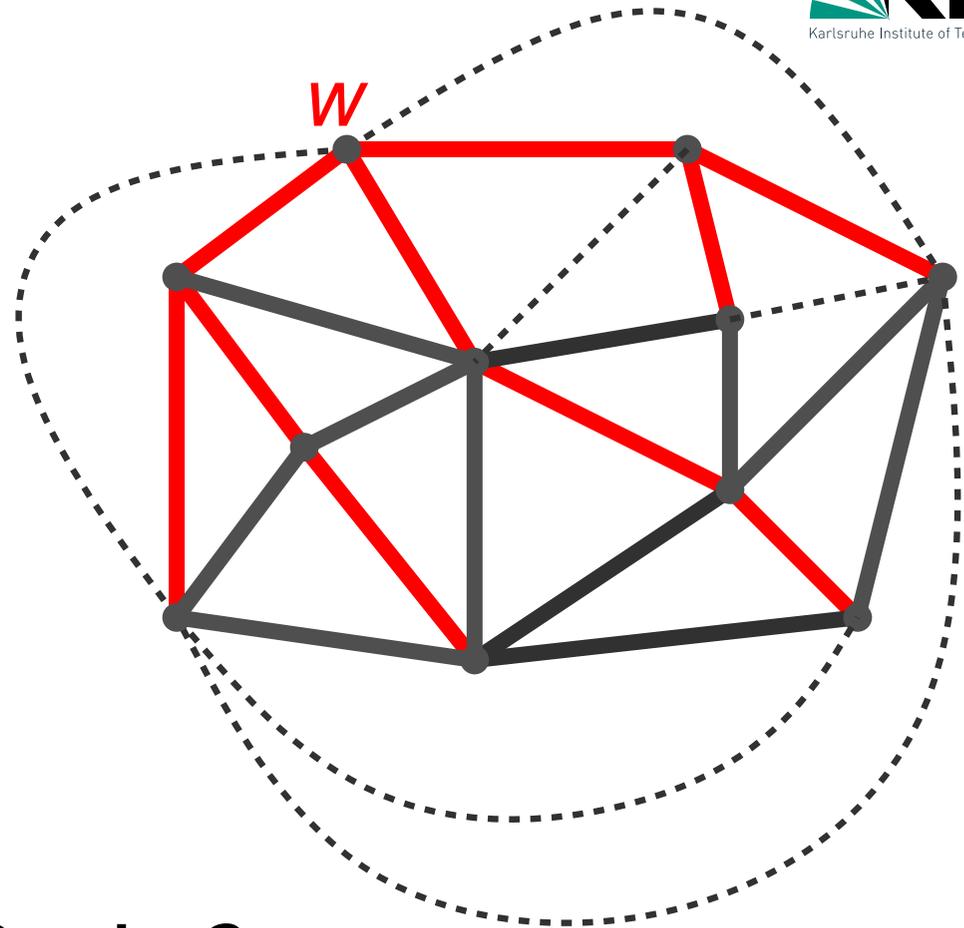
Aufspannender Baum T von G

Wurzel w von T

Level oder Höhe eines
Knotens v , $\text{level}(v)$

Höhe des Baumes

Triangulierung von planare Graph G :
alle Facetten sind Dreiecke



Einführung

Aufspannender Baum T von G

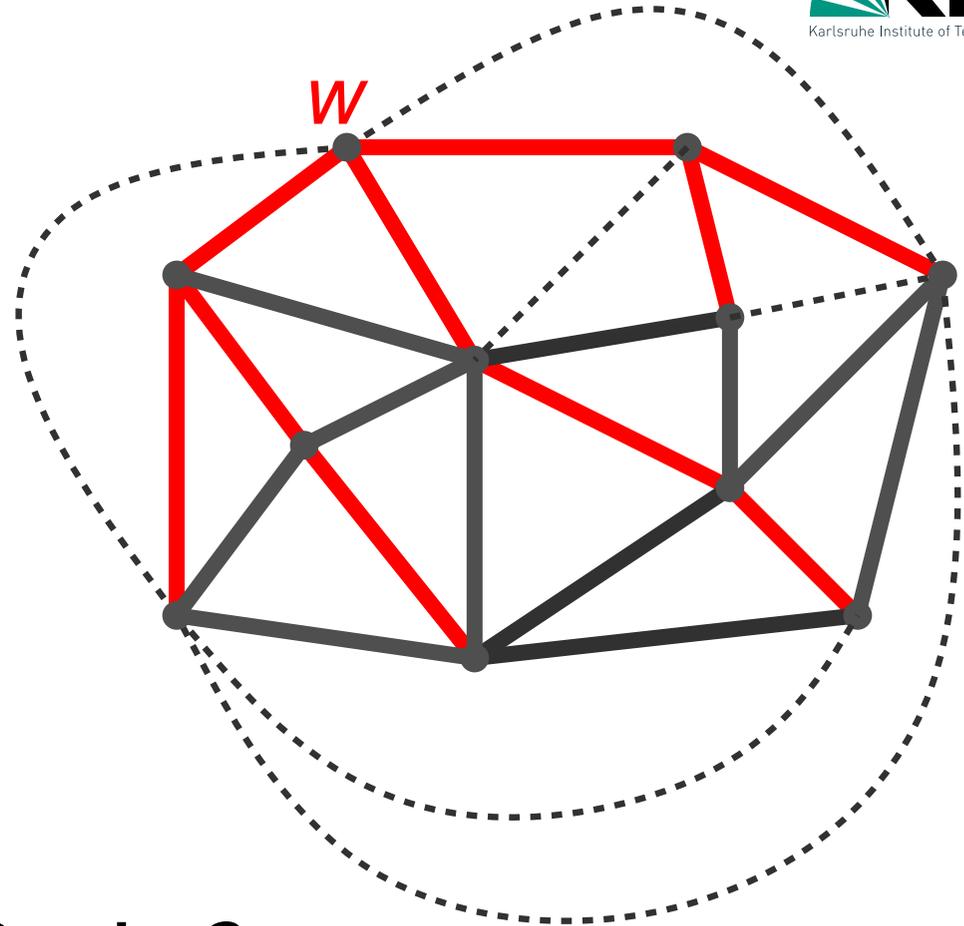
Wurzel w von T

Level oder Höhe eines
Knotens v , $\text{level}(v)$

Höhe des Baumes

Triangulierung von planare Graph G :
alle Facetten sind Dreiecke

Für eingebettete Graphen : $O(n)$ Zeit (Übung)



- **Wichtiges Lemma**
 - **Beweis**
 - **Implementierung mit linearer Laufzeit**
- **Beweis von PLANAR-SEPARATOR-THEOREM**
- **Separator-Algorithmus**

- **Wichtiges Lemma**
 - Beweis
 - Implementierung mit linearer Laufzeit
- Beweis von PLANAR-SEPARATOR-THEOREM
- Separator-Algorithmus

Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$

Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$

Beweis

Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$

Beweis

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G

Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$

Beweis

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G
- Der neue Graph hat $3n - 6$ Kanten und $2n - 4$ Facetten (Euler)

Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$

Beweis

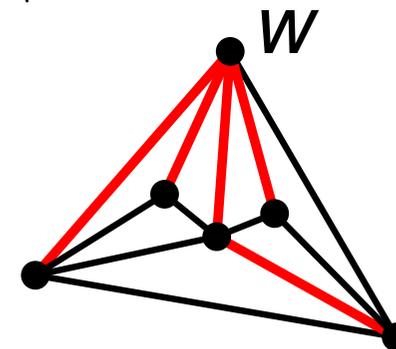
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G
- Der neue Graph hat $3n - 6$ Kanten und $2n - 4$ Facetten (Euler)
- Ein aufspannender Baum T von G ist aufspannender Baum des triangulierten Graphen

Beweis des wichtigen Lemmas

- **Baumkanten** - $E(T)$ und **Nichtbaumkanten** - $E \setminus E(T)$

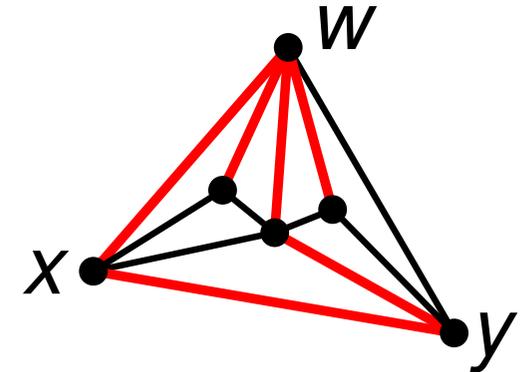
Beweis des wichtigen Lemmas

- **Baumkanten** - $E(T)$ und **Nichtbaumkanten** - $E \setminus E(T)$
- Jede Nichtbaumkante $\{x, y\}$ induziert einen Kreis $K_{x,y}$ mit $\leq 2 \cdot h + 1$ Knoten



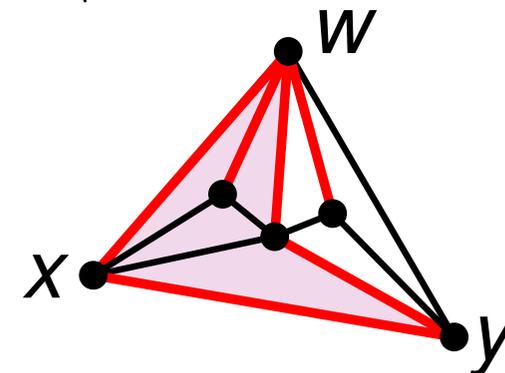
Beweis des wichtigen Lemmas

- **Baumkanten** - $E(T)$ und **Nichtbaumkanten** - $E \setminus E(T)$
- Jede Nichtbaumkante $\{x, y\}$ induziert einen Kreis $K_{x,y}$ mit $\leq 2 \cdot h + 1$ Knoten



Beweis des wichtigen Lemmas

- **Baumkanten** - $E(T)$ und **Nichtbaumkanten** - $E \setminus E(T)$
- Jede Nichtbaumkante $\{x, y\}$ induziert einen Kreis $K_{x,y}$ mit $\leq 2 \cdot h + 1$ Knoten

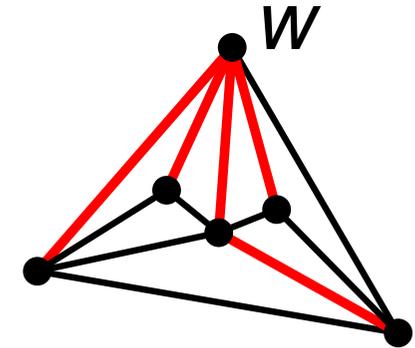


Beweis des wichtigen Lemmas

- **Baumkanten** - $E(T)$ und **Nichtbaumkanten** - $E \setminus E(T)$

- Jede Nichtbaumkante $\{x, y\}$ induziert einen Kreis $K_{x,y}$ mit $\leq 2 \cdot h + 1$ Knoten

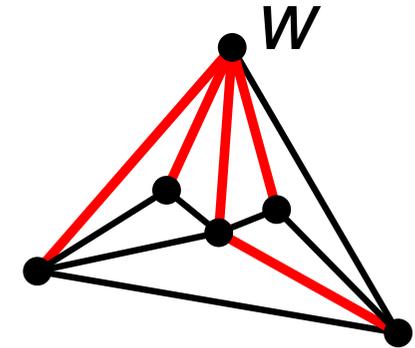
- Notation: Inneres($K_{x,y}$), Äußeres($K_{x,y}$) und $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$, $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$



Beweis des wichtigen Lemmas

- **Baumkanten** - $E(T)$ und **Nichtbaumkanten** - $E \setminus E(T)$

- Jede Nichtbaumkante $\{x, y\}$ induziert einen Kreis $K_{x,y}$ mit $\leq 2 \cdot h + 1$ Knoten



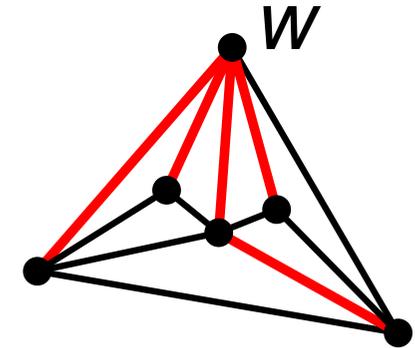
- Notation: Inneres($K_{x,y}$), Äußeres($K_{x,y}$) und $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$, $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$

- Wir wählen eine Nichtbaumkante $\{x, y\}$ aus, wobei $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \geq |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$

Beweis des wichtigen Lemmas

- **Baumkanten** - $E(T)$ und **Nichtbaumkanten** - $E \setminus E(T)$

- Jede Nichtbaumkante $\{x, y\}$ induziert einen Kreis $K_{x,y}$ mit $\leq 2 \cdot h + 1$ Knoten



- Notation: Inneres($K_{x,y}$), Äußeres($K_{x,y}$) und $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$, $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$

- Wir wählen eine Nichtbaumkante $\{x, y\}$ aus, wobei $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \geq |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$

- Wenn zusätzlich gilt $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ - fertig!

Beweis des wichtigen Lemmas

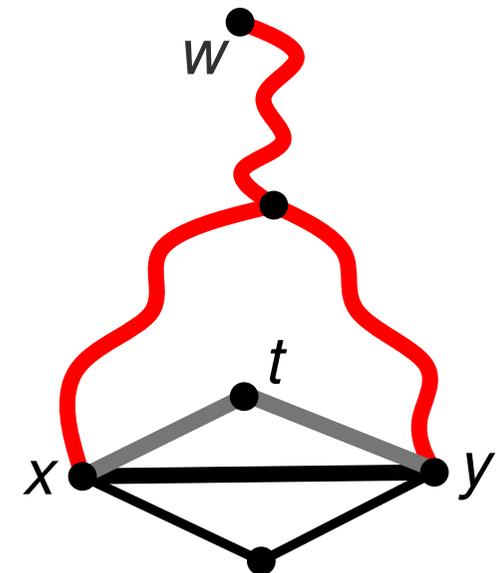
- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,y})| > \frac{2}{3}n$, dann $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| < \frac{1}{3}n$

Beweis des wichtigen Lemmas

- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,y})| > \frac{2}{3}n$, dann $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| < \frac{1}{3}n$
- Wir ersetzen die ausgewählte Kante $\{x, y\}$ mit einer anderen Nichtbaumkante, sodass das Innere kleiner wird und das Äußere nicht über $\frac{2}{3}n$ wächst

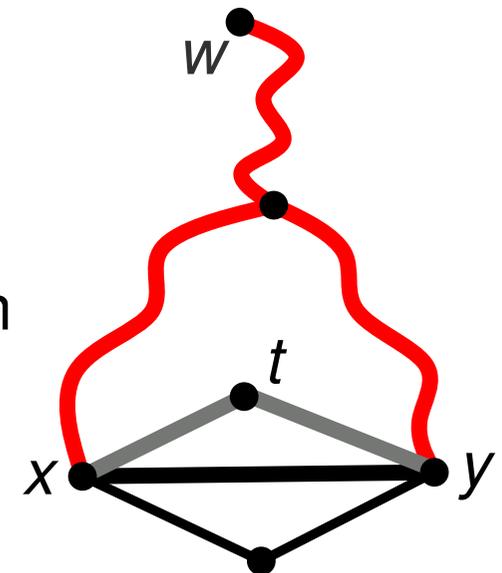
Beweis des wichtigen Lemmas

- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,y})| > \frac{2}{3}n$, dann $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| < \frac{1}{3}n$
- Wir ersetzen die ausgewählte Kante $\{x, y\}$ mit einer anderen Nichtbaumkante, sodass das Innere kleiner wird und das Äußere nicht über $\frac{2}{3}n$ wächst
- G ist ein eingebetteter Graph. Die Kante $\{x, y\}$ begrenzt zwei Dreiecke, von denen eins im $\text{Inneren}(K_{x,y})$ liegt - Dreieck xyt



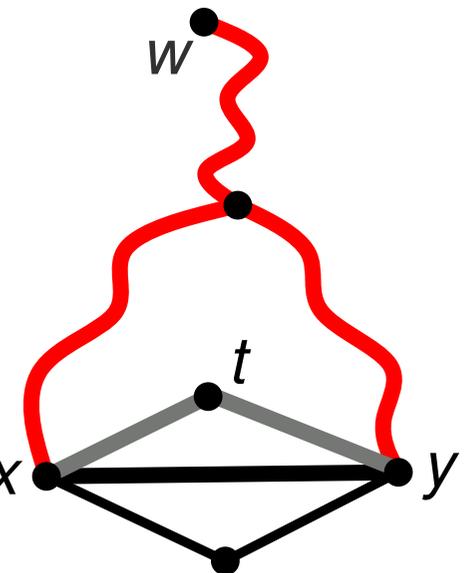
Beweis des wichtigen Lemmas

- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,y})| > \frac{2}{3}n$, dann $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| < \frac{1}{3}n$
- Wir ersetzen die ausgewählte Kante $\{x, y\}$ mit einer anderen Nichtbaumkante, sodass das Innere kleiner wird und das Äußere nicht über $\frac{2}{3}n$ wächst
- G ist ein eingebetteter Graph. Die Kante $\{x, y\}$ begrenzt zwei Dreiecke, von denen eins im $\text{Inneren}(K_{x,y})$ liegt - Dreieck xyt
- Zwei Fälle:
 1. Eine der $\{x, t\}$, $\{t, y\}$ ist eine Baumkante,
 2. $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten



Beweis des wichtigen Lemmas

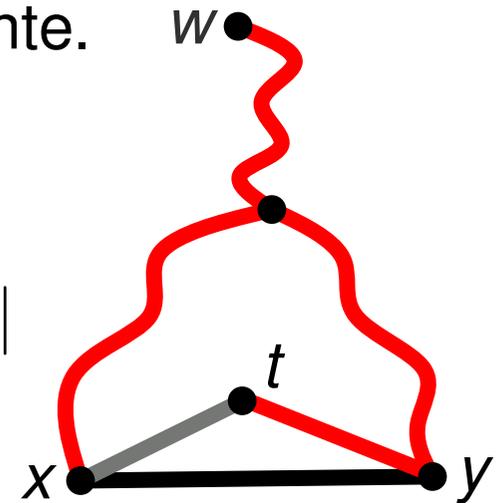
- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,y})| > \frac{2}{3}n$, dann $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| < \frac{1}{3}n$
- Wir ersetzen die ausgewählte Kante $\{x, y\}$ mit einer anderen Nichtbaumkante, sodass das Innere kleiner wird und das Äußere nicht über $\frac{2}{3}n$ wächst
- G ist ein eingebetteter Graph. Die Kante $\{x, y\}$ begrenzt zwei Dreiecke, von denen eins im $\text{Inneren}(K_{x,y})$ liegt - Dreieck xyt
- Zwei Fälle:
 1. Eine der $\{x, t\}$, $\{t, y\}$ ist eine Baumkante,
 2. $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten
- **Fall 1:** Eine der $\{x, t\}$, $\{t, y\}$ ist eine Baumkante



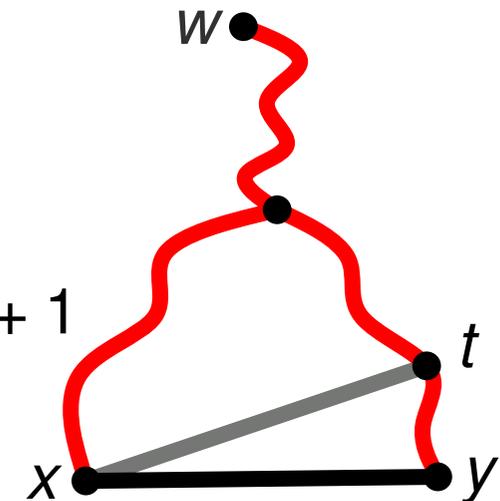
Beweis des wichtigen Lemmas

Fall 1: Eine der $\{x, t\}$, $\{t, y\}$ ist eine Baumkante.
Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$.

- Falls $t \notin K_{x,y}$: $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$
und $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$



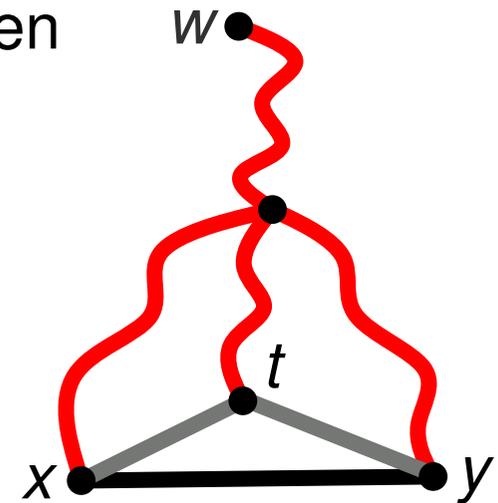
- Falls $t \in K_{x,y}$: $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})| + 1$
und $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})|$



Beweis des wichtigen Lemmas

Fall 2: $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten

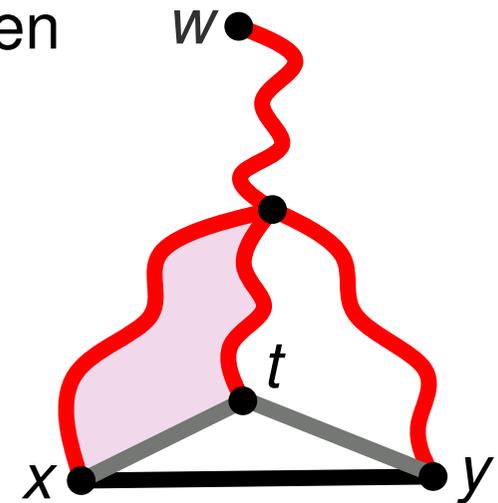
- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$



Beweis des wichtigen Lemmas

Fall 2: $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten

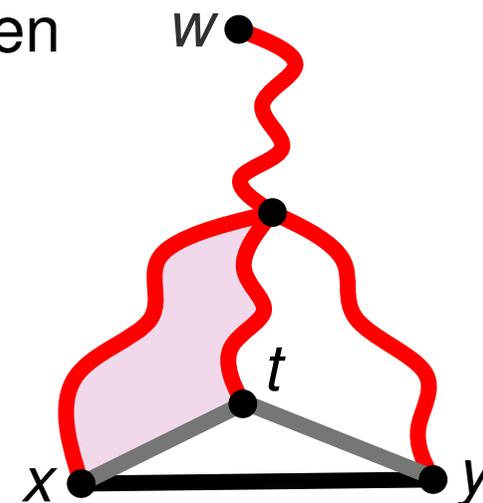
- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$



Beweis des wichtigen Lemmas

Fall 2: $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten

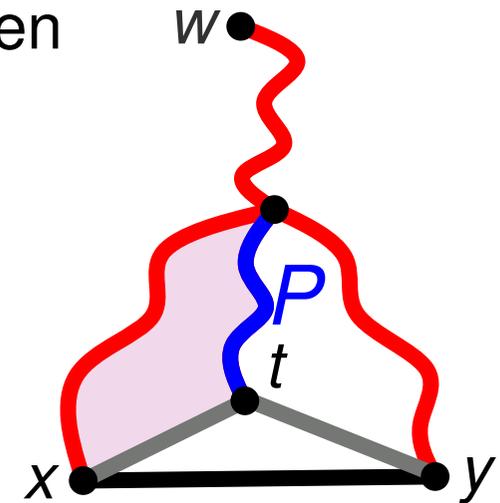
- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$
- Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$



Beweis des wichtigen Lemmas

Fall 2: $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten

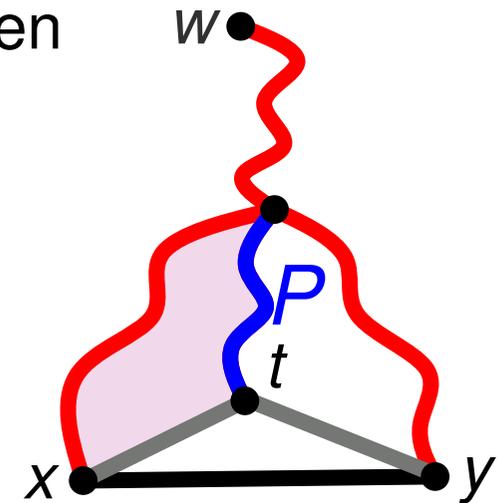
- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$
- Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$
- $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| \leq n - (|\text{Inneres}(K_{x,t})| + P) \leq n - \frac{1}{2}|\text{Inneres}(K_{x,y})| < n - \frac{1}{2} \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}n$



Beweis des wichtigen Lemmas

Fall 2: $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten

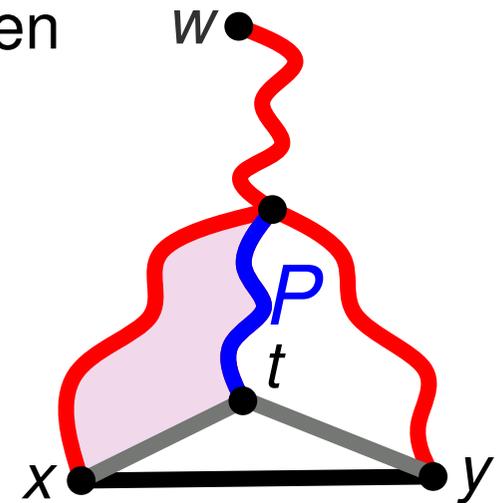
- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$
- Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$
- $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| \leq n - (|\text{Inneres}(K_{x,t})| + P) \leq n - \frac{1}{2}|\text{Inneres}(K_{x,y})| < n - \frac{1}{2} \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}n$
- $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \leq |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$



Beweis des wichtigen Lemmas

Fall 2: $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten

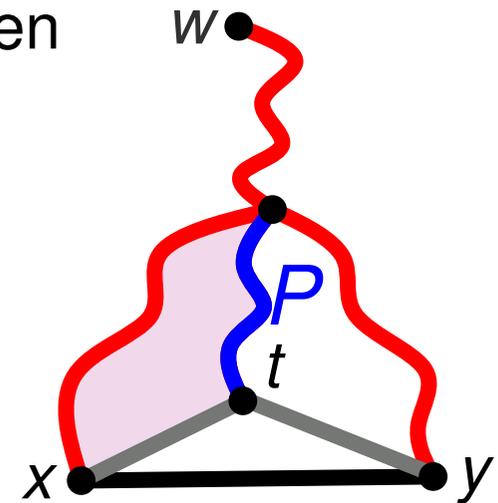
- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$
- Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$
- $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| \leq n - (|\text{Inneres}(K_{x,t})| + P) \leq n - \frac{1}{2}|\text{Inneres}(K_{x,y})| < n - \frac{1}{2} \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}n$
- $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \leq |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$
- In beiden Fällen, verkleinern wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und lassen $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ unverändert



Beweis des wichtigen Lemmas

Fall 2: $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten

- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$
- Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$
- $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| \leq n - (|\text{Inneres}(K_{x,t})| + P) \leq n - \frac{1}{2}|\text{Inneres}(K_{x,y})| < n - \frac{1}{2} \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}n$
- $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \leq |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$
- In beiden Fällen, verkleinern wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und lassen $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ unverändert
- Dies kann nun so lange wiederholt werden, bis auch $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ gilt



Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 2 \cdot h + 1$

Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
 - S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
 - $|S| \leq 2 \cdot h + 1$
-
- Ersetzung einer Nichtbaumkante durch eine andere, welche die Anzahl der Deiecke im Inneren reduziert - $2n - 4$ Schritte

Lemma Sei $G = (V, E)$ ein planarer, zusammenhängender Graph mit $|V| = n \geq 5$ und $T = (V, E(T))$ ein aufspannender Baum von G mit Wurzel w und Höhe h . Die Knotenmenge von G kann so in drei Mengen V_1 , V_2 und S partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
 - S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
 - $|S| \leq 2 \cdot h + 1$
-
- Ersetzung einer Nichtbaumkante durch eine andere, welche die Anzahl der Deiecke im Inneren reduziert - $2n - 4$ Schritte
 - in jedem Schritt wollen wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ berechnen

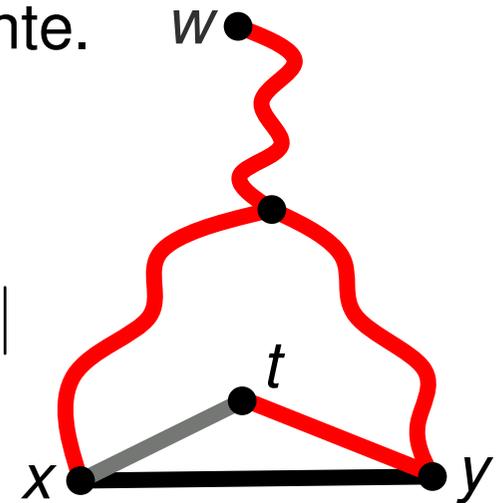
Implementierung mit linearer Laufzeit

- In Fall 1 können wir das in konstanter Zeit realisieren

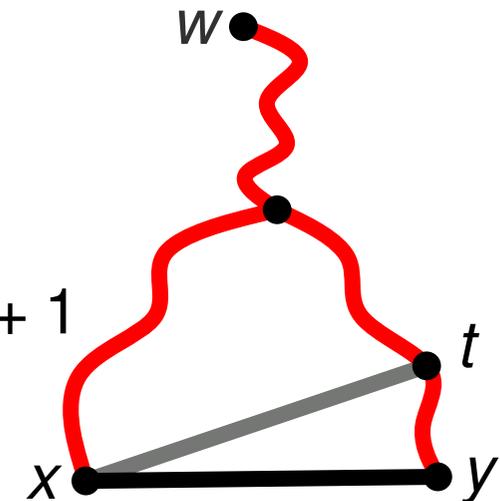
Implementierung mit linearer Laufzeit

Fall 1: Eine der $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ ist eine Baumkante.
Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$.

- Falls $t \notin K_{x,y}$: $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})|$
und $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$



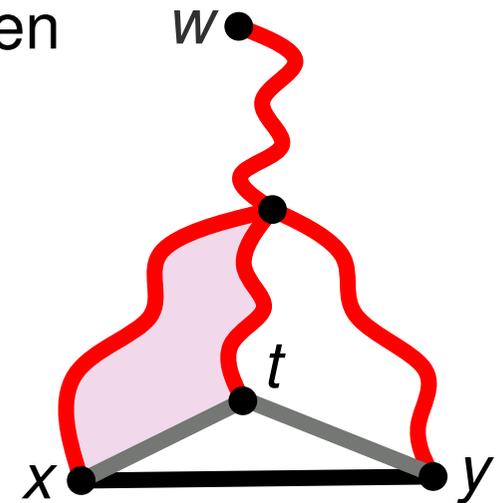
- Falls $t \in K_{x,y}$: $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| = |\text{Äußeres}(K_{x,y})| + 1$
und $|\text{Inneres}(K_{x,t})| = |\text{Inneres}(K_{x,y})|$



Implementierung mit linearer Laufzeit

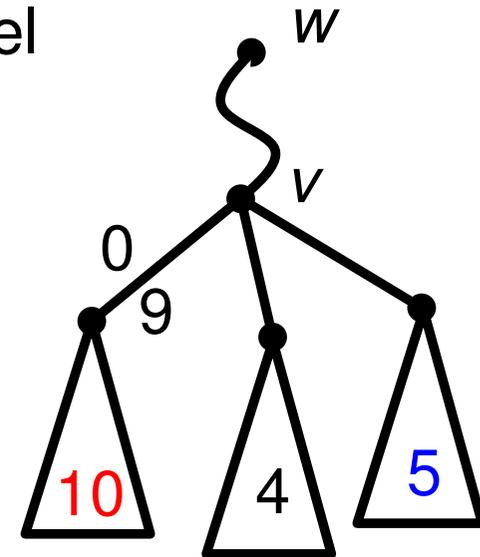
Fall 2: $\{x, t\}$ und $\{t, y\}$ sind beides Nichtbaumkanten

- Sei $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \geq |\text{Inneres}(K_{t,y})|$
- Ersetze $\{x, y\}$ durch $\{x, t\}$
- $|\text{Äußeres}(K_{x,t})| \leq n - |\text{Inneres}(K_{x,t})| \leq n - \frac{1}{2}|\text{Inneres}(K_{x,y})| < n - \frac{1}{2} \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}n$
- $|\text{Inneres}(K_{x,t})| \leq |\text{Inneres}(K_{x,y})| - 1$
- In beiden Fällen, verkleinern wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und lassen $|\text{Äußeres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$
- Dies kann nun so lange wiederholt werden, bis auch $|\text{Inneres}(K_{x,y})| \leq \frac{2}{3}n$ gilt

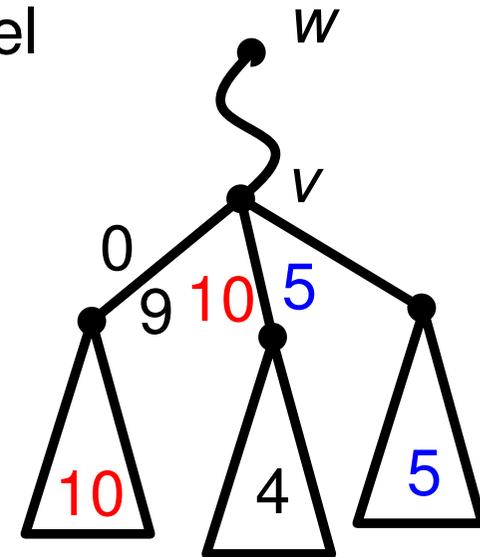


- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2

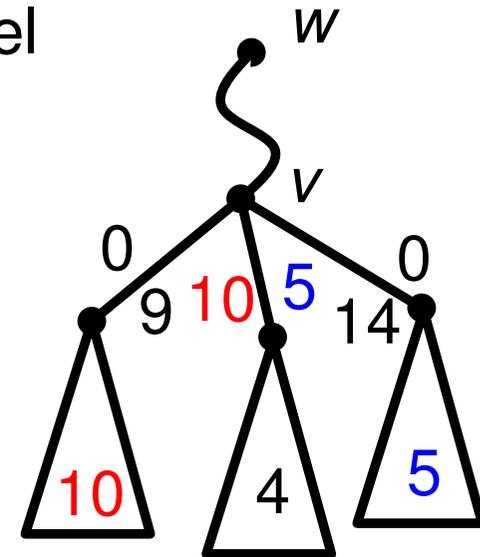
- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



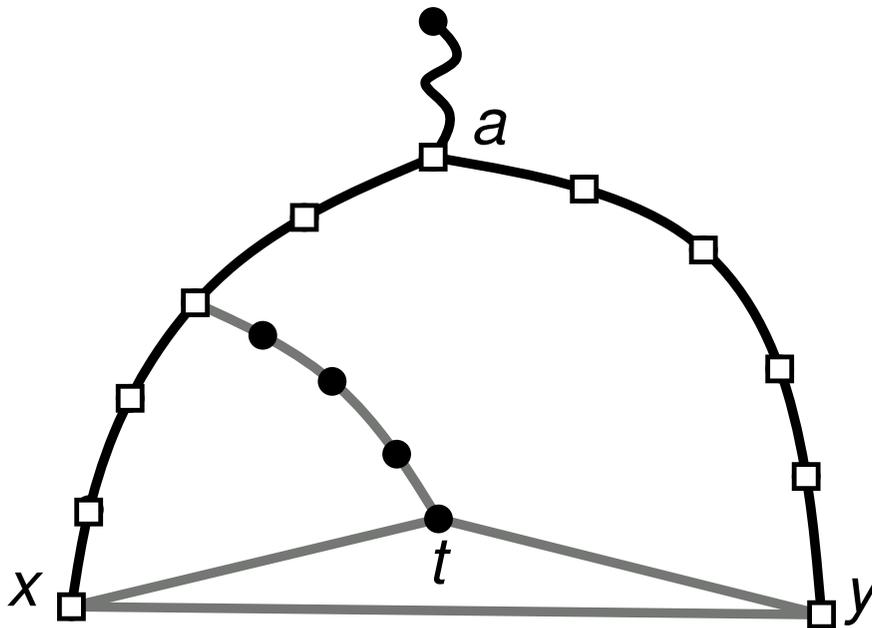
- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:

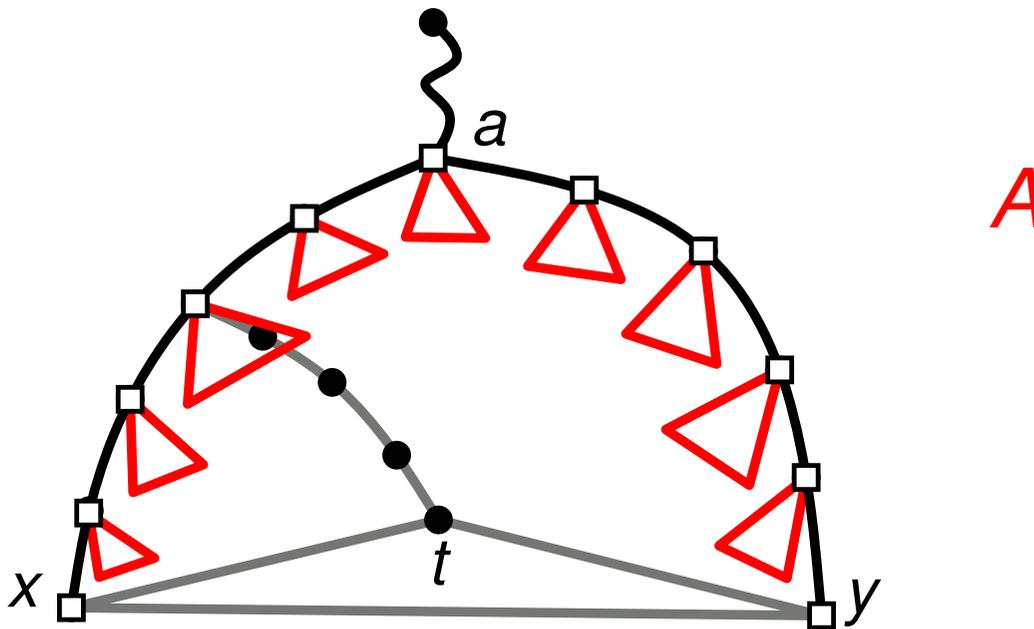


- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



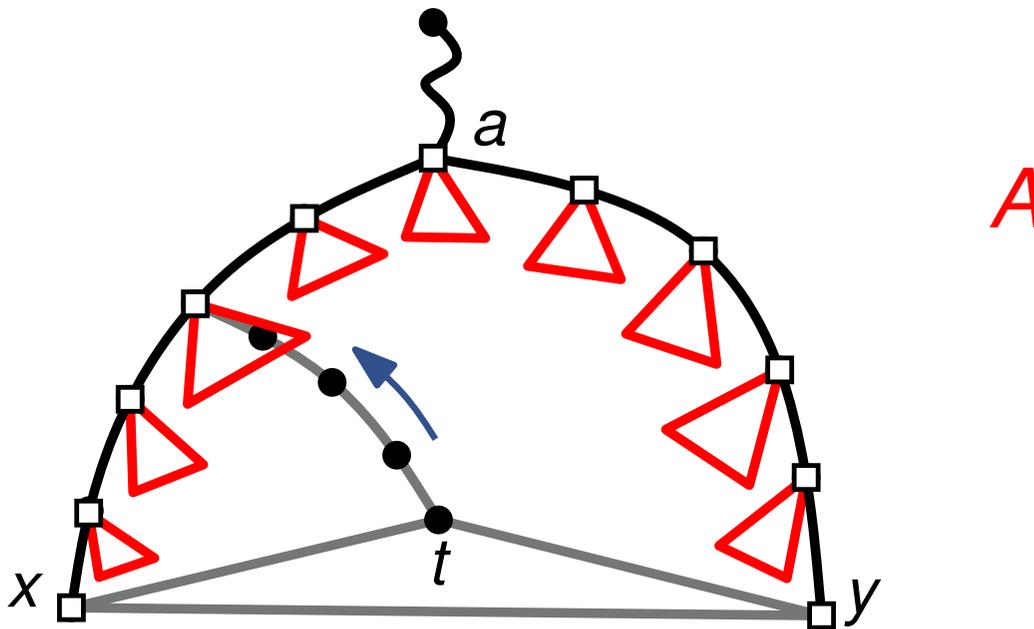
Implementierung mit linearer Laufzeit

- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



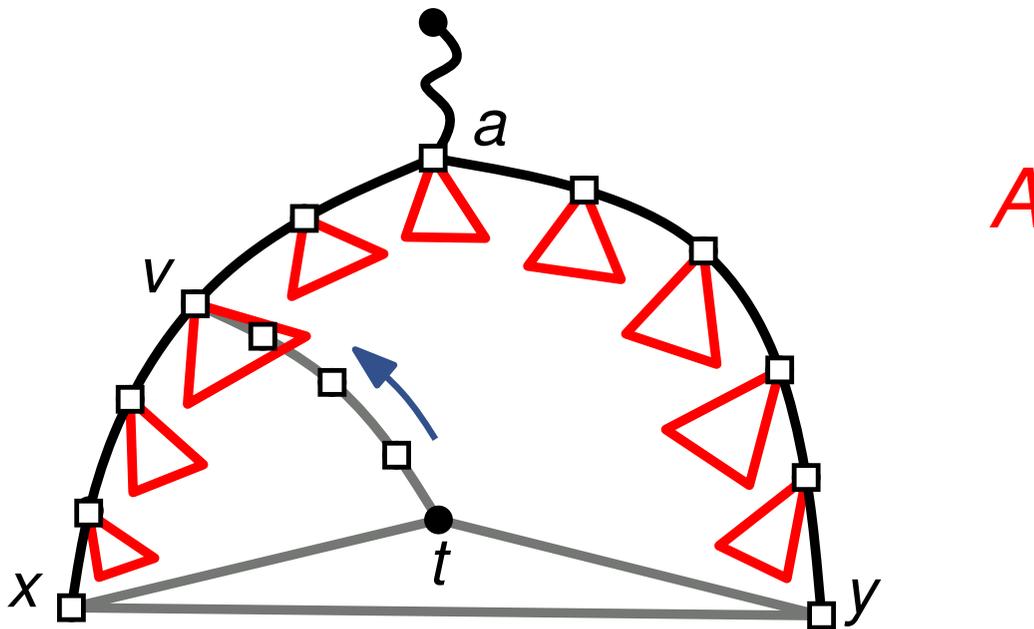
Implementierung mit linearer Laufzeit

- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



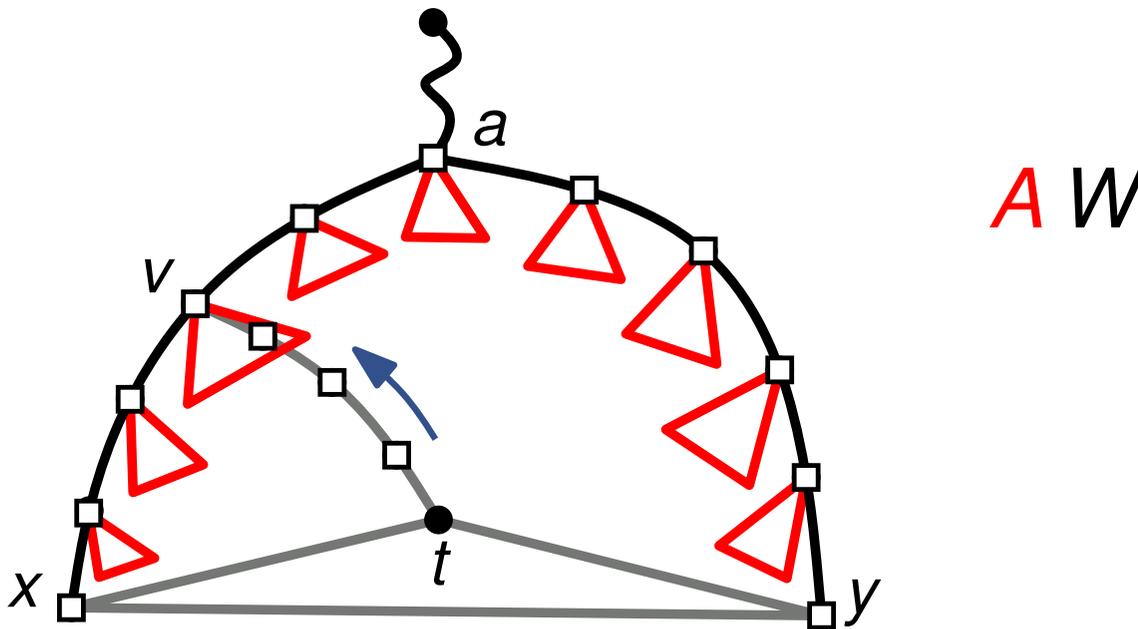
Implementierung mit linearer Laufzeit

- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



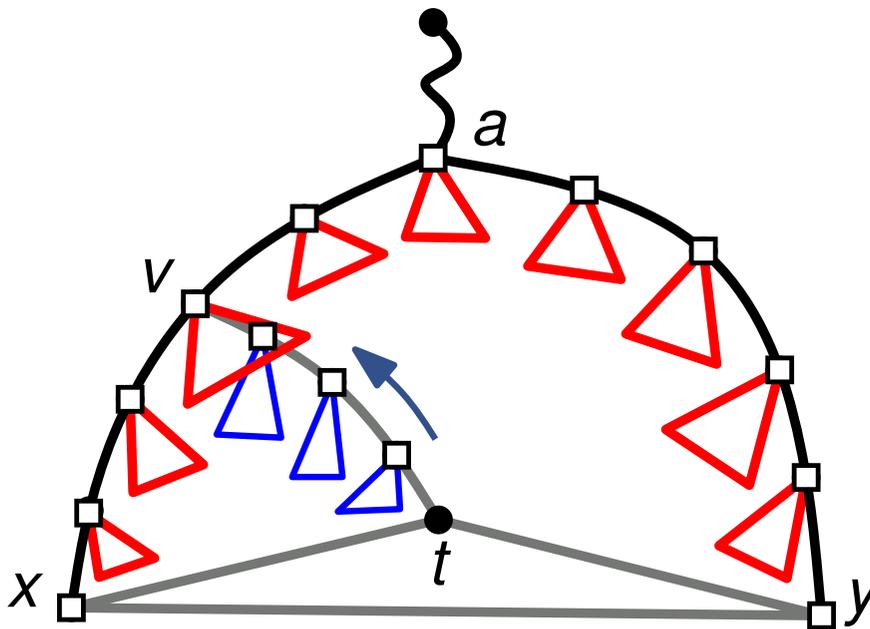
Implementierung mit linearer Laufzeit

- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



Implementierung mit linearer Laufzeit

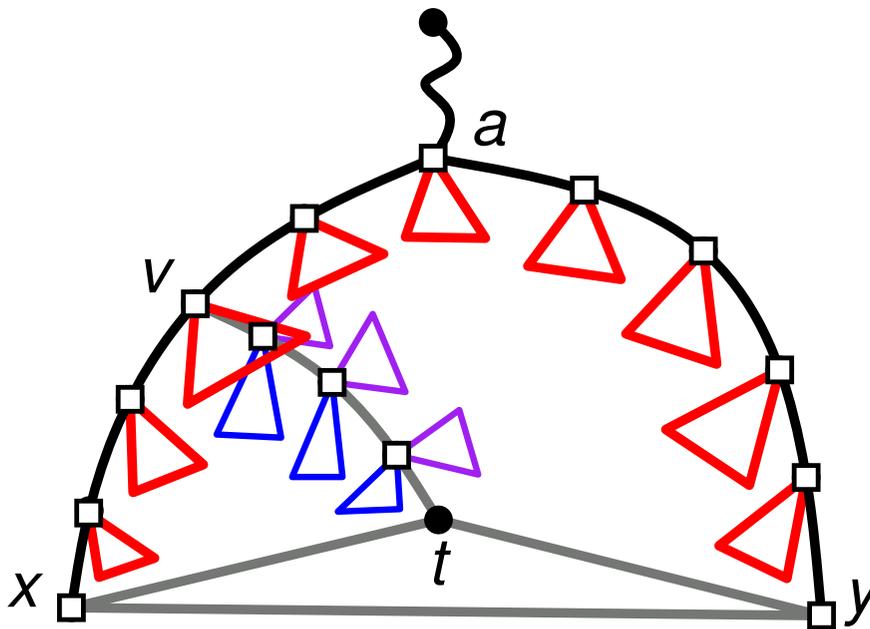
- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



A W B

Implementierung mit linearer Laufzeit

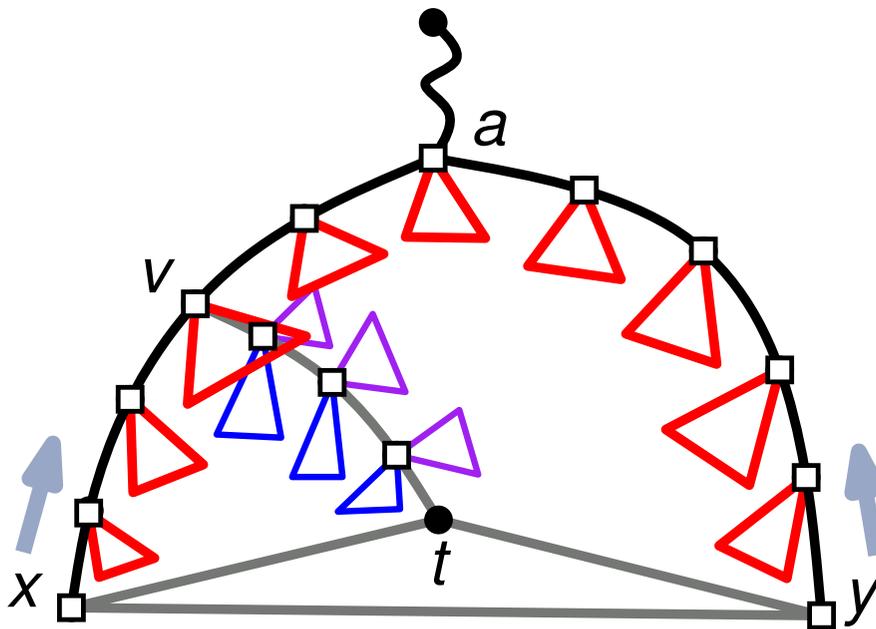
- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



A W B C

Implementierung mit linearer Laufzeit

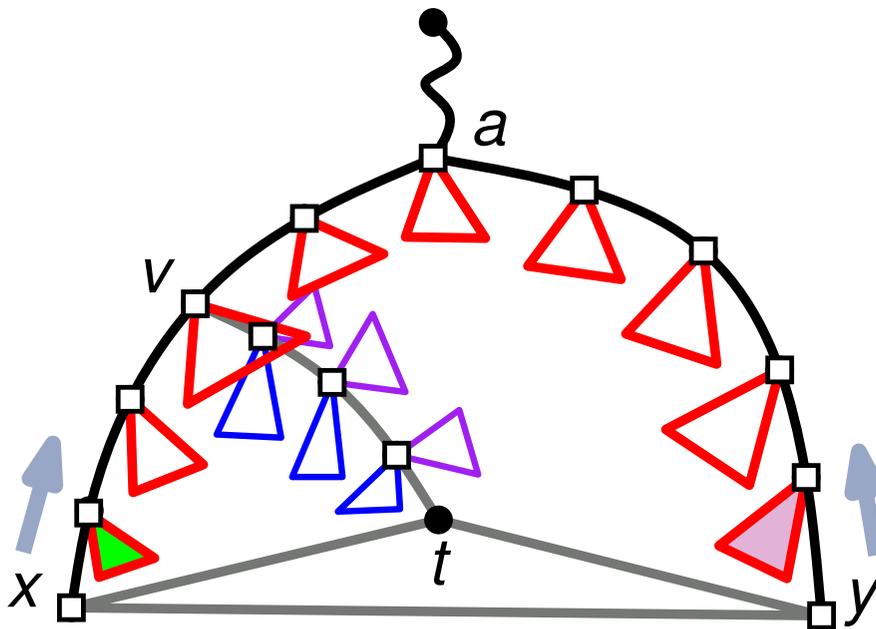
- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



A W B C

Implementierung mit linearer Laufzeit

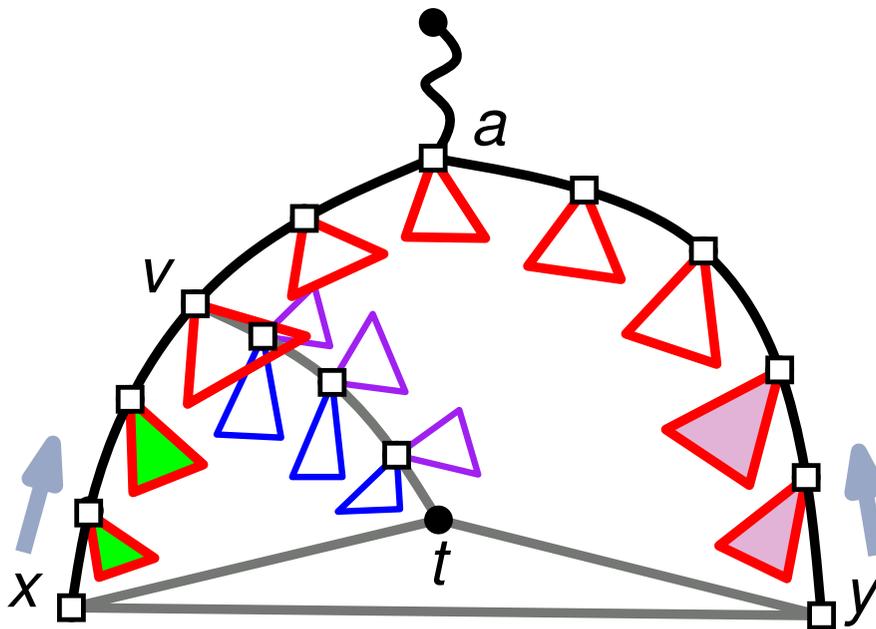
- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



A W B C

Implementierung mit linearer Laufzeit

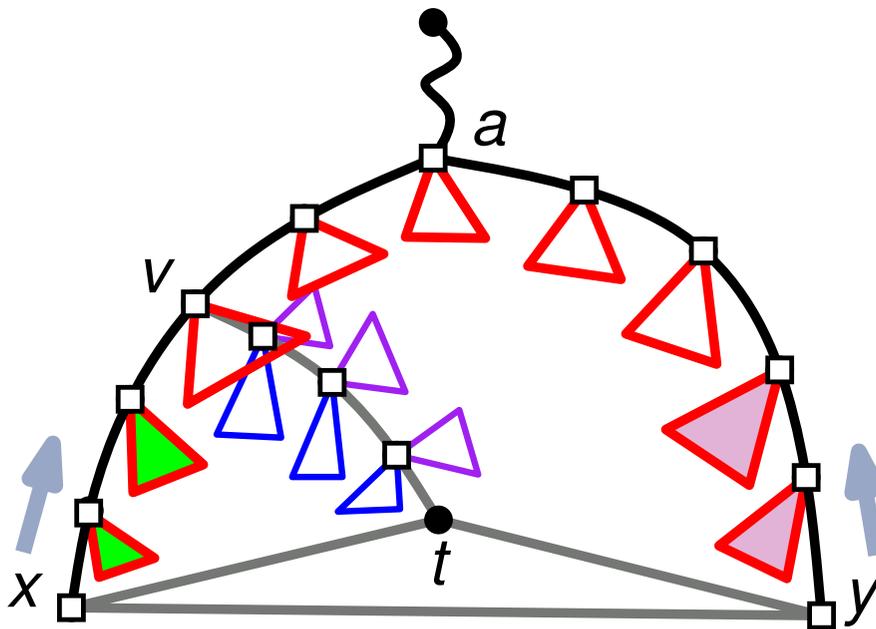
- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



A *W* *B* *C*

Implementierung mit linearer Laufzeit

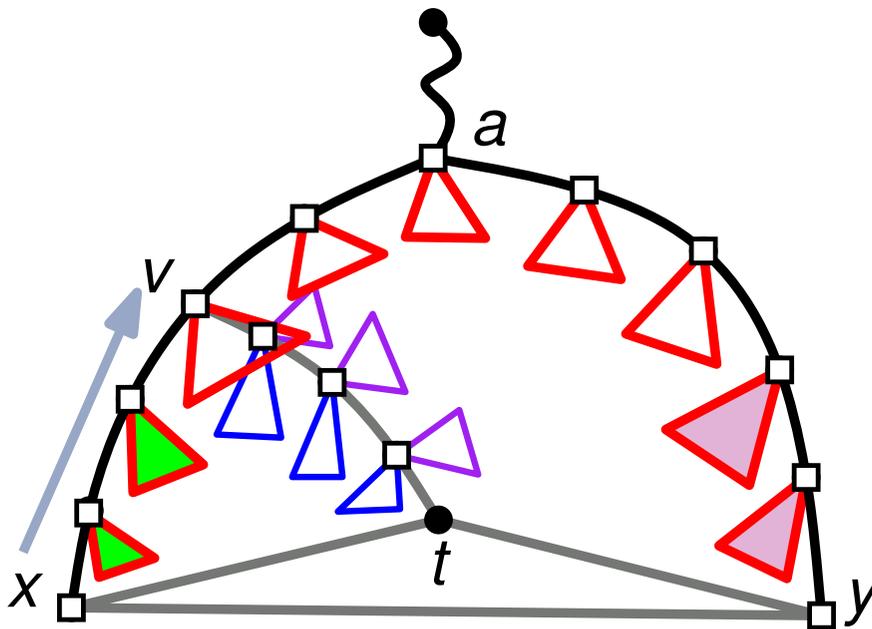
- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



A W B C D E

Implementierung mit linearer Laufzeit

- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Wir durchlaufen T von den Blättern zur Wurzel und speichern für jede Kante:



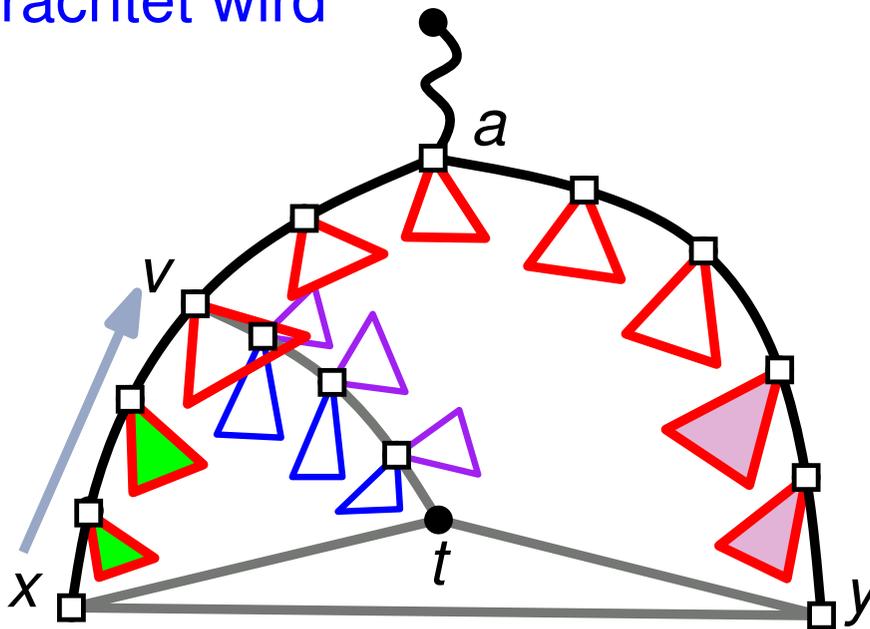
A W B C D E

$$|\text{Inneres}(K_{x,t})| = D + B$$

$$|\text{Inneres}(K_{y,t})| = A - D - B - W$$

Implementierung mit linearer Laufzeit

- In Fall 1 können wir $|\text{Inneres}(K_{x,y})|$ und $|\text{Äußeres}(K_{x,y})|$ in konstanter Zeit berechnen
- Im Folgenden berechnen wir $|\text{Inneres}(K_{x,t})|$ und $|\text{Inneres}(K_{t,y})|$ für Fall 2
- Die Anzahl der Operationen in einem Schritt ist proportional zu der Anzahl der Knoten in dem Teil von $K_{x,y}$, der nicht weiter betrachtet wird



A W B C D E

$$|\text{Inneres}(K_{x,t})| = D + B$$

$$|\text{Inneres}(K_{y,t})| = A - D - B - W$$

- **Wichtiges Lemma** ✓
 - **Beweis** ✓
 - **Implementierung mit linearer Laufzeit** ✓
- **Beweis von PLANAR-SEPARATOR-THEOREM**
- **Separator-Algorithmus**

- Wichtiges Lemma ✓
 - Beweis ✓
 - Implementierung mit linearer Laufzeit ✓
- **Beweis von PLANAR-SEPARATOR-THEOREM**
- Separator-Algorithmus

Satz (Planar-Separator-Theorem) Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass

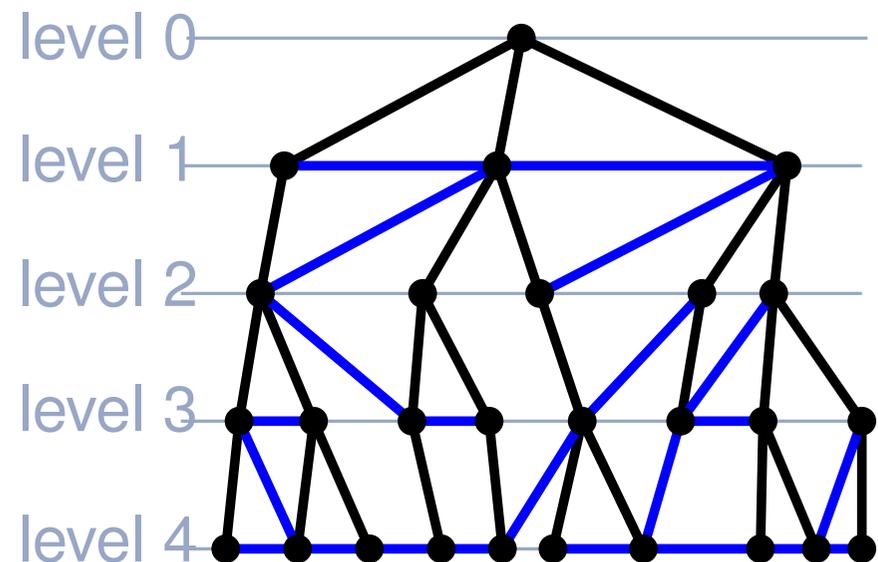
- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

Planar Separator Theorem

Satz (Planar-Separator-Theorem) Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

BFS-Lemma Sei $T = (V, E(T))$ ein BFS-Baum von $G = (V, E)$. Für eine Nichtbaumkante $\{u, v\}$ gilt $|\text{level}(u) - \text{level}(v)| \leq 1$.

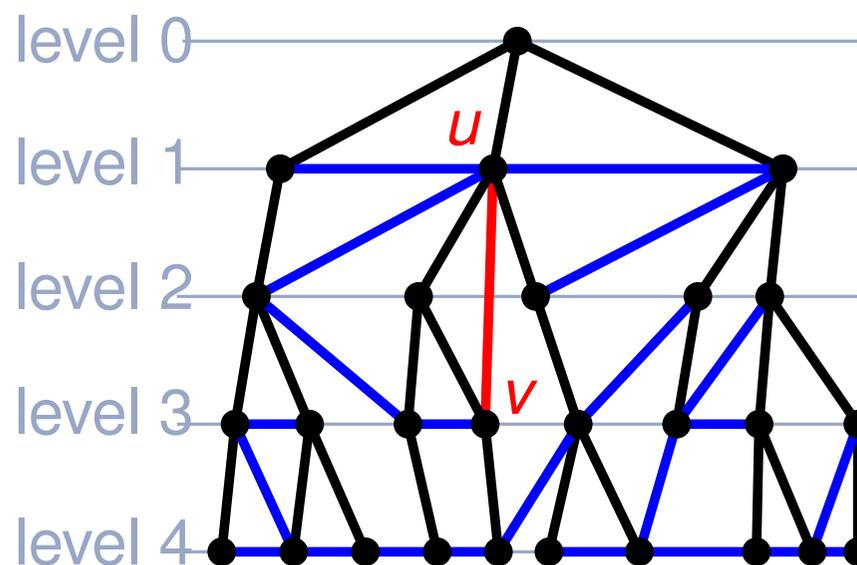


Planar Separator Theorem

Satz (Planar-Separator-Theorem) Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

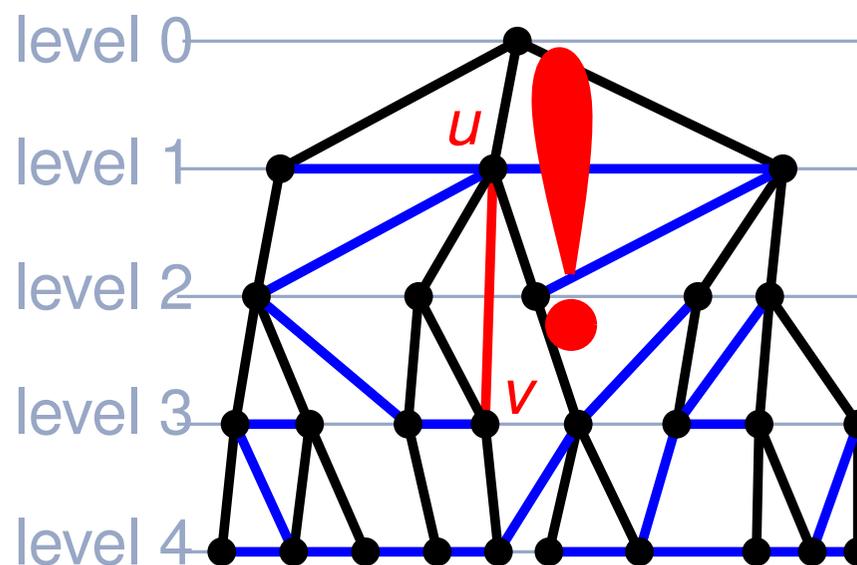
BFS-Lemma Sei $T = (V, E(T))$ ein BFS-Baum von $G = (V, E)$. Für eine Nichtbaumkante $\{u, v\}$ gilt $|\text{level}(u) - \text{level}(v)| \leq 1$.



Satz (Planar-Separator-Theorem) Die Knotenmenge eines zusammenhängenden, planaren Graphen $G = (V, E)$, $n = |V| \geq 5$, kann so in drei Mengen $V_1, V_2, S \subseteq V$ partitioniert werden, dass

- $|V_1|, |V_2| \leq \frac{2}{3} \cdot n$,
- S Separator, der V_1 von V_2 trennt,
- $|S| \leq 4 \cdot \sqrt{n}$

BFS-Lemma Sei $T = (V, E(T))$ ein BFS-Baum von $G = (V, E)$. Für eine Nichtbaumkante $\{u, v\}$ gilt $|\text{level}(u) - \text{level}(v)| \leq 1$.

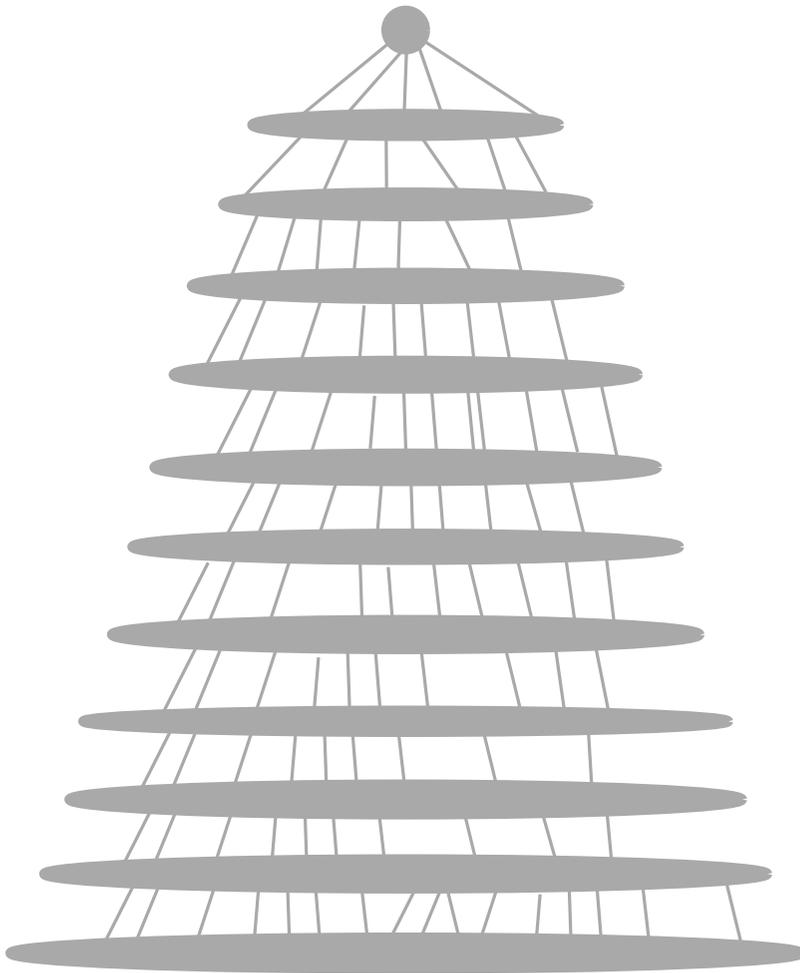


Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.

Beweis des Planar-Separator-Theorem

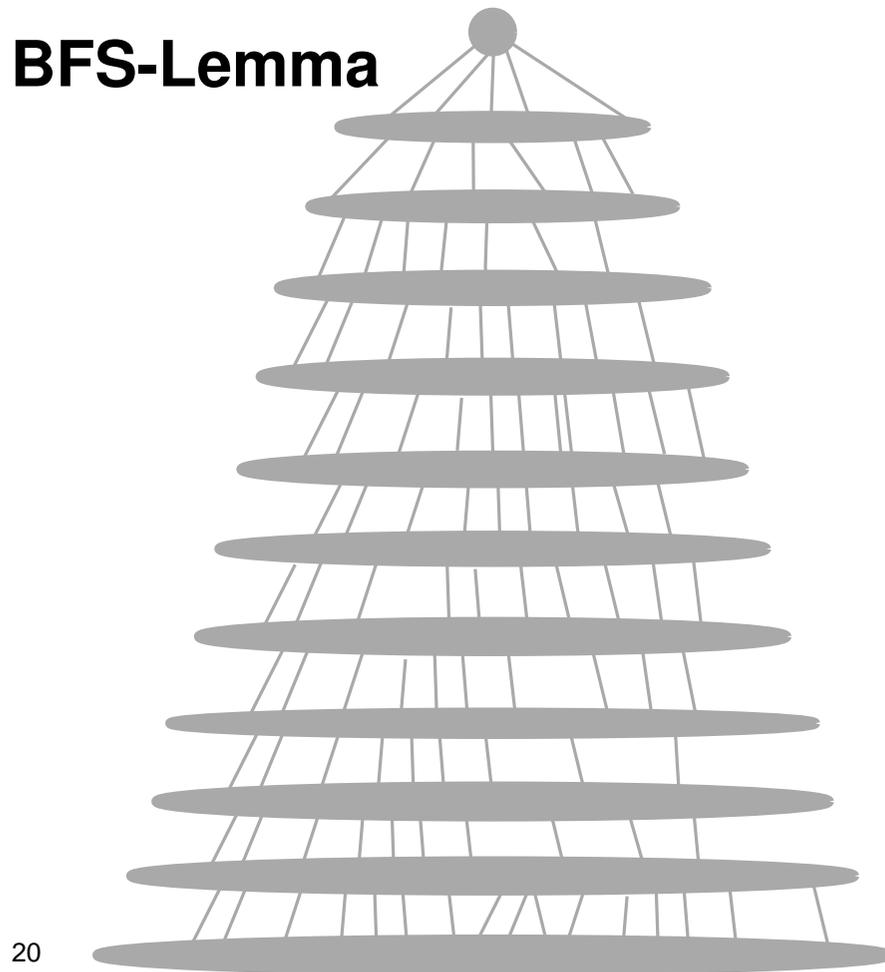
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



20

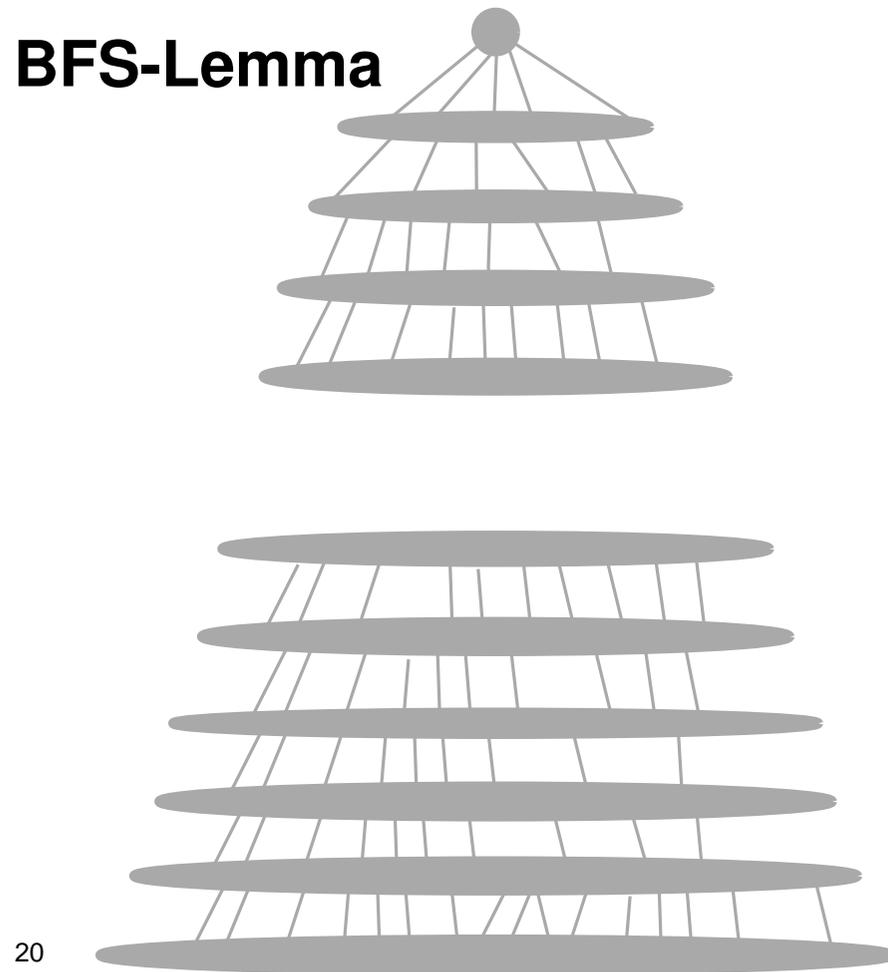
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



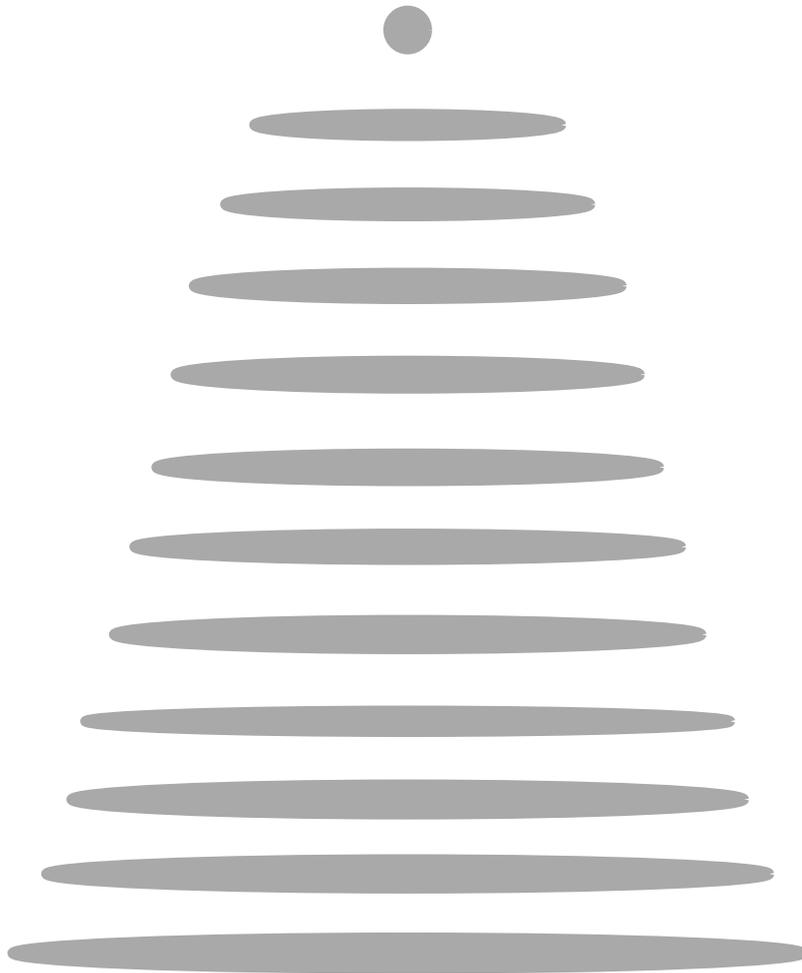
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



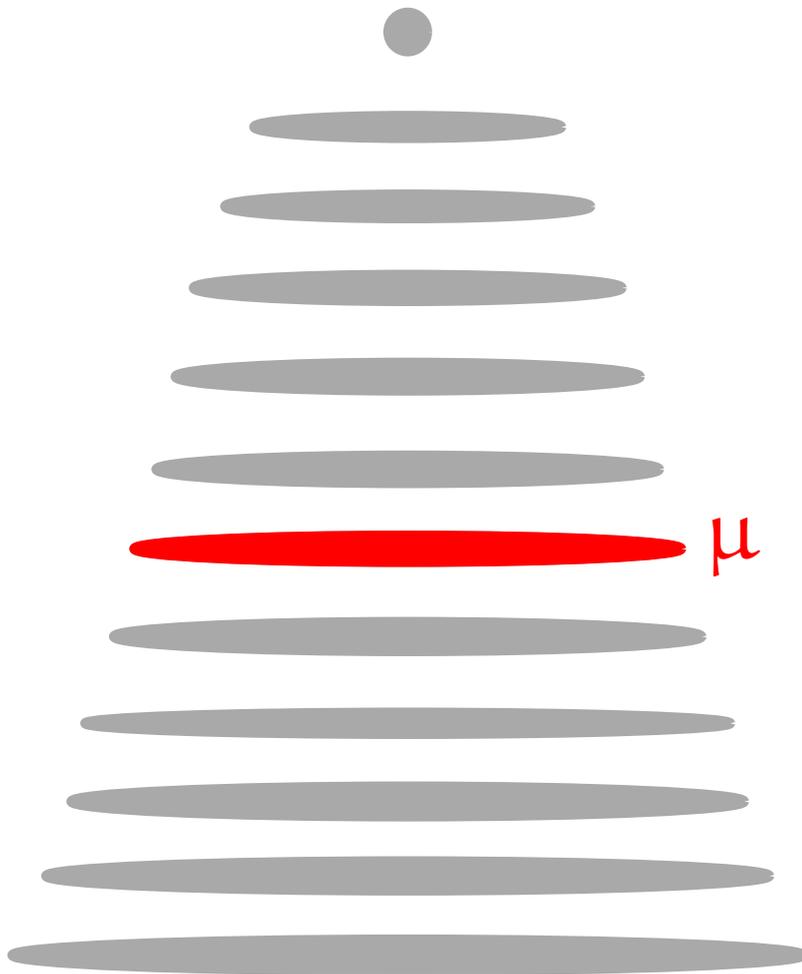
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



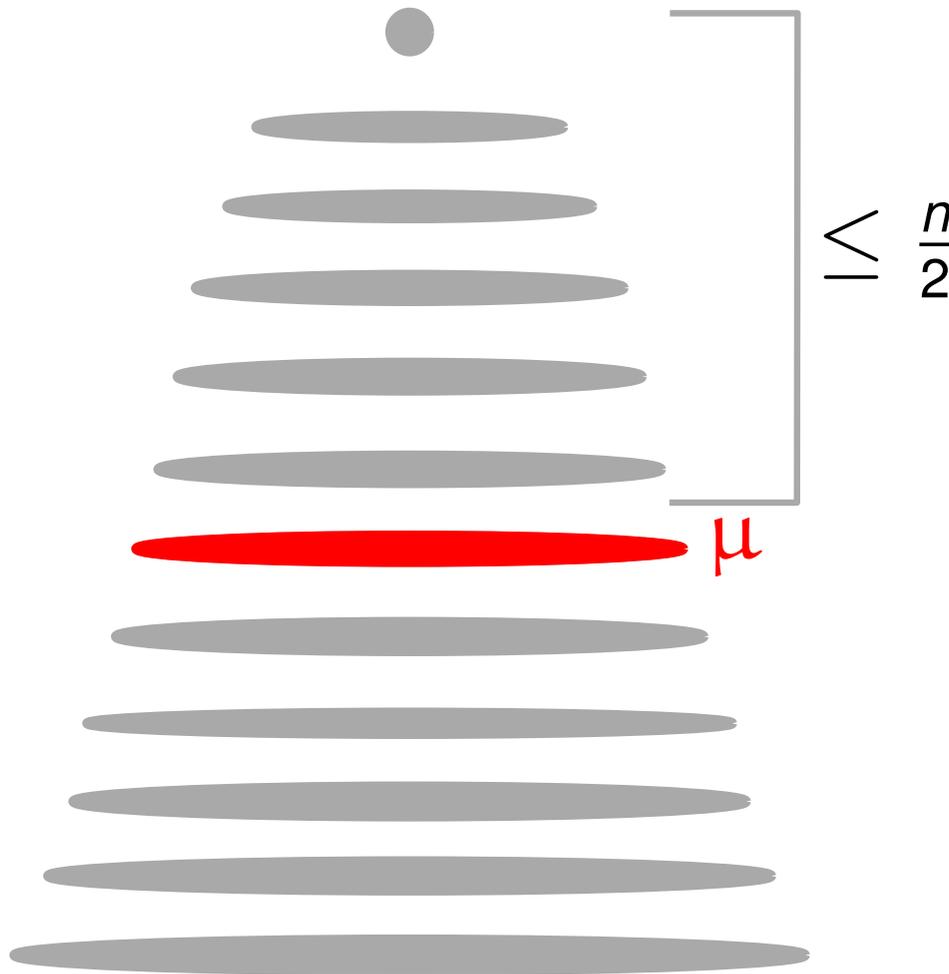
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



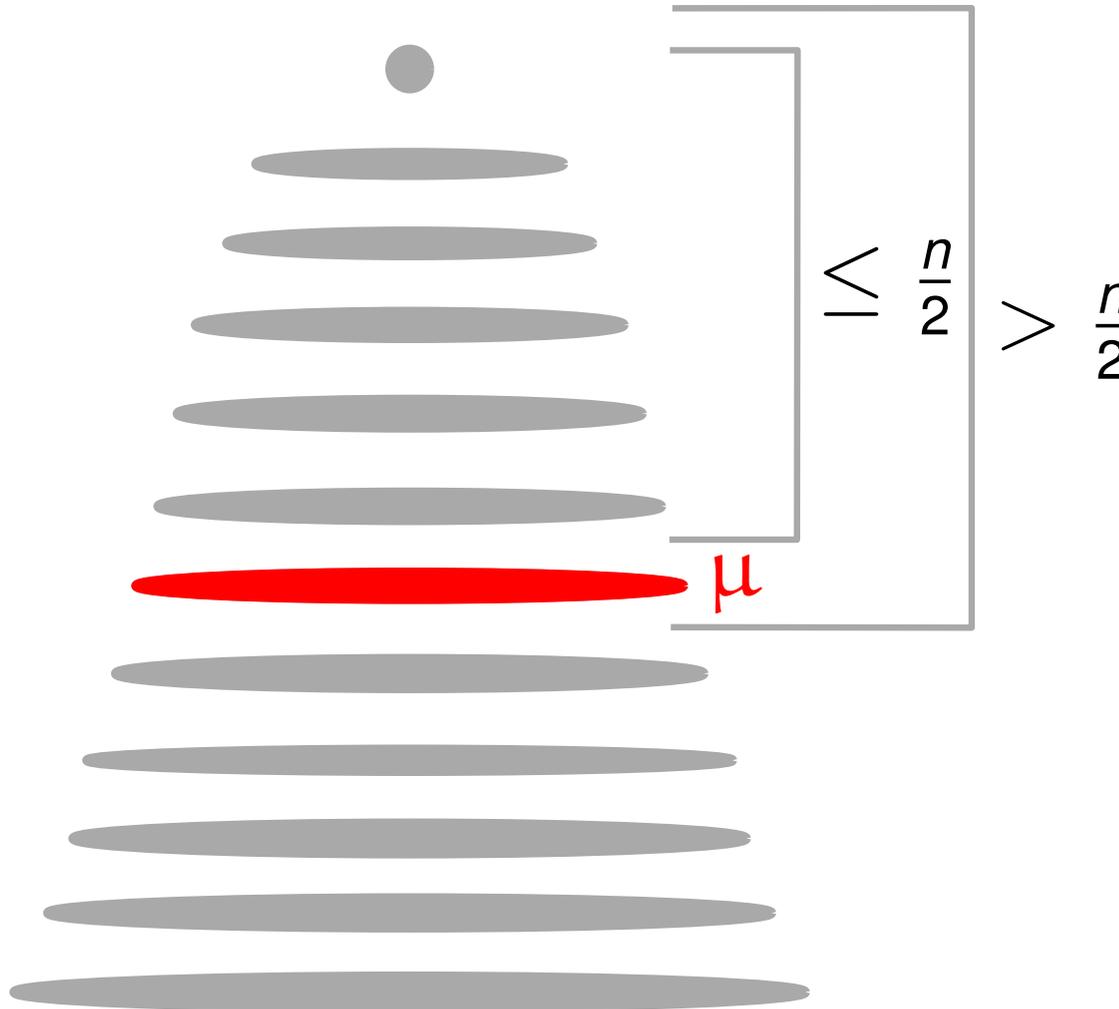
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



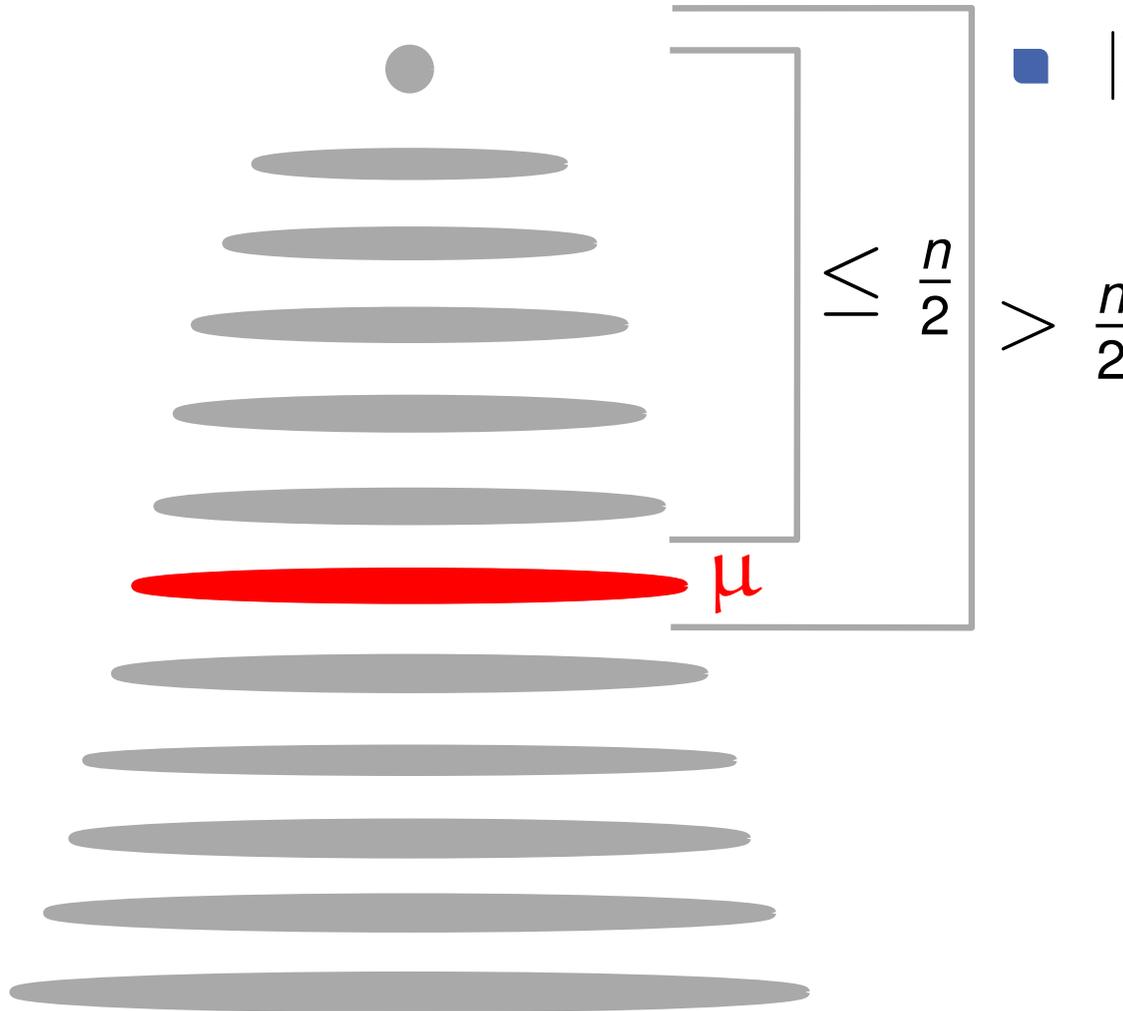
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



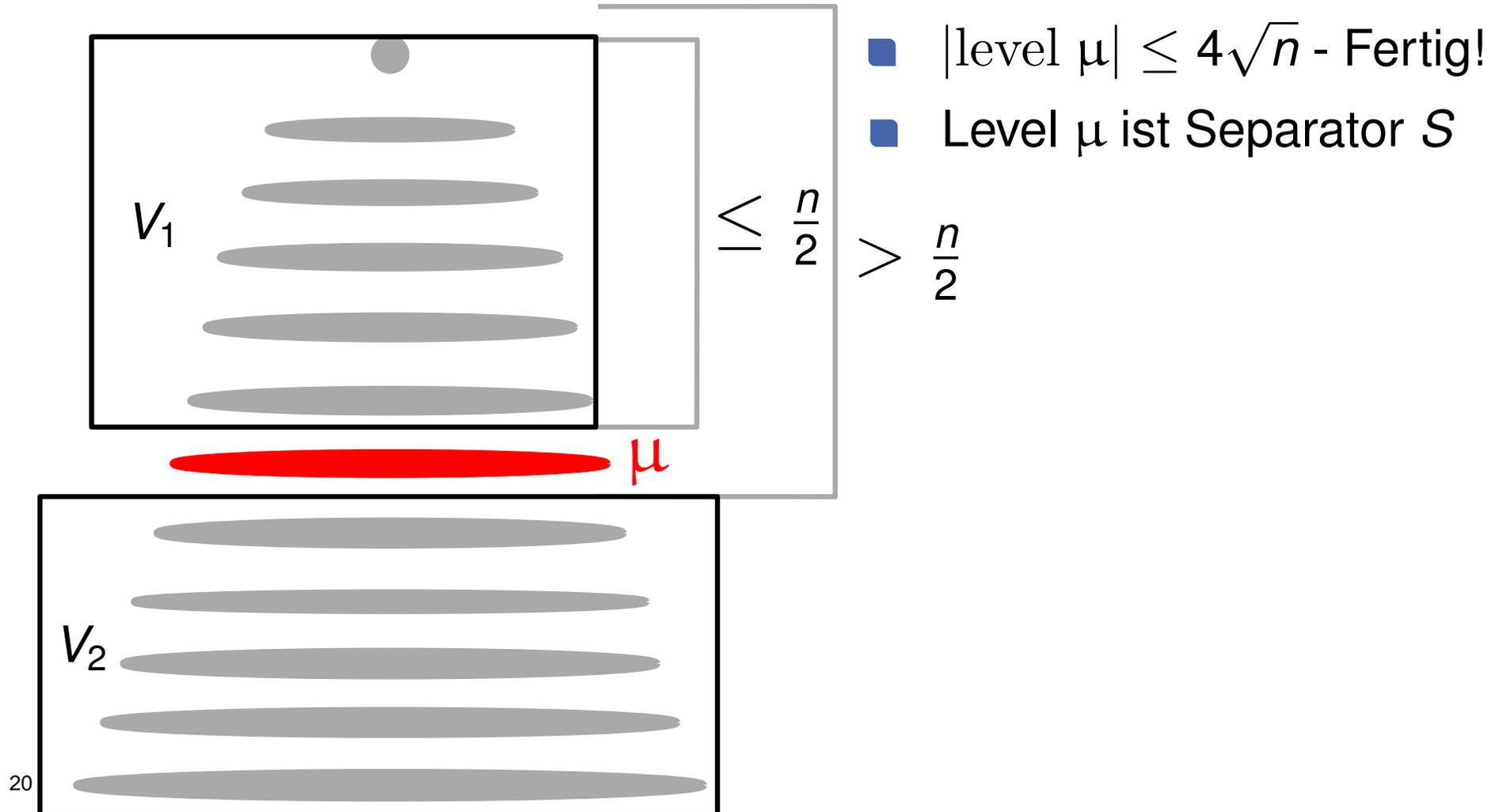
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



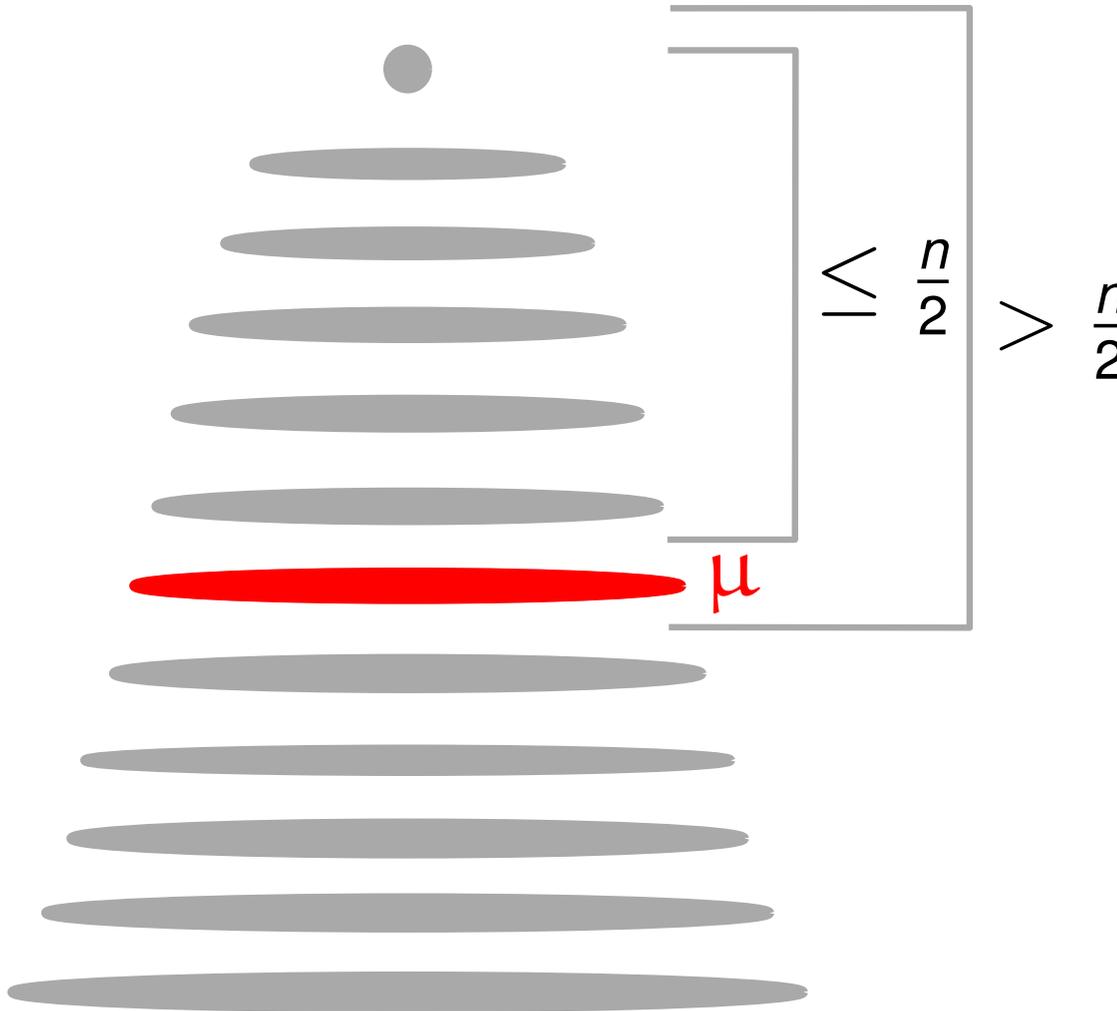
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



Beweis des Planar-Separator-Theorem

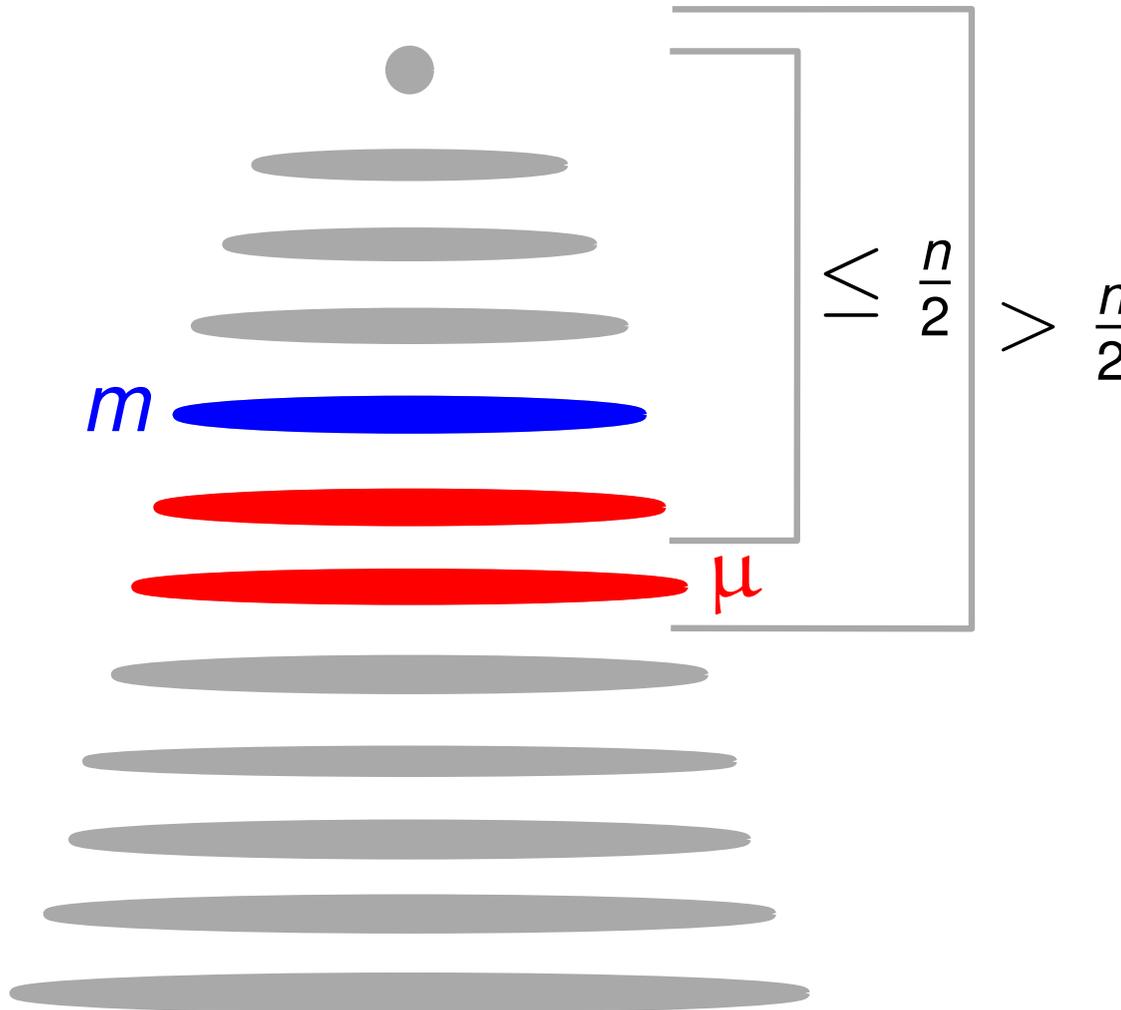
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

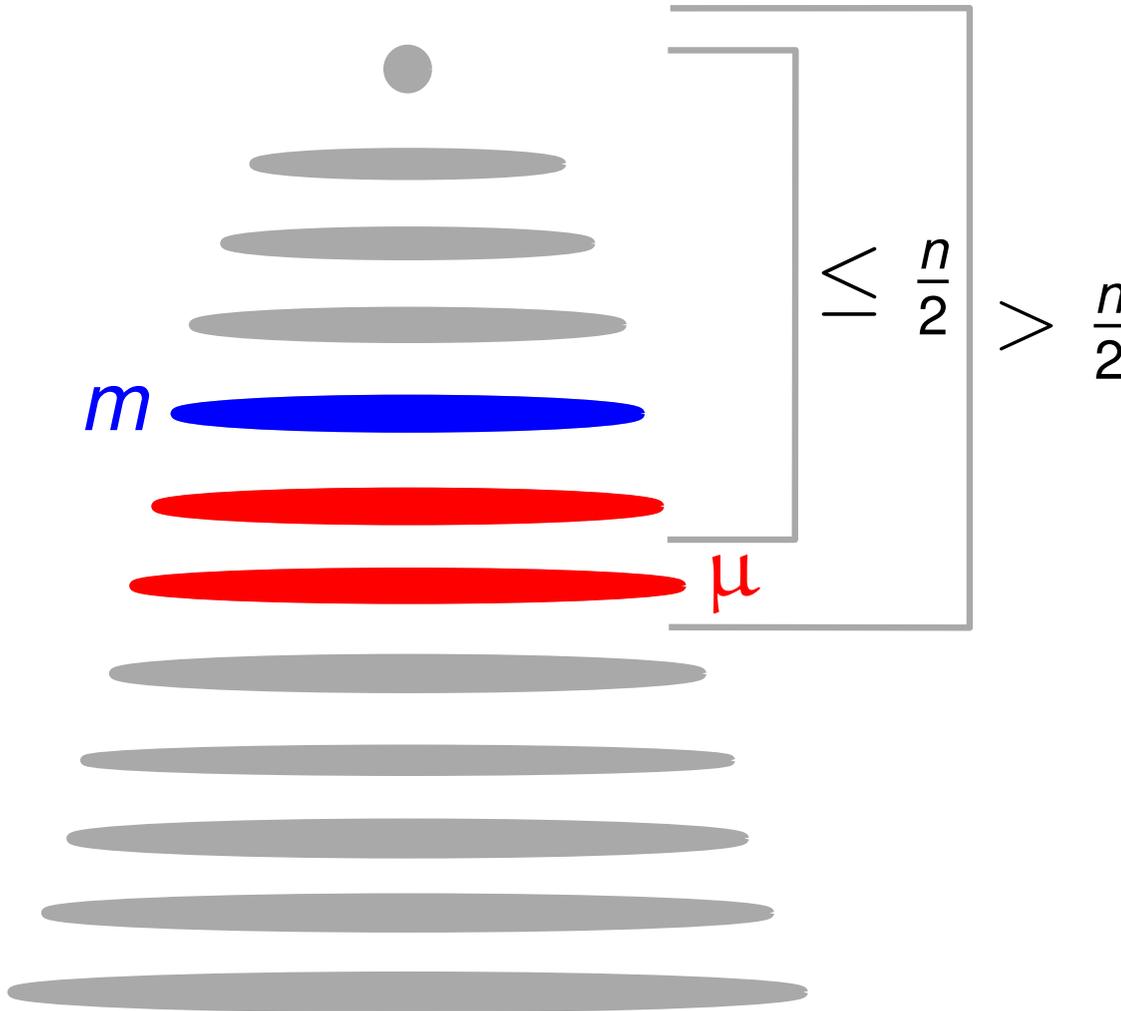
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

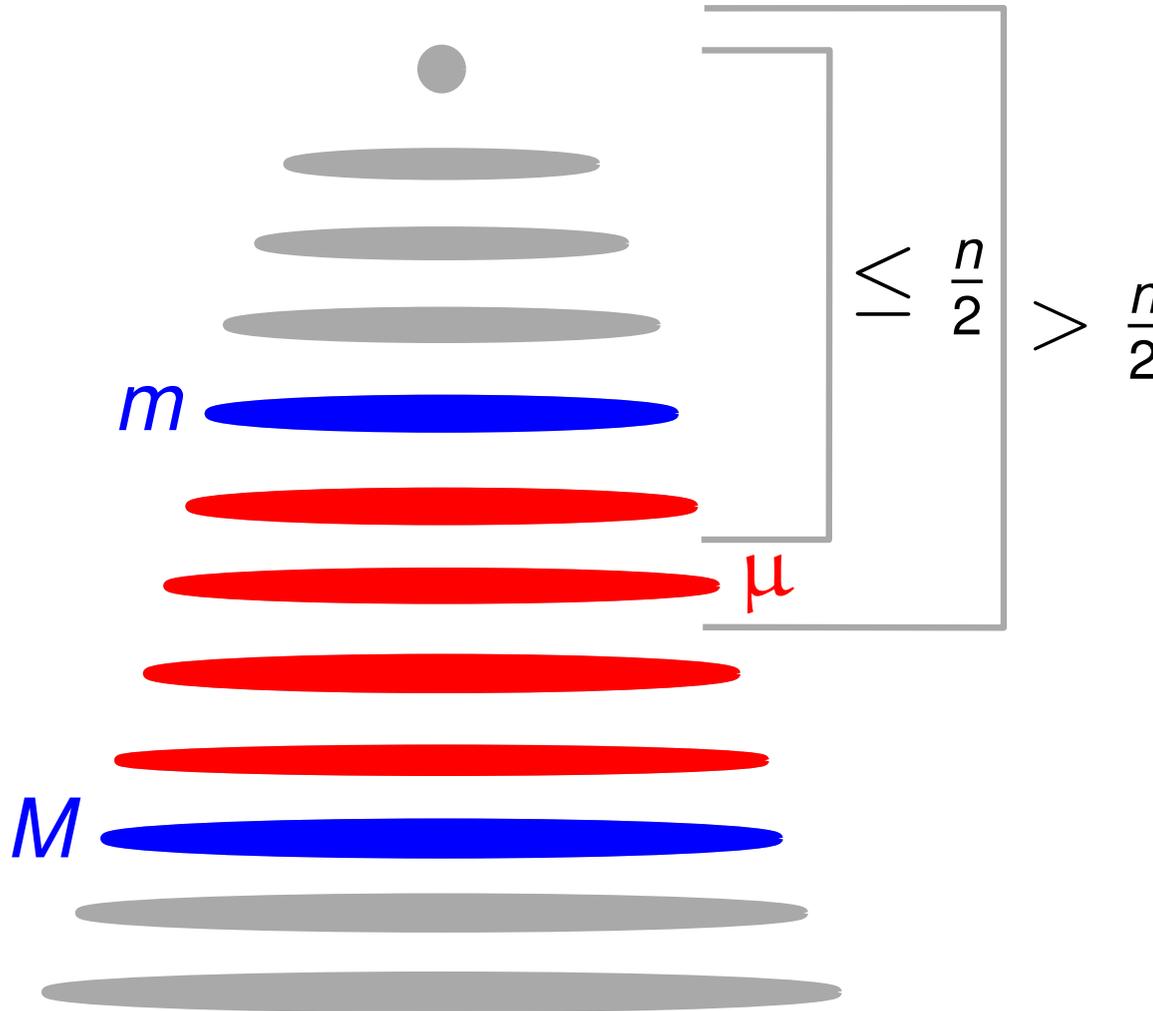
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

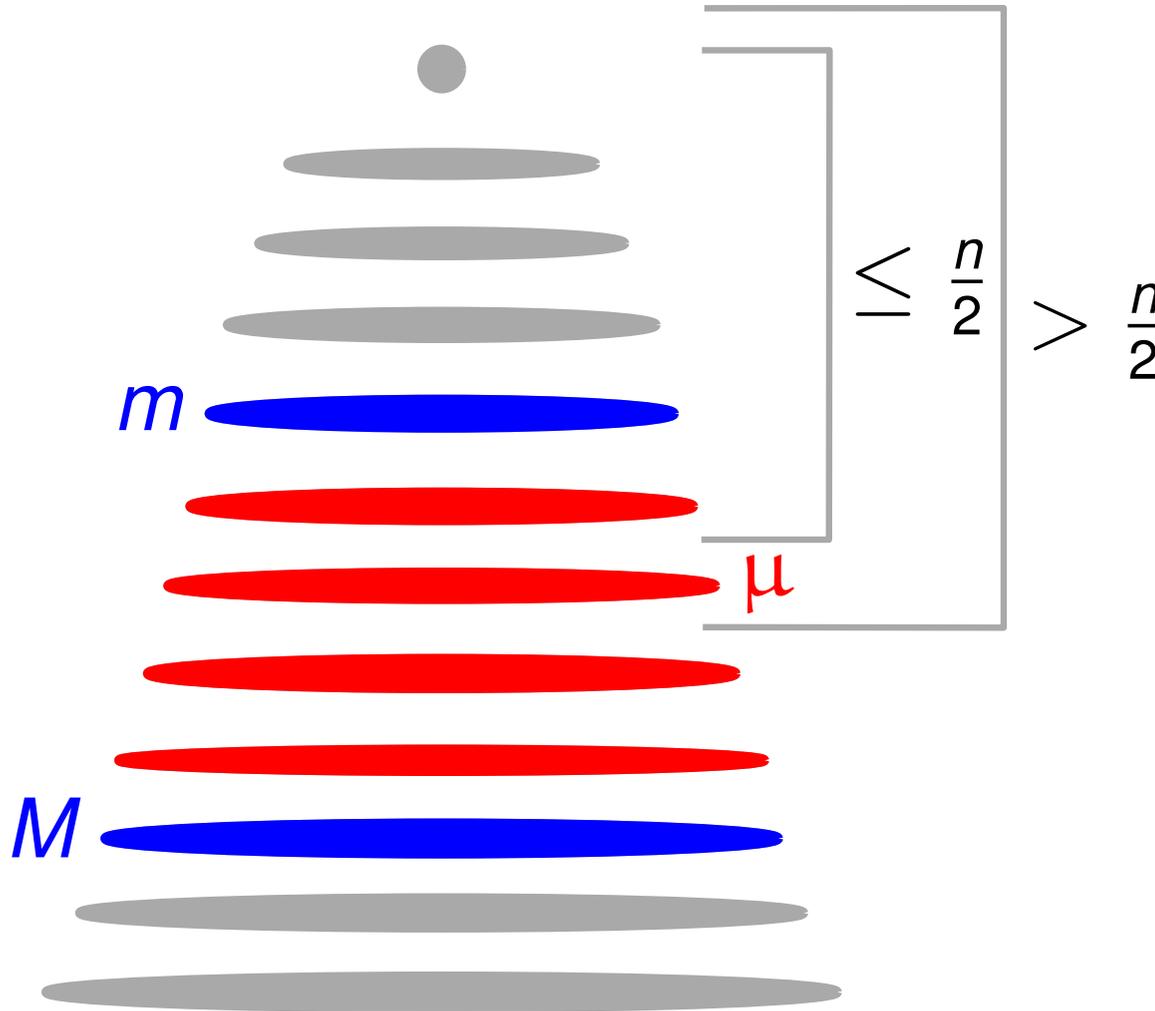
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

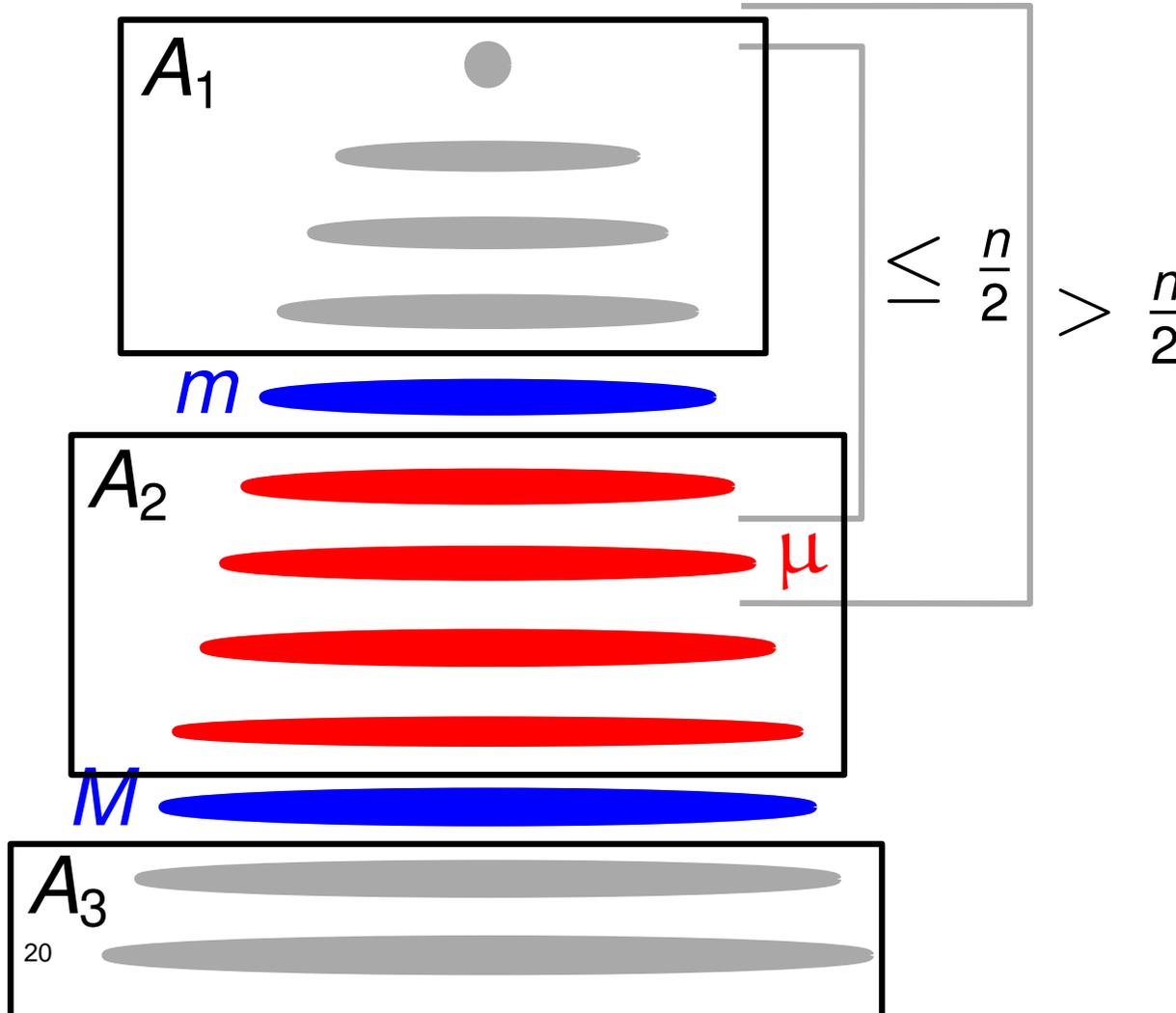
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

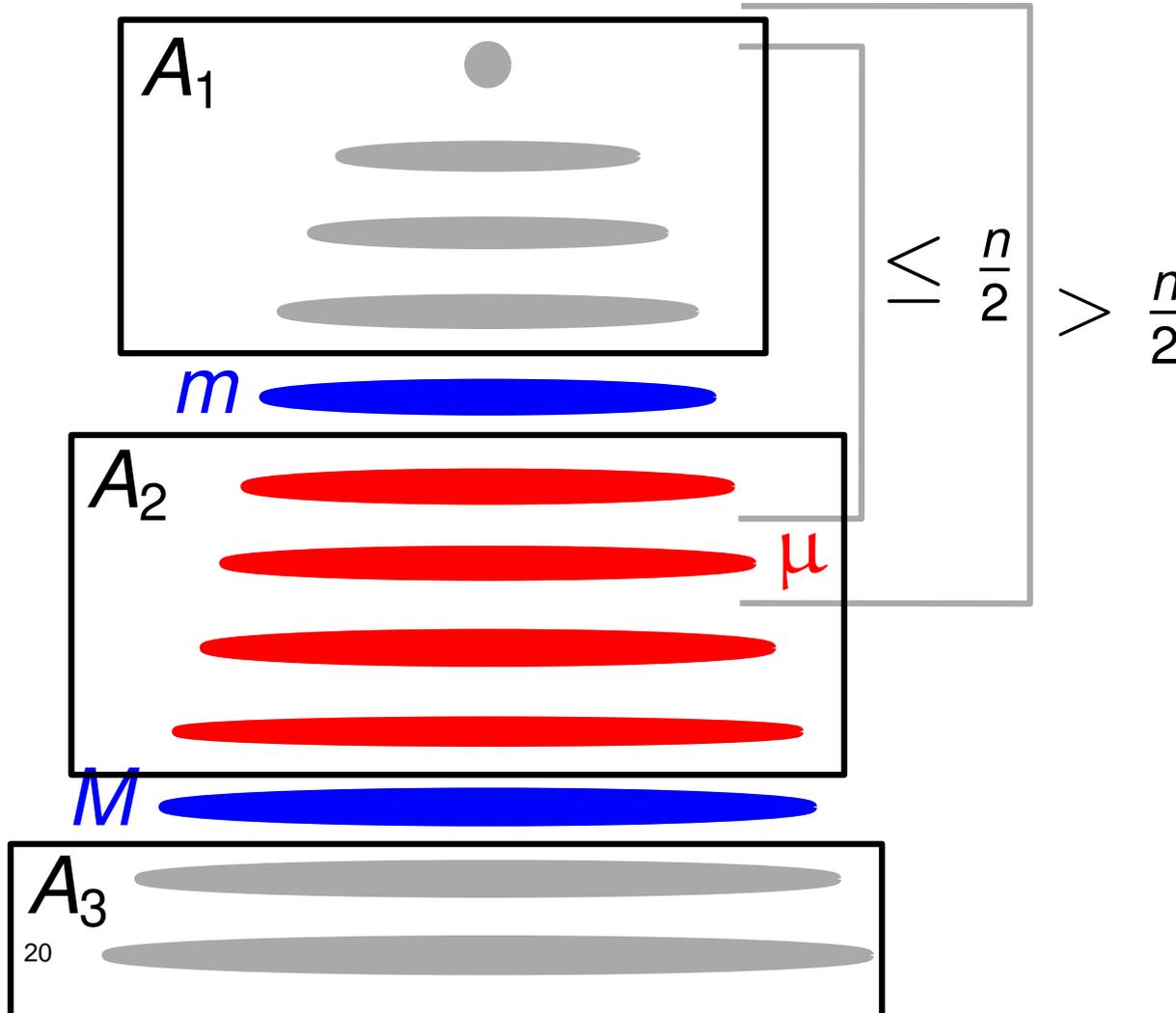
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

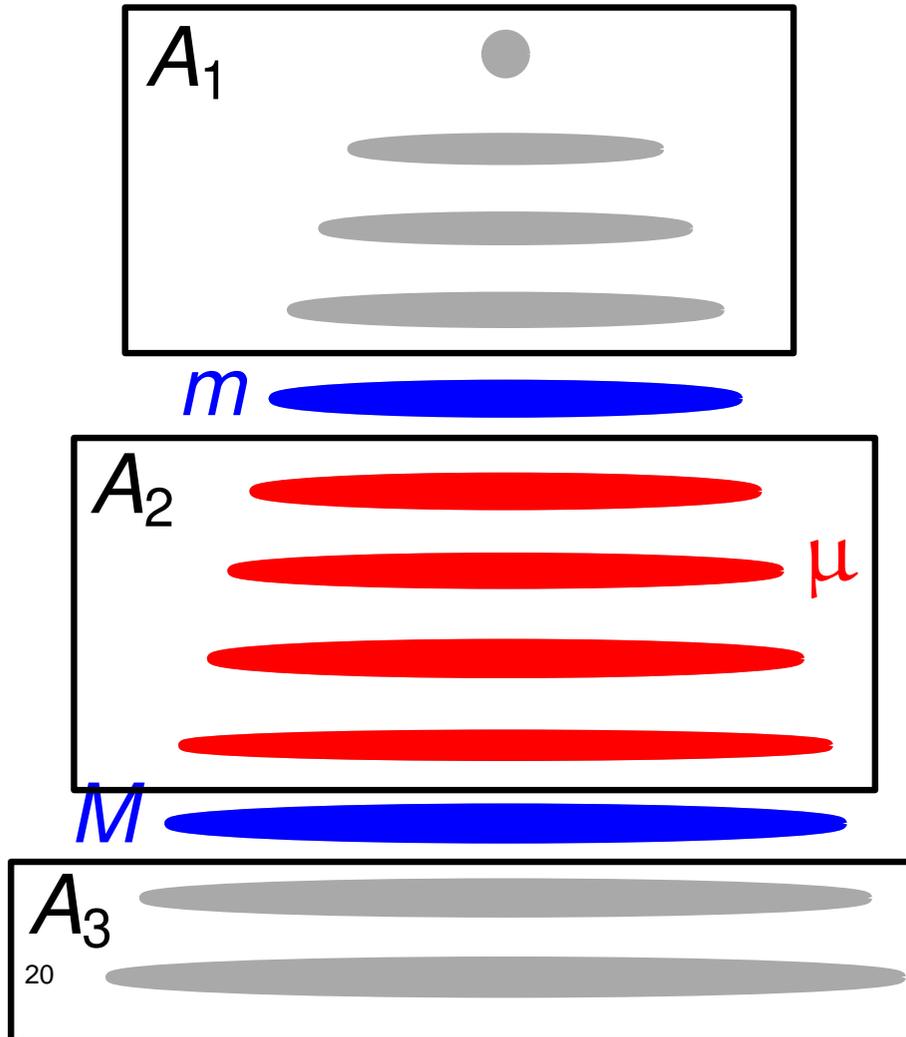
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

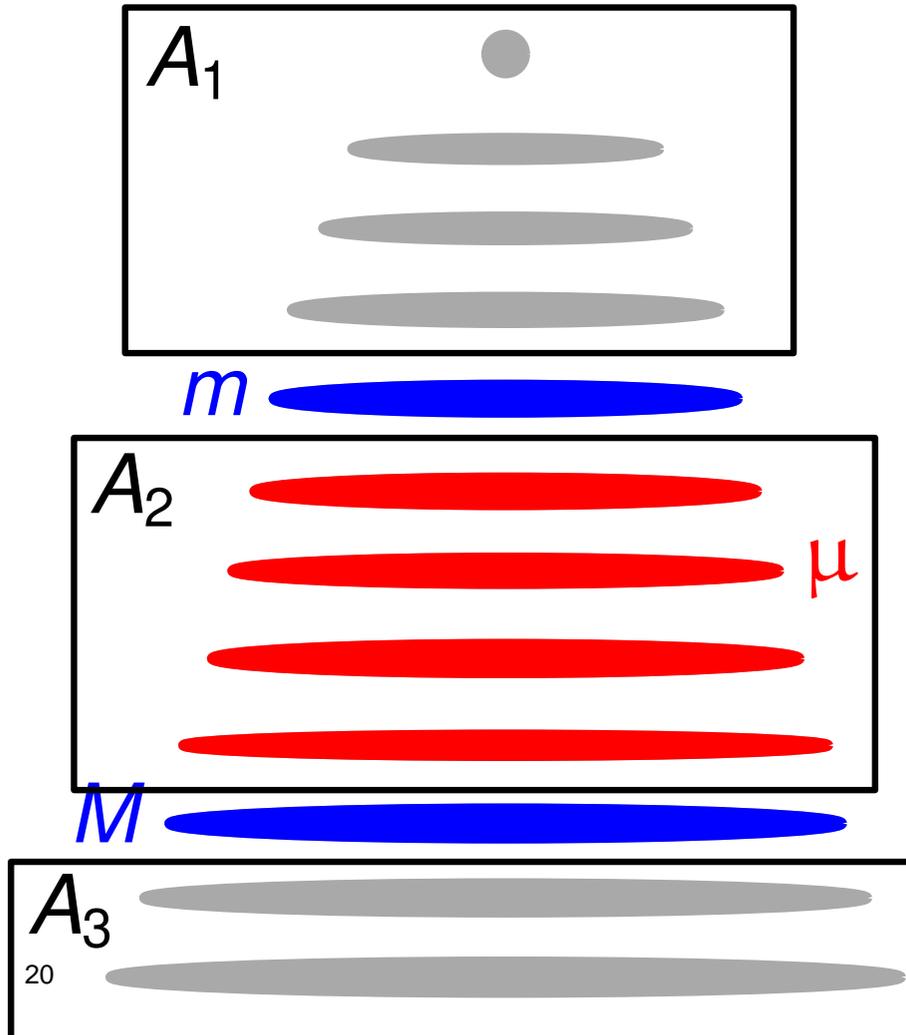
- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$
- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

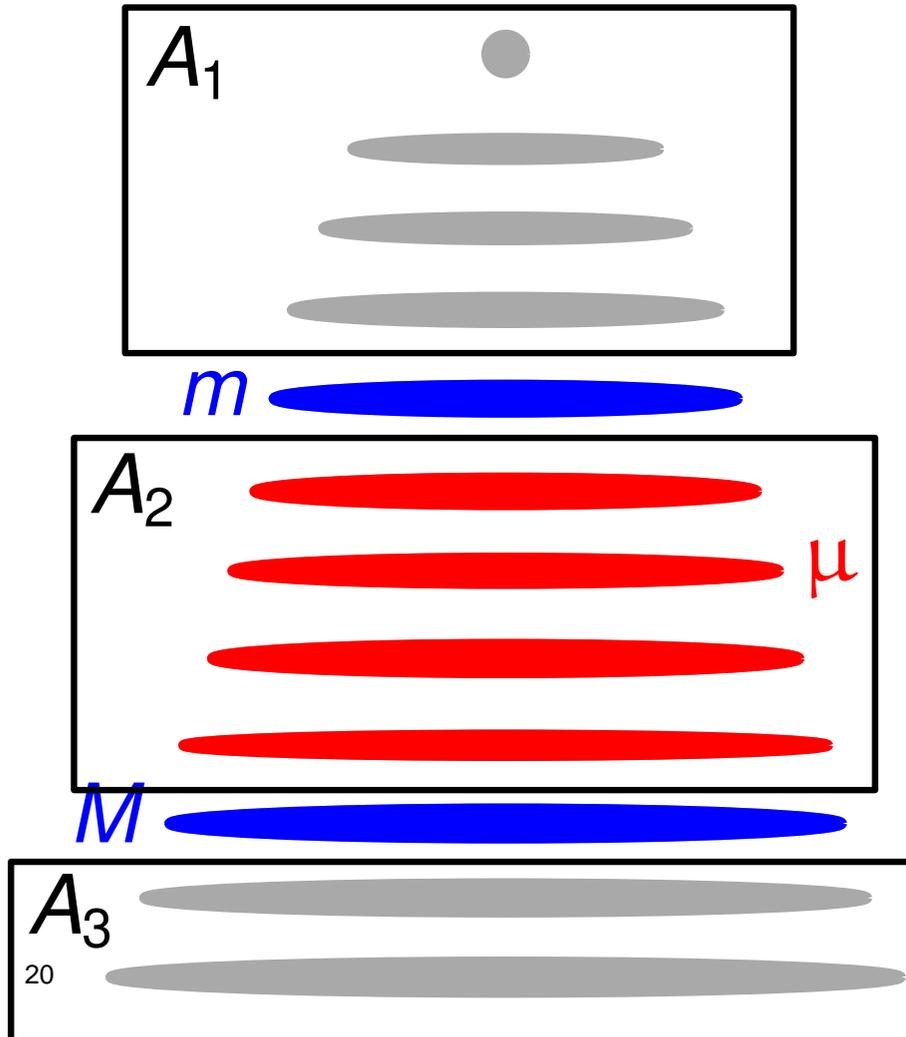
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

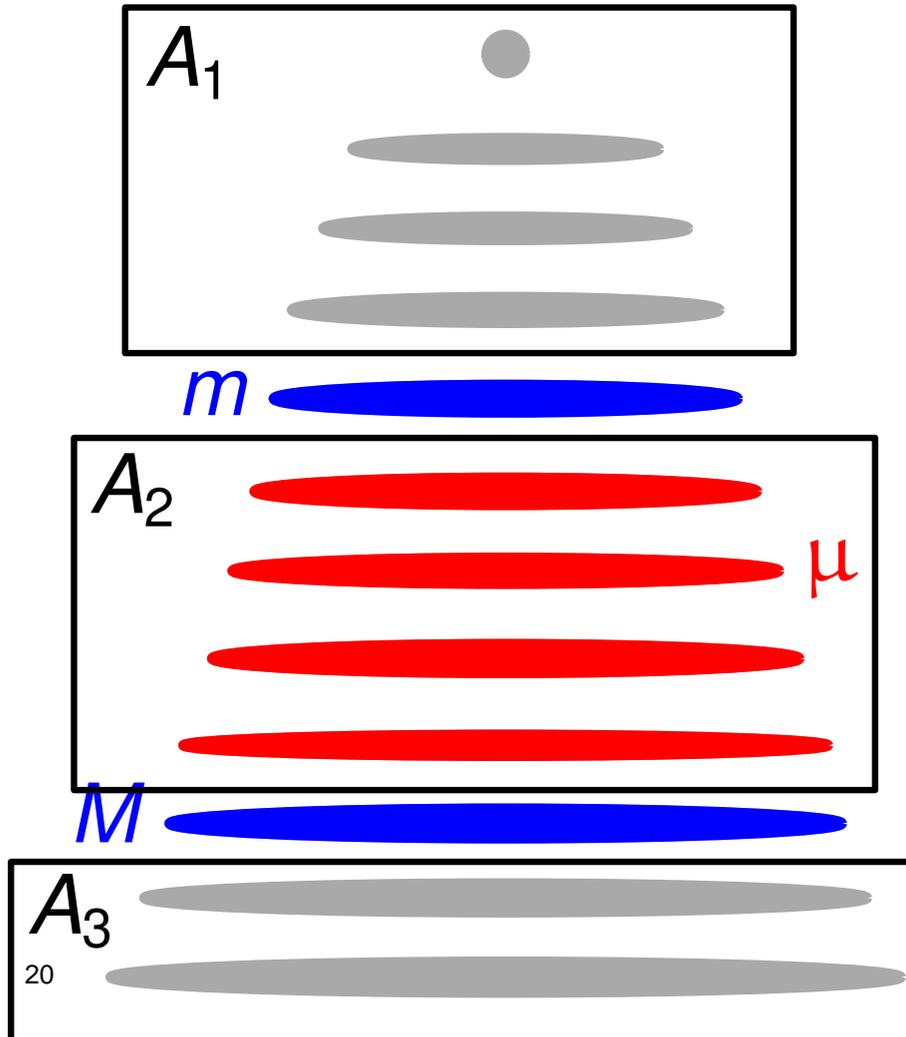
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

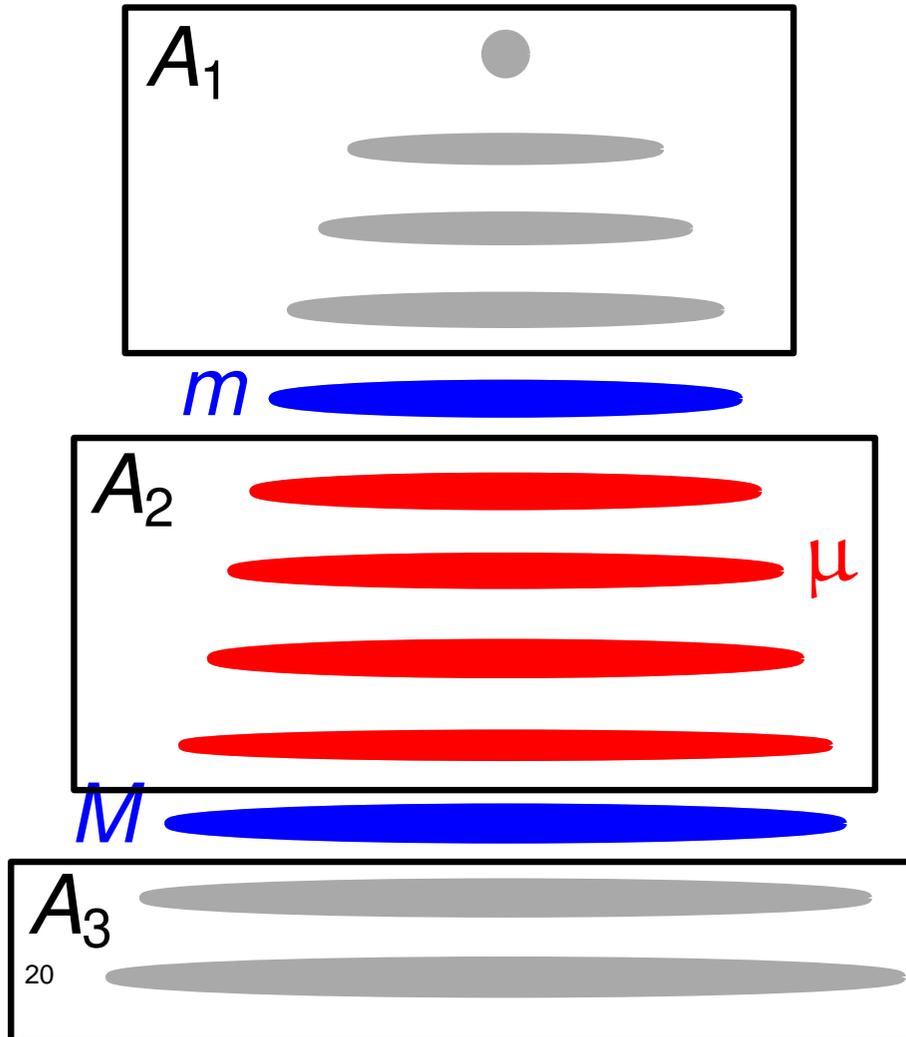
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

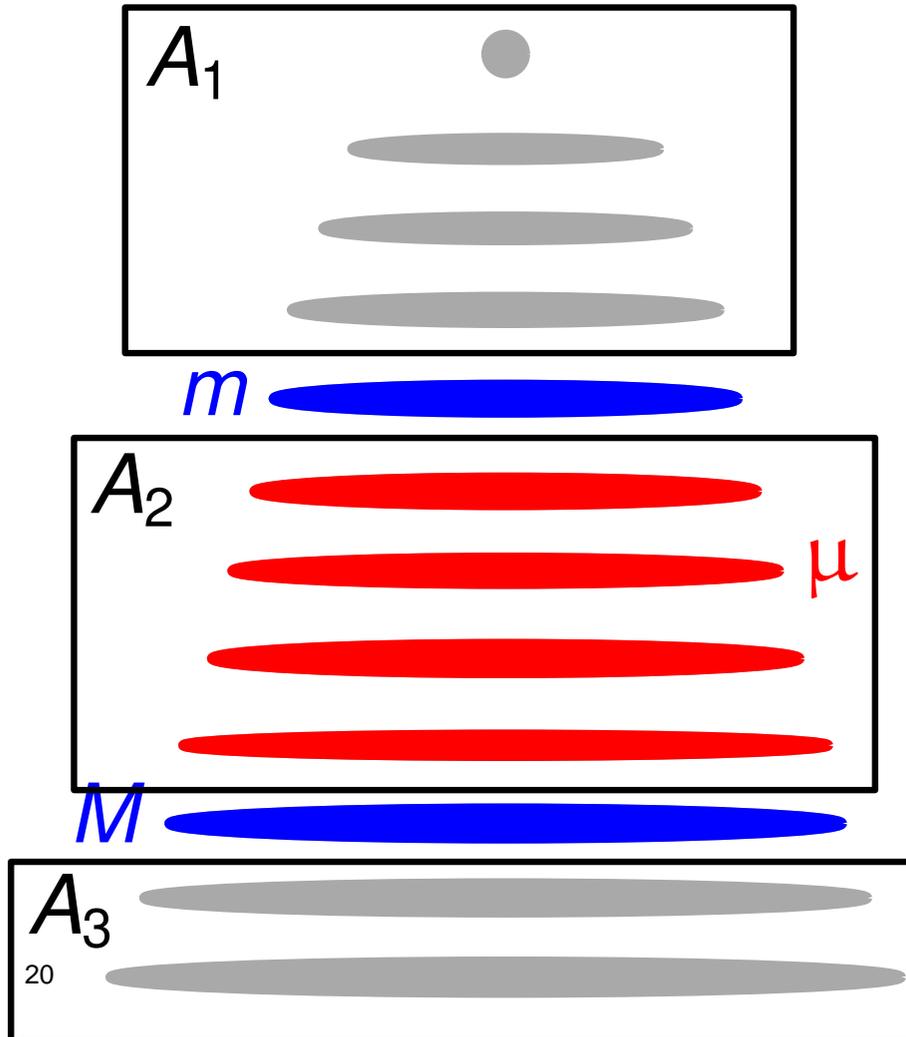
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$

Beweis des Planar-Separator-Theorem

- Wir konstruieren eine Triangulierung von G und ein BFS-Baum T mit beliebiger Wurzel.



- Sei $|\text{level } \mu| > 4\sqrt{n}$

- $|\text{level } m| < \sqrt{n}$

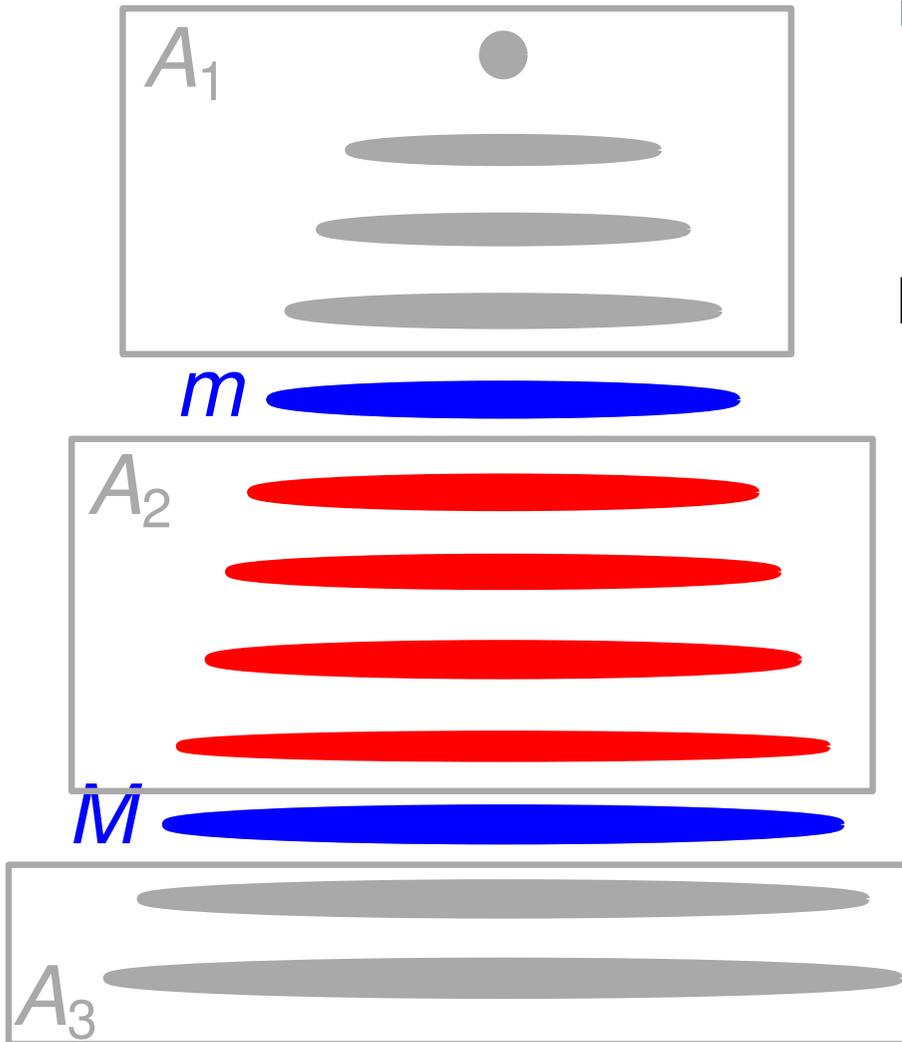
- $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}, |A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 1: $|A_2| \leq \frac{2}{3}n$

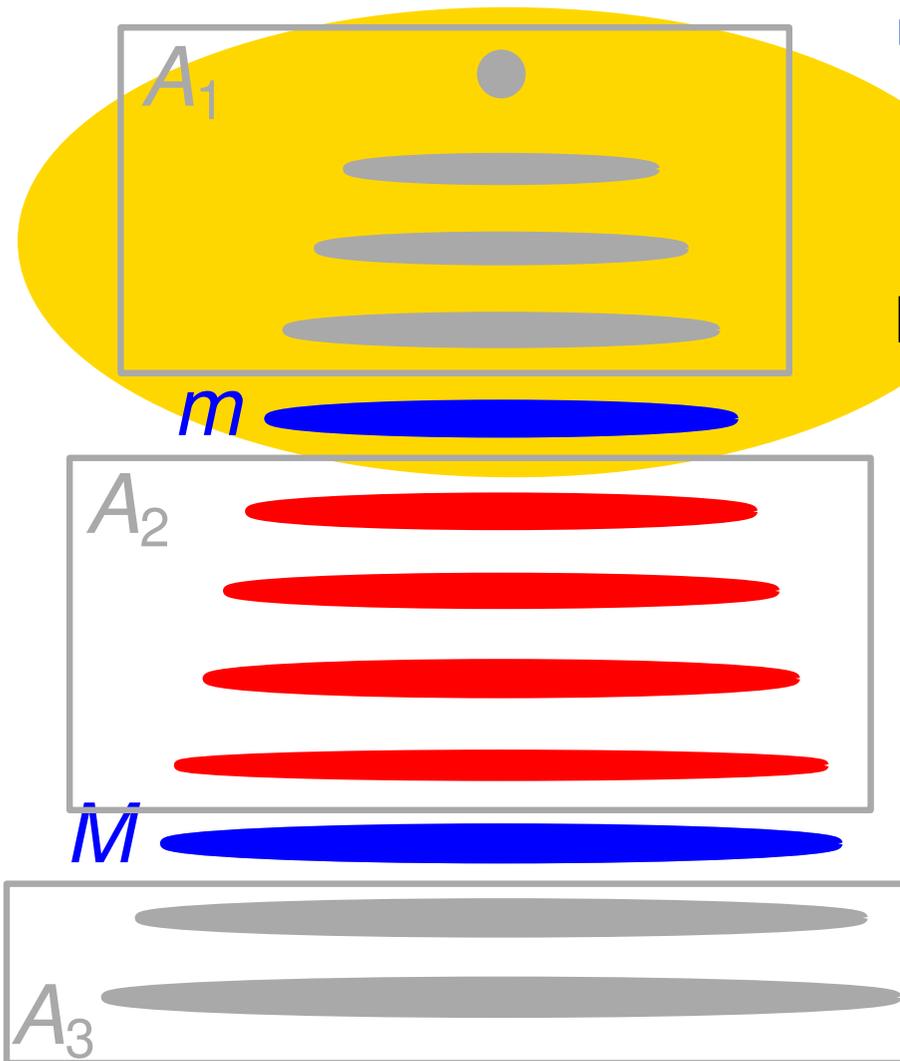
- $S = \text{level } m \cup \text{level } M$ ist Separator
- $V_1 = \max\{A_1, A_2, A_3\}, |V_1| \leq \frac{2}{3}n$
- $V_2 = V \setminus (S \cup V_1), |V_2| < \frac{2}{3}n$

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$

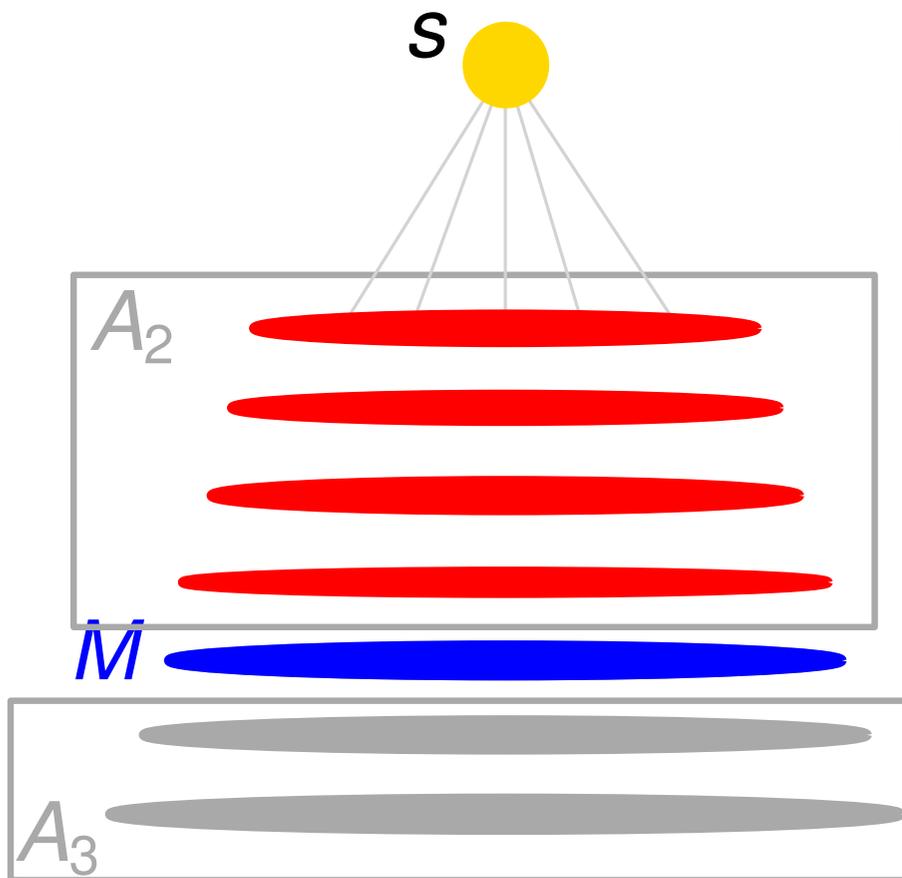
Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$,
 $|level\ m| < \sqrt{n}$, $|level\ M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$

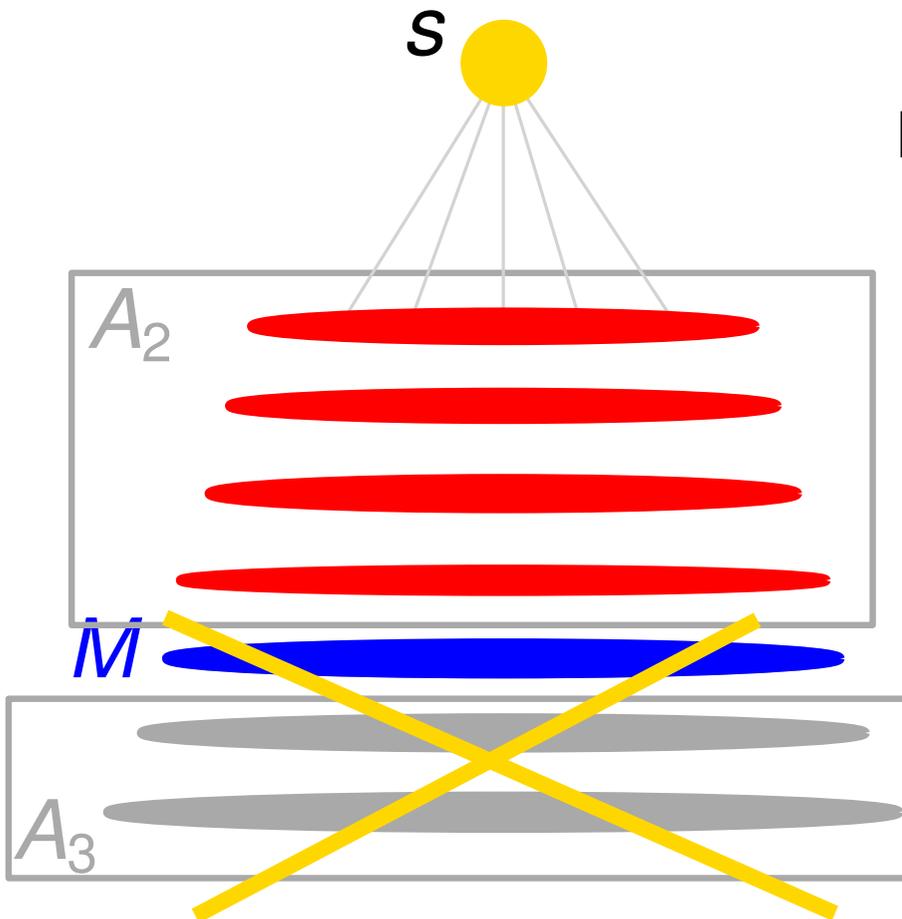
Beweis des Planar-Separator-Theorem

- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$



Beweis des Planar-Separator-Theorem

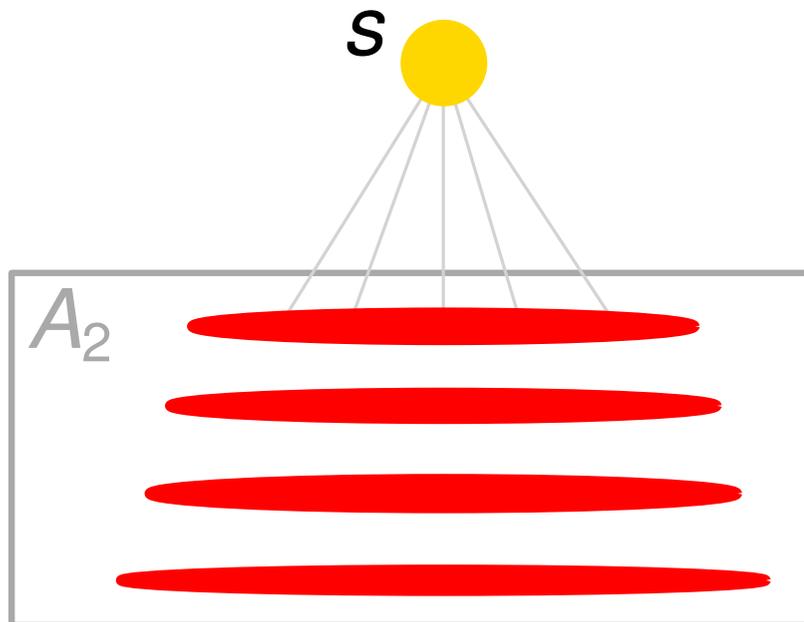
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

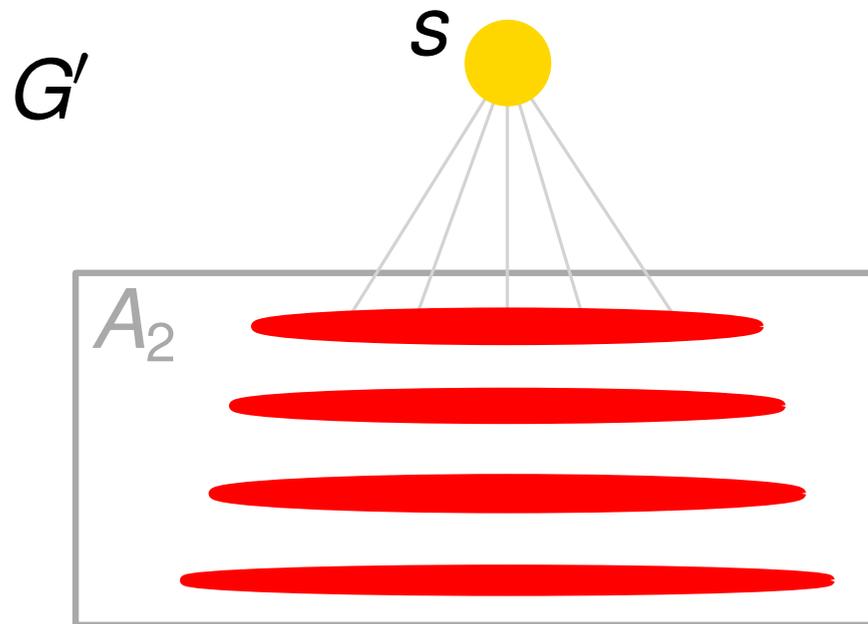


Beweis des Planar-Separator-Theorem

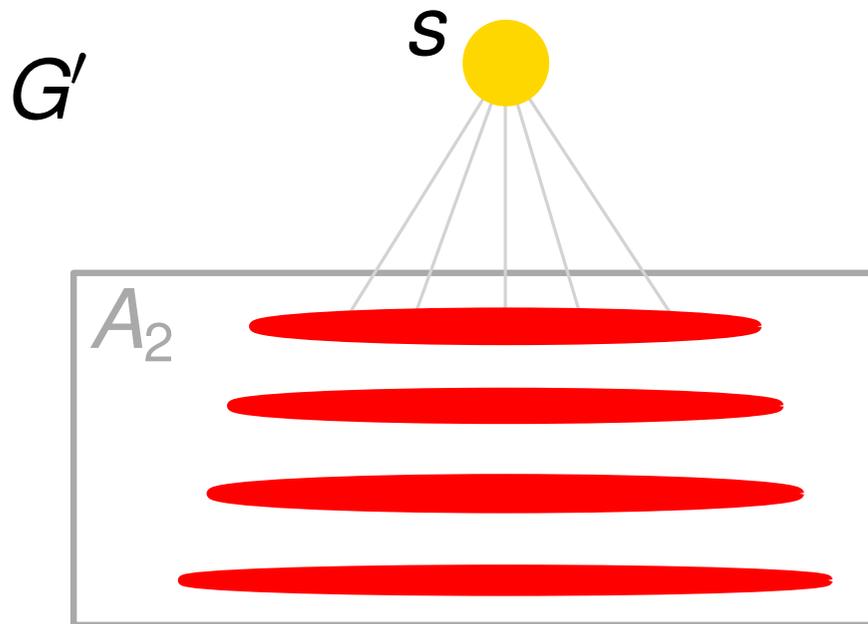
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$

- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

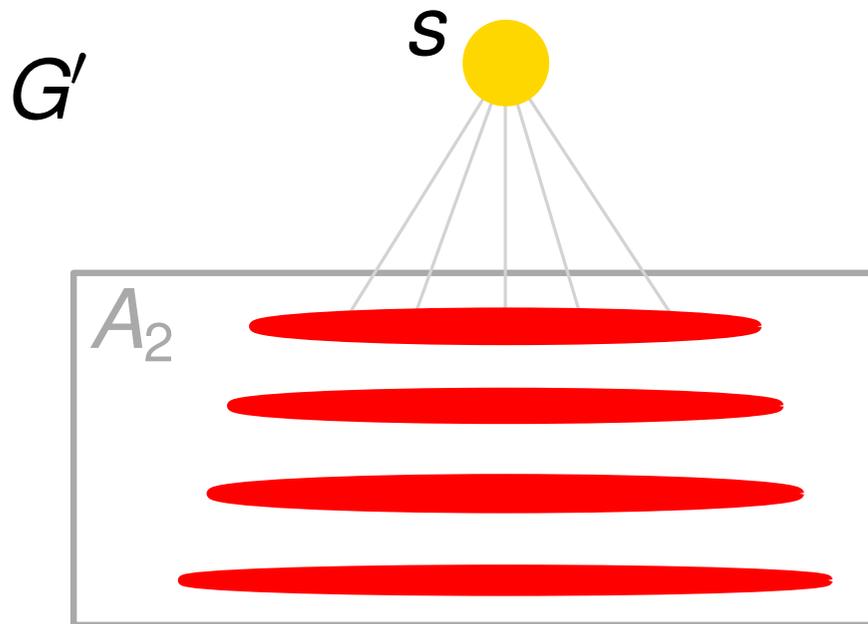
Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$



Beweis des Planar-Separator-Theorem

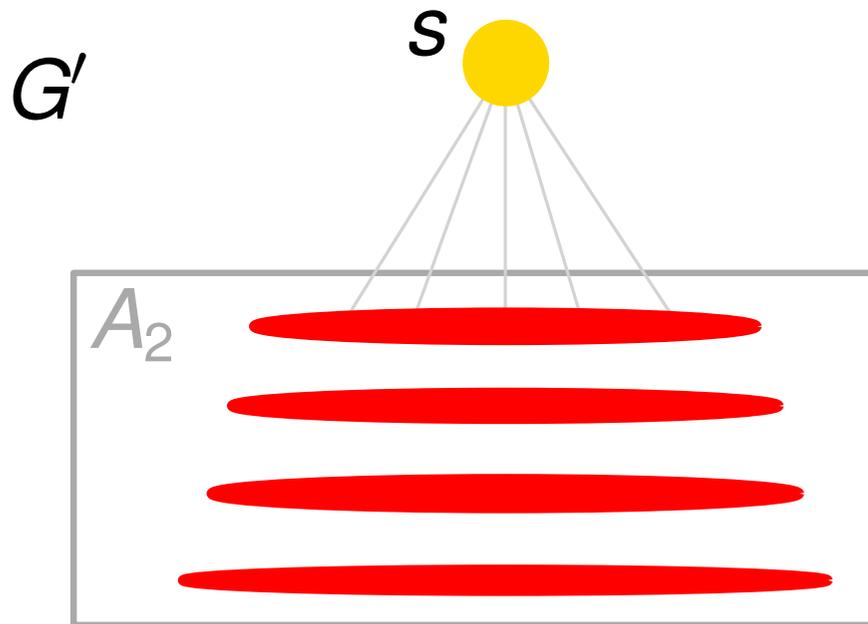


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
 - $\leq \sqrt{n}$ rote levels

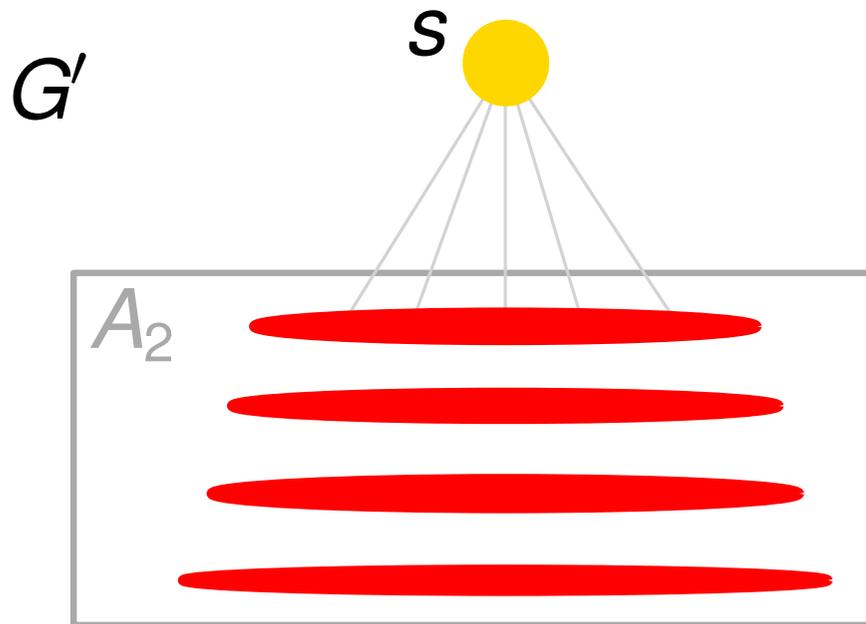
Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

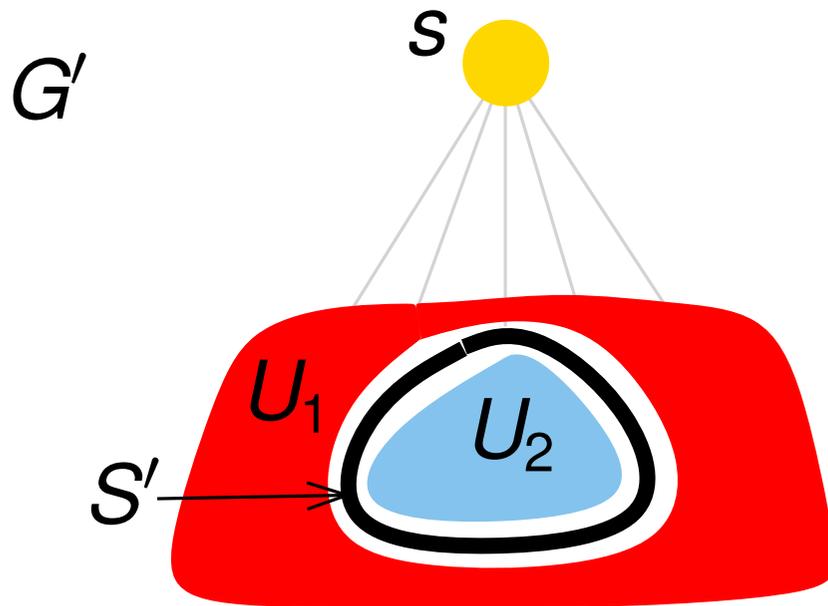
- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels



- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S' , U_1 , U_2

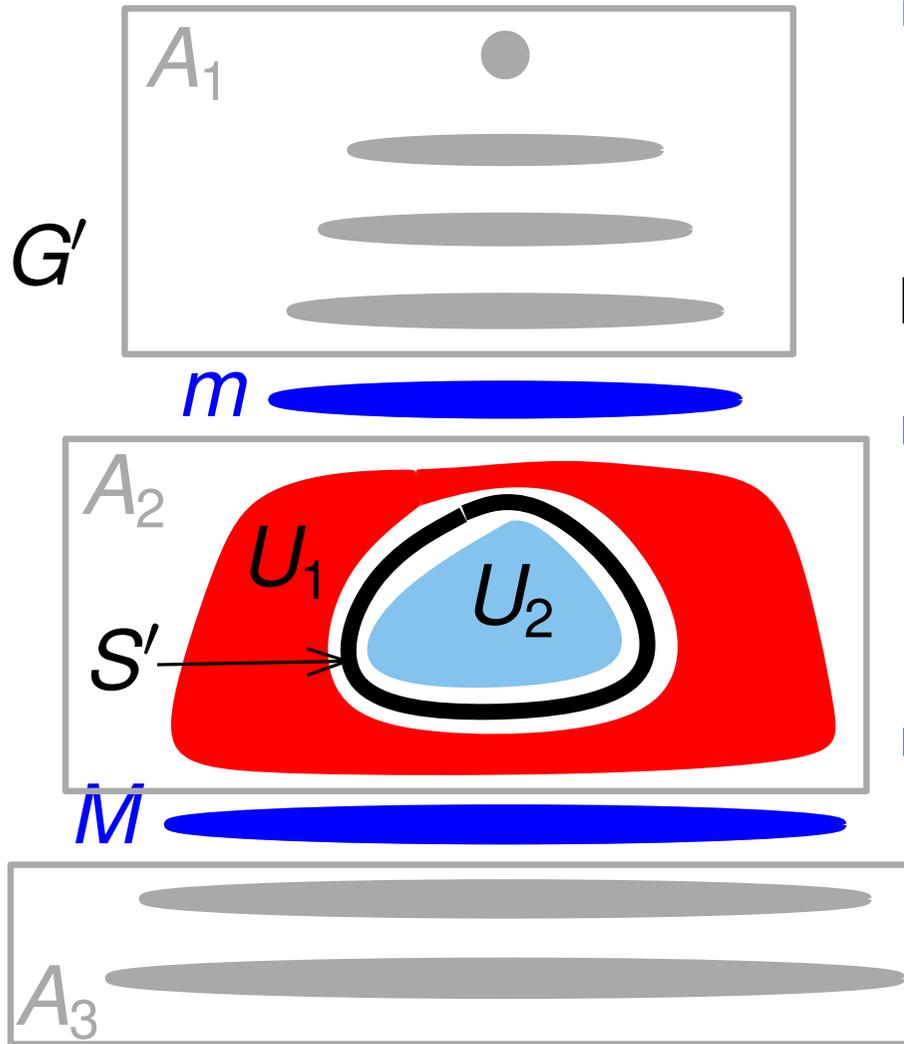


- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$

Fall 2: $|A_2| > \frac{2}{3}n$

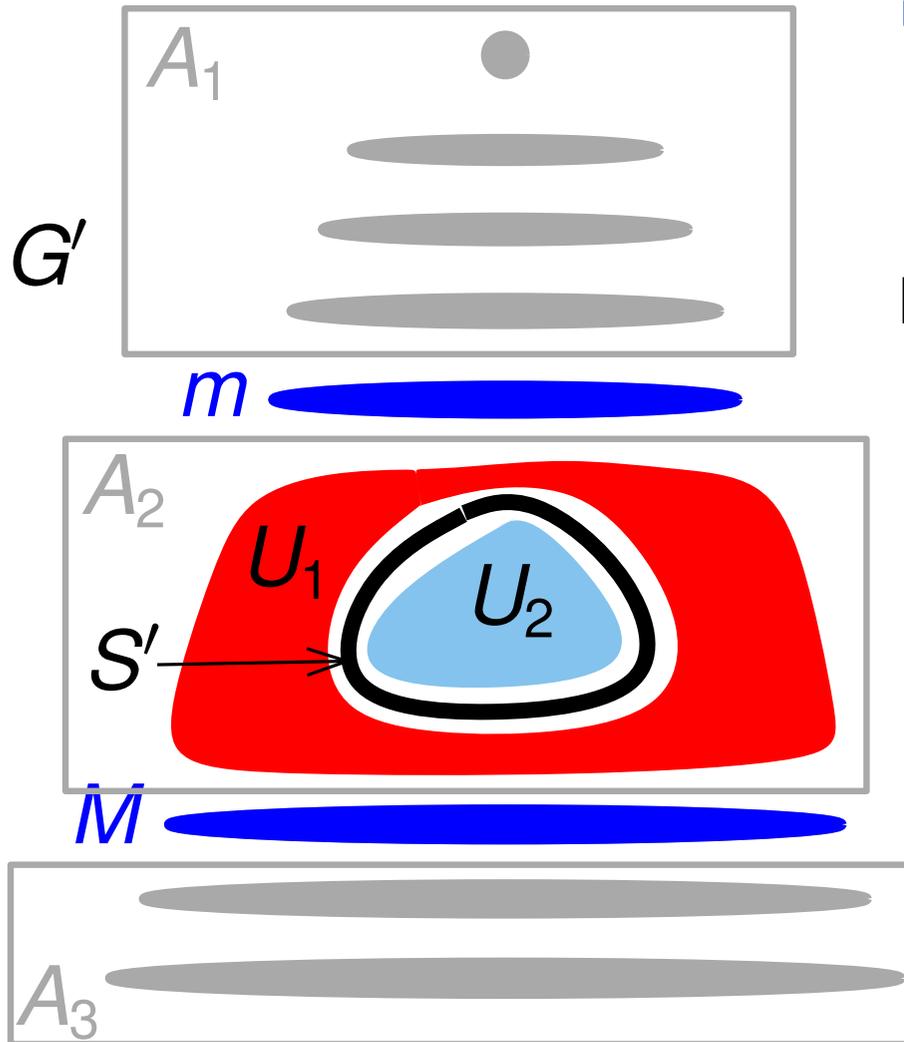
- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S' , U_1 , U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem



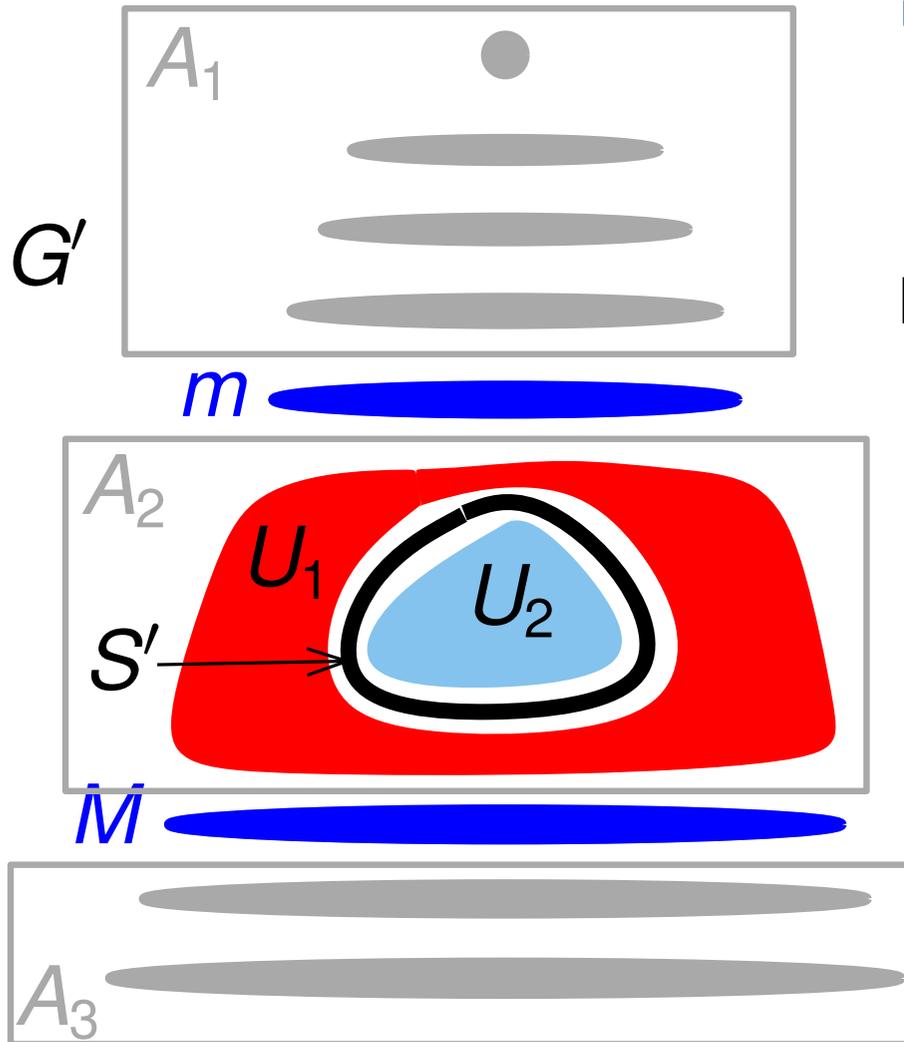
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- BFS-Baum T induziert BFS-Baum T' in G'
- $\leq \sqrt{n}$ rote levels
- T' hat $\leq \sqrt{n}$ levels
- Wir wenden das **wichtige Lemma** auf G' und T' an und bekommen S' , U_1 , U_2

Beweis des Planar-Separator-Theorem



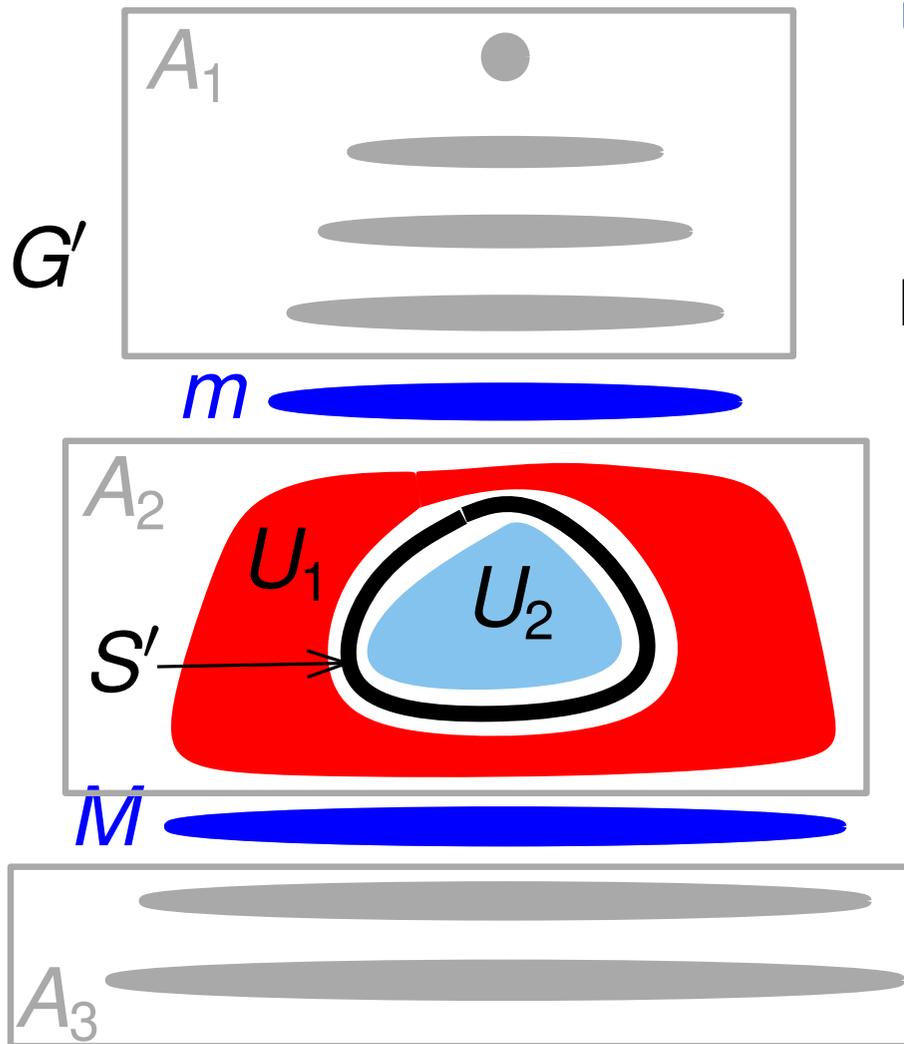
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
- $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$

Beweis des Planar-Separator-Theorem



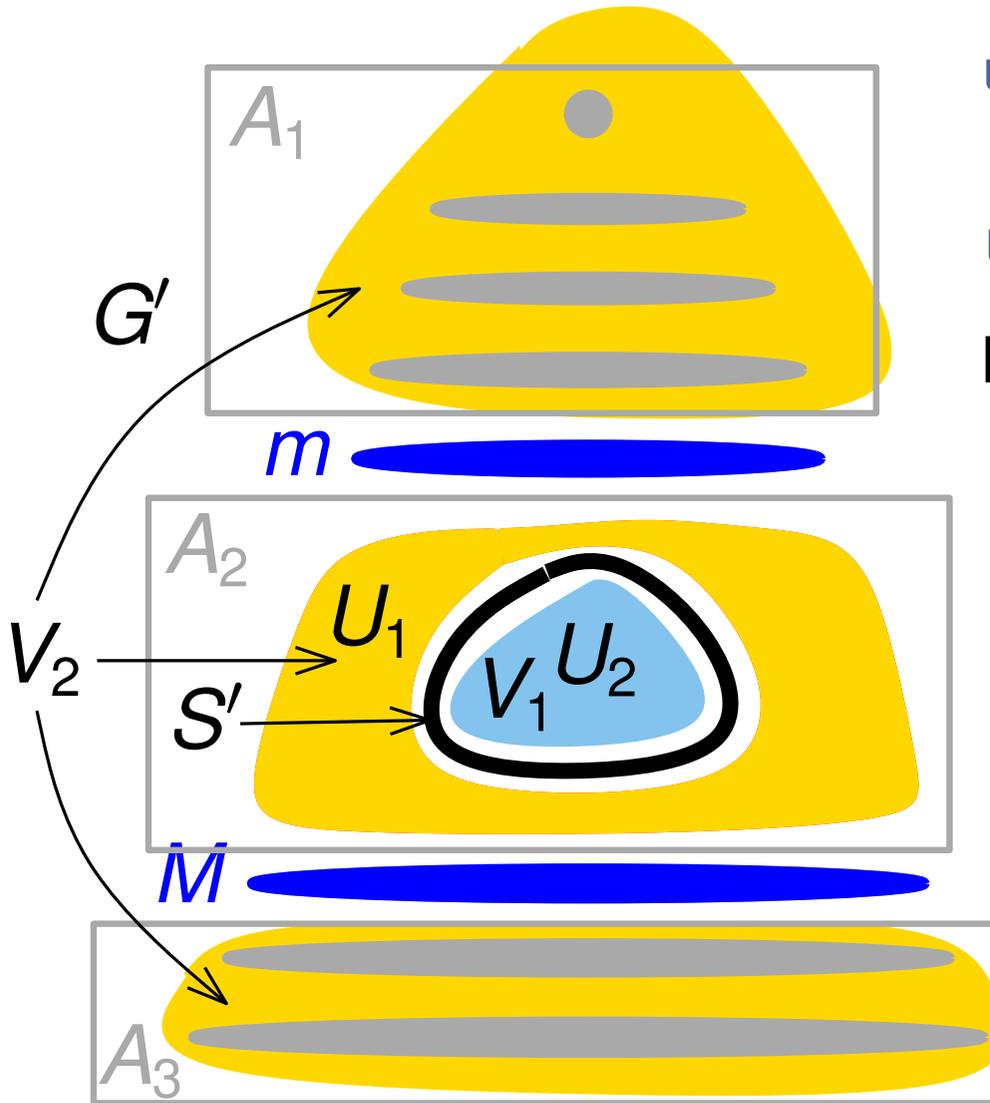
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
 - Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$

Beweis des Planar-Separator-Theorem



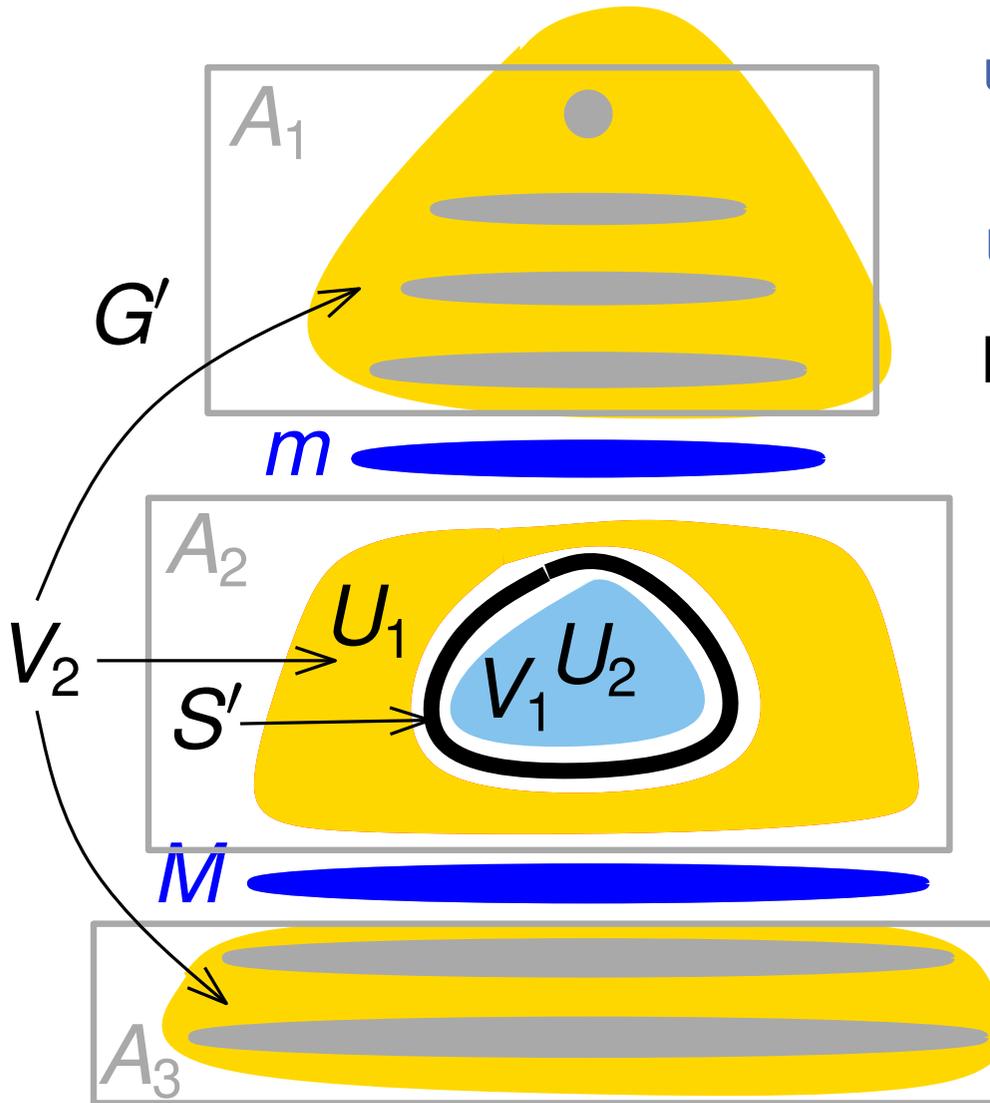
- $|\text{rote level}| > 4\sqrt{n}$,
 $|\text{level } m| < \sqrt{n}$, $|\text{level } M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
 - Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $|S| \leq 4\sqrt{n}$
 - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem



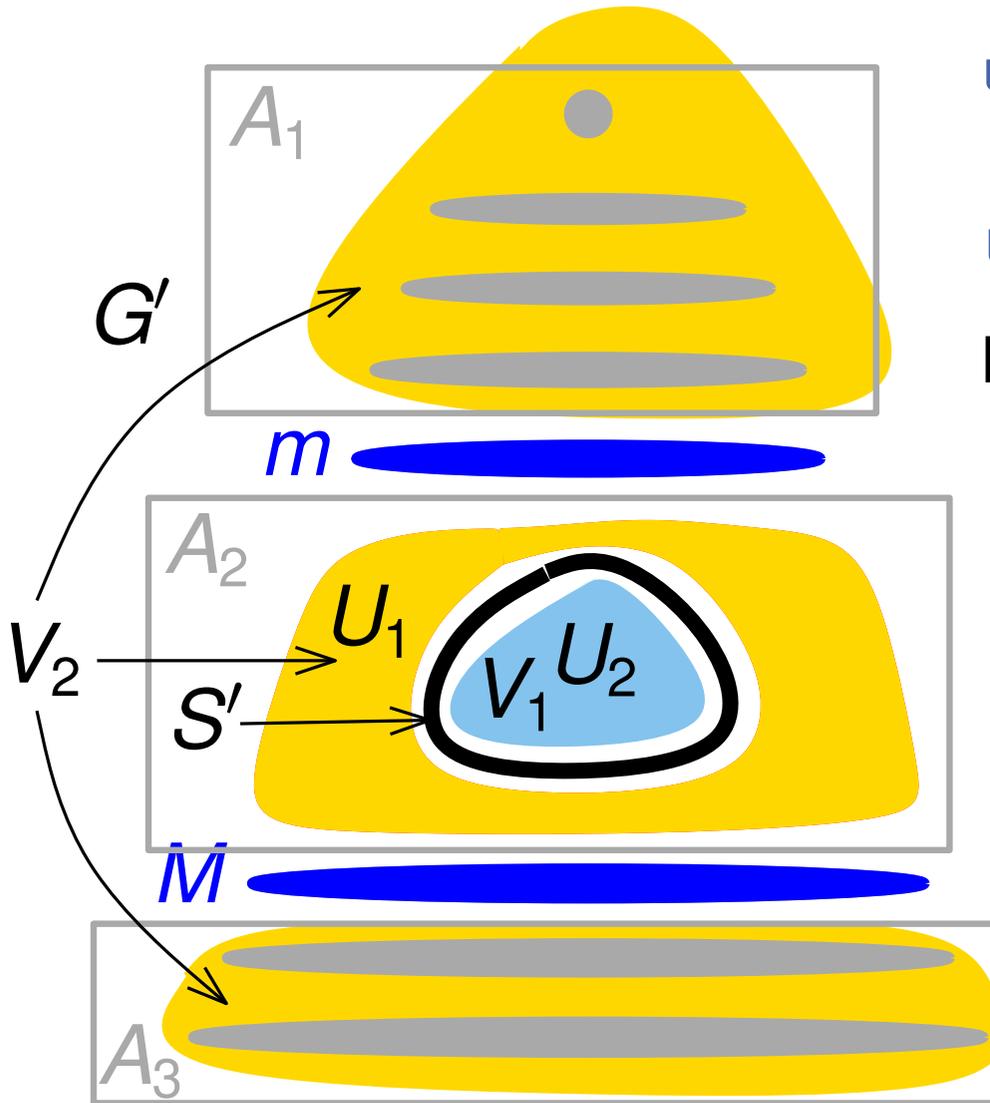
- $|rote\ level| > 4\sqrt{n}$,
 $|level\ m| < \sqrt{n}$, $|level\ M| < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- Sei $S = S' \cup level\ m \cup level\ M$
 - Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
 - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $| \text{rote level} | > 4\sqrt{n}$,
 $| \text{level } m | < \sqrt{n}$, $| \text{level } M | < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
 - Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
 - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.
 - $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2}|A_2|$.

Beweis des Planar-Separator-Theorem



- $| \text{rote level} | > 4\sqrt{n}$,
 $| \text{level } m | < \sqrt{n}$, $| \text{level } M | < \sqrt{n}$
 - $|A_1| \leq \frac{n}{2}$, $|A_3| \leq \frac{n}{2}$
- Fall 2:** $|A_2| > \frac{2}{3}n$
- Sei $S = S' \cup \text{level } m \cup \text{level } M$
 - Nach wichtigem Lemma,
 $|S'| \leq 2\sqrt{n} + 1$, dann $S \leq 4\sqrt{n}$
 - Sei $V_1 = \max\{U_1, U_2\}$. Nach wichtigem Lemma, $|V_1| \leq \frac{2}{3}n$.
 - $|V_1| + |S| > |V_1| + |S'| > \frac{1}{2}|A_2|$.
 - $V_2 = V \setminus (S \cup V_1)$, $|V_2| = n - |V_1| - |S| < n - \frac{1}{2}|A_2| < \frac{2}{3}n$

Planar-Separator-Algorithmus

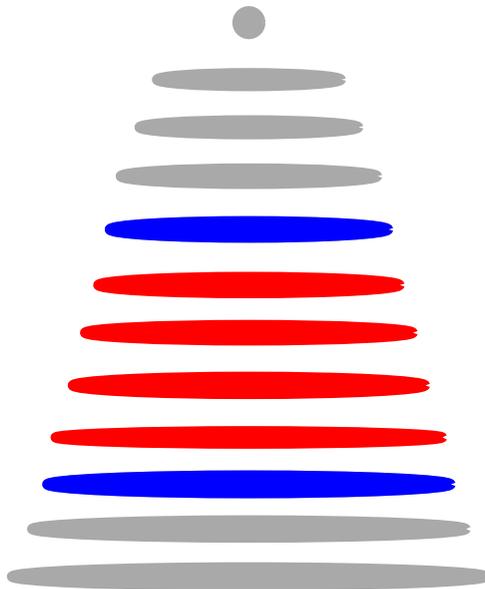
- Beweis des Planar-Separator-Theorem liefert einen Algorithmus

Planar-Separator-Algorithmus

- Beweis des Planar-Separator-Theorem liefert einen Algorithmus
- Jeder Schritt des Algorithmus kann in $O(n)$ Zeit realisiert werden (inkl. der Anwendung des wichtigen Lemmas)

- Beweis des Planar-Separator-Theorem liefert einen Algorithmus
- Jeder Schritt des Algorithmus kann in $O(n)$ Zeit realisiert werden (inkl. der Anwendung des wichtigen Lemmas)
- Die Anzahl der Schritten ist eine Konstante. Das gibt uns einen $O(n)$ Algorithmus.

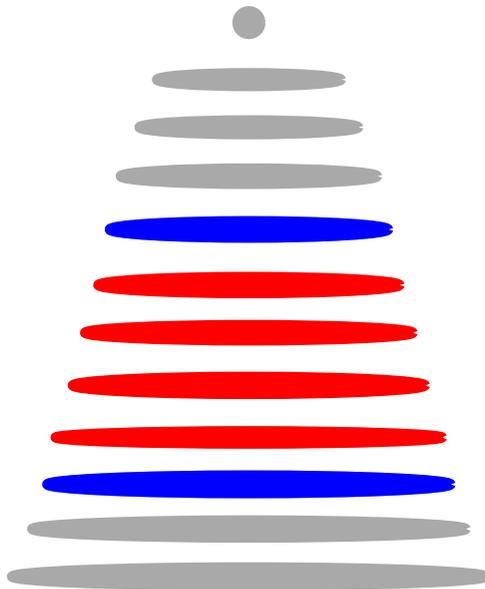
- Beweis des Planar-Separator-Theorem liefert einen Algorithmus
- Jeder Schritt des Algorithmus kann in $O(n)$ Zeit realisiert werden (inkl. der Anwendung des wichtigen Lemmas)
- Die Anzahl der Schritten ist eine Konstante. Das gibt uns einen $O(n)$ Algorithmus.



**Vielen Dank für ihre
Aufmerksamkeit
und
Geduld!**

Planar-Separator-Algorithmus

- Beweis des Planar-Separator-Theorem liefert einen Algorithmus
- Jeder Schritt des Algorithmus kann in $O(n)$ Zeit realisiert werden (inkl. der Anwendung des wichtigen Lemmas)
- Die Anzahl der Schritten ist eine Konstante. Das gibt uns einen $O(n)$ Algorithmus.



**Vielen Dank für ihre
Aufmerksamkeit
und
Geduld!**

?????